بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده‌ی ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

هندسه-توپولوژی

عنوان:

# کوهمولوژی لیچنرویچ

استاد راهنما:

دکتر اکبر دهقان نژاد

استاد مشاور:

دکتر حسین خورشیدی

پژوهش‌گر:

صدیقه میردامادی

مهر ۱۳۹۱

# تقدیم به:

## پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.

## مادرم

دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج است و وجودش برایم همه مهر.

## و همسرم

اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم.

# سپاس گزاری

سپاس خدا را که مرا به راه دانش رهنمون شد و هموست که فرصت شاگردی اساتید گرامی را بر من ارزانی داشت تا چراغی بر تاریکی جهلم باشند.

از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر اکبر دهقان نژاد، استاد راهنمای این پژوهش، که افق های جدیدی بر پنجره ی ذهنم گشودند، سپاس گزارم و رهنمودهای ایشان را ارج می نهم.

همراهی و راهنمایی های جناب آقای دکتر حسین خورشیدی به عنوان استاد مشاور این پژوهش درخور تقدیر و تشکر است.

# چکیده

در این پایان‌نامه، کوهمولوژی لیچنرویچ، $H^*_{d^\omega}(M)$ را معرفی کرده و به بررسی ویژگی‌های آن می‌پردازیم. بانیاگا [۴] این کوهمولوژی را یک $c\mathcal{A}$- کوهمولوژی معرفی کرد و آن را با $H^*_{c\mathcal{A}}$ نمایش داد، به طوری که $\mathcal{A}$ گروه خودریختی‌های پوشش $\widetilde{M}$ از منیفلد $M$ است. این یک کوهمولوژی از زیرمجتمع $\mathcal{F}^*_{c\mathcal{A}}(M)$ از مجتمع دورام از $\widetilde{M}$ تشکیل شده از همه‌ی فرم‌های دیفرانسیلی $\alpha$ روی $\widetilde{M}$ می‌باشد به طوری که $\tau^*\alpha = c_\tau\alpha$ است. $H^*_{c\mathcal{A}}$ را کوهمولوژی $\mathcal{A}$- پایای همدیس از $M$ نیز می‌نامند. نشان خواهیم داد که $c\mathcal{A}$- کوهمولوژی با $H^*_{d^\omega}(M)$ یکریخت است و این نشان می‌دهد که کوهمولوژی لیچنرویچ، کوهمولوژی دورام معمولی پایای همدیس از پوشش متناظر $M$ است.



# کلمات کلیدی

کوهمولوژی لیچنرویچ - برگ‌بندی - بافه - پیش‌بافه - منیفلد همتافته‌ی همدیس .

# فهرست مطالب


**۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۳**

۱.۱ منیفلد دیفرانسیل‌پذیر ۴

۲.۱ نظریه کلاف‌ها ۵

۱.۲.۱ کلاف تاری ۵

۲.۲.۱ کلاف برداری ۶

۳.۱ برگ بندی ۶

۴.۱ $p$-فرمی‌ها ۷

۱.۴.۱ $p$ -فرمی روی فضای برداری ۷

۲.۴.۱ فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر ۷

۳.۴.۱ $p$ -فرمی روی منیفلدها ۸

۵.۱ مشتق لی فرم‌ها ۹

۶.۱ کوهمولوژی دورام ۹

۷.۱ متریک ریمانی ۱۰

۸.۱ التصاق خطی و مشتق‌گیری همگرد ۱۰

۹.۱ تعاریف و مقدمات جبری ۱۱

۱.۹.۱ دامنه ایده‌ال اصلی ۱۱

۲.۹.۱ مدول ۱۱

۳.۹.۱ جبر مدرج ۱۲

**۲ کوهمولوژی لیچنرویچ و ویژگی‌های اساسی آن** **۱۳**
۱.۲ تعریف و ویژگی‌ها ۱۴
۱.۱.۲ فرمول کارتان و مشتقات لی ۱۶
۲.۱.۲ ناوردایی هموتوپی ۲۱
۳.۱.۲ لم پوآنکاره ۲۵
۲.۲ ابزارهای محاسباتی ۲۷
۱.۲.۲ دنباله‌های دقیق ۲۷
۲.۲.۲ دنباله‌های مایر- ویتوریس ۲۸
۳.۲ کوهمولوژی بافه‌ای ۳۰
۱.۳.۲ بافه ۳۰
۲.۳.۲ پیش بافه ۳۳
۳.۳.۲ قضیه دورام ۳۳
۴.۲ دوگان پوآنکاره ۳۵
۵.۲ کوهمولوژی لیچنرویچ نسبی ۳۹
۶.۲ قضیه گودیرا-لیچنرویچ ۴۱

**۳ قضیه لیری-هرش** **۴۵**
۱.۳ فرمول کنت ۴۶
۲.۳ قضیه لیری-هرش ۵۲

**۴ کوهمولوژی لیچنرویچ و برگ بندی** **۵۷**
۱.۴ مقدمات ۵۸
۱.۱.۴ برگ‌بندی ۵۸
۲.۱.۴ برگ‌بندی ریمانی ۶۱
۳.۱.۴ ایزومتری و شار ریمانی ۶۳

۲.۴ کوهمولوژی پایه‌ای لیچنرویچ ۶۴
۱.۲.۴ کوهمولوژی پایه‌ای ۶۴
۲.۲.۴ کوهمولوژی پایه‌ای لیچنرویچ ۶۷

**۵ هندسه همتافته موضعا همدیس ۶۹**
۱.۵ منیفلدهای همتافته ۷۰
۲.۵ منیفلدهای تماسی ۷۲
۱.۲.۵ منیفلدهای همتافته‌ی موضعا همدیس ۷۳
۲.۲.۵ مثال‌هایی از ساختارهای **lcs** ۷۴
۳.۵ $c\mathcal{A}$ -کوهمولوژی ۷۶

**۶ مثال‌هایی از کوهمولوژی لیچنرویچ ۸۱**
۱.۶ کاربرد فرمول کنت و دوگان پوآنکاره ۸۲
۲.۶ مثال‌هایی بر اساس دنباله‌های مایر-ویتوریس ۸۵
۳.۶ مثال‌هایی از فرم‌های موضعا همدیس $d^{\omega}$-نادقیق ۸۷
۱.۳.۶ $ACFM$-منیفلد ۸۷

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۹۱**

**واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۳**

**مراجع ۹۵**

# پیش‌گفتار

کوهمولوژی لیچنرویچ یک کوهمولوژی از زیرمجتمع $\Omega^*(M)$ از فرم‌های دیفرانسیلی روی یک منیفلد هموار $M$ به‌همراه عملگر دوگان زیر می‌باشد.

$$d^\omega = d + e(\omega)$$

به طوری که $d$ یک مشتق خارجی، $\omega$،یک ۱-فرمی بسته و $e(\omega)$ به‌ازای هر $\alpha \in \Omega^*(M)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$e(\omega)(\alpha) = \omega \wedge \alpha$$

وایسمن [۲۶] نشان داد که کوهمولوژی لیچنرویچ همان کوهمولوژی روی $M$ با ضرایب در یک بافه است، و بانیاگا[۴] نشان داد که کوهمولوژی لیچنرویچ یک کوهمولوژی دورام معمولی همدیس از یک پوشش مناسب $M$ است.

اهمیت کوهمولوژی لیچنرویچ به دلیل تطابقی است که این کوهمولوژی با هندسه همتافته همدیس موضعی $(lcs)$دارد.

یک منیفلد $(lcs)$ تشکیل شده از منیفلد $M$ به همراه یک ۲-فرمی ناتباهیده $\Omega$ به طوری که $d^\omega\Omega = ۰$ و $\omega$ یک ۱-فرمی بسته روی $M$ است که توسط $\Omega$ تعیین می‌شود.

ساختارهای همتافته همدیس موضعی تعمیم جالبی از ساختارهای همتافته هستند. در واقع منیفلدهای $lcs$ می‌تواند بر فضای فازی طبیعی از سیستمهای همیلتونی منطبق باشد. انگیزه هندسی اصلی این است که بر طبق قضیه‌ای از لیچنرویچ[۱۳] منیفلدهای $lcs$، برگ‌های با بعد فرد از یک منیفلد ژاکوبی هستند. کوهمولوژی دورام از فرم همتافته $\Omega$ با کوهمولوژی لیچنرویچ از یک فرم همتافته همدیس موضعی در هندسه $lcs$ جابجا می‌شود. به طور کلی تمام گزاره‌ها در مورد کوهمولوژی دورام $H^*_{DR}(M)$ در هندسه همتافته با گزاره‌های متناظر در مورد $H^*_{d^\omega}(M)$ جابجا می‌شود.

اگرچه کوهمولوژی لیچنرویچ تفاوت‌های زیادی با کوهمولوژی دورام دارد، به عنوان مثال کوهمولوژی لیچنرویچ درجه‌ی صفر از یک منیفلد $n$-بعدی فشرده بدیهی است. اما خواهیم دید که بسیاری از ویژگی‌های کوهمولوژی دورام همچنان دارای مدل‌های مشابه در کوهمولوژی لیچنرویچ است.

هدف این پایان‌نامه یافتن ویژگی‌هایی از کوهمولوژی دورام است که همچنان می‌تواند برای کوهمولوژی

لیچنرویچ برقرار باشد.

این پایان‌نامه شامل ۶ فصل می‌باشد.در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در فصل دوم کوهمولوژی لیچنرویچ را معرفی کرده و به بیان برخی ویژگی‌های آن مثل ناوردایی هموتوپی، لم پوآنکاره و روابط بین کوهمولوژی لیچنرویچ، $H^*_{d^\omega}(M)$ ، و کوهمولوژی دورام می‌پردازیم. در فصل سوم ابتدا اثبات فرمول کنت برای کوهمولوژی لیچنرویچ را بیان می‌کنیم، سپس این فرمول را تعمیم داده و قضیه لیری-هرش را مطرح می‌کنیم. در فصل چهارم مقدماتی از نظریه‌ی برگ‌بندی و ویژگی‌هایی از کوهمولوژی پایه‌ای را بیان کرده و در نهایت کوهمولوژی پایه‌ای لیچنرویچ را برای منیفلدهای برگ‌بندی شده معرفی می‌کنیم. فصل پنجم به معرفی هندسه همتافته‌ی موضعا همدیس و بیان ویژگی‌های آن اختصاص دارد و در آخرین فصل با ارائه مثال‌هایی به محاسبه‌ی کوهمولوژی لیچنرویچ می‌پردازیم.

# فصل ۱

## تعاریف و مفاهیم اولیه

## ۱.۱ منیفلد دیفرانسیل‌پذیر

یک فضای توپولوژیک را یک منیفلد توپولوژیک $n$-بعدی گوییم. هرگاه هر نقطه‌ی آن دارای یک همسایگی باشد که با بازی از $\mathbb{R}^n$ همئومورف است.

**تعریف ۱.۱.۱** یک کارت موضعی یا یک دستگاه مختصات موضعی روی یک فضای توپولوژیک $M$ به صورت زوج $(U,\varphi)$ تعریف می‌شود که در آن $U$ مجموعه بازی از $M$ و $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک همئومورفیسم از $U$ به توی مجموعه‌ی باز $\varphi(U)$ از $\mathbb{R}^m$ می‌باشد.

هر نقطه روی $U$ توسط $m$ -تایی $(x_1,\dots,x_m) = \varphi(x)$ معرفی می‌شود که آن را مختصات نقطه $x$ می‌نامند. اطلس $m$ -بعدی $\mathcal{A}$ ، مجموعه‌ای از کارت‌های موضعی است که دامنه‌های آن‌ها $M$ را می‌پوشاند. به‌طوری‌که اگر $(U,\varphi)$ و $(V,\psi)$ دو کارت موضعی متعلق به $\mathcal{A}$ باشند و $U\cap V \neq \emptyset$ آن‌گاه نگاشت $\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V)$ یک دیفئومورفیسم از کلاس $C^r$ بین مجموعه‌های بازی از $\mathbb{R}^m$ باشد. $\psi\circ\varphi^{-1}$ نگاشت تغییر مختصات نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۱.۱** منیفلد دیفرانسیل‌پذیر $M$ از کلاس $C^r$ و بعد $n$ یک فضای توپولوژیک هاسدورف با پایه شماراست که مجهز به یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر $n$-بعدی و از کلاس $C^r$ باشد و آن را با $M^n$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۳.۱.۱** یک فضای توپولوژیک هاسدورف را **پیرافشرده** گوئیم اگر برای هر پوشش باز $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک تظریف باز $(V_\beta)_{|\beta\in B}$ موضعا متناهی موجود باشد که فضا را بپوشاند.

(تظریف یعنی : $\forall\beta\in B, \exists\alpha\in A : V_\beta\subset U_\alpha$ )

### افراز واحد

**تعریف ۴.۱.۱** فرض کنیم $M$ یک منیفلد پیرافشرده یا با پایه شمارا بوده و $R=\{U_i\}$ یک پوشش باز آن باشد. اگر خانواده‌ای از توابع دیفرانسیل‌پذیر $C^k$ ، $\{\varphi_i(p)\}$ تعریف شده روی $U_i$ ها در ۳ شرط زیر صدق کند آن را **افراز واحد وابسته به پوشش $\mathbf{R}$** می‌نامیم.

۱. $0 \leq \varphi_i(p) \leq 1$ ،

۲. اگر $p \notin U_i$ آن‌گاه $\varphi_i(p) = 0$ ،

۳. $\sum_i \varphi_i(p) = 1 \qquad \forall p \in M$ .

## ۲.۱ نظریه کلاف‌ها

گاهی اوقات در هندسه لازم است که با کنار هم قرار دادن یا با اجتماع منیفلدها، منیفلد جدیدی بسازیم. برای انجام این کار باید یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی این خانواده از منیفلدها تعریف کنیم. این عمل را کلاف کردن خانواده‌ای از منیفلدها به‌یکدیگر و این ساختار جدید را ساختار کلافی می‌نامند.

### ۱.۲.۱ کلاف تاری

اگر بخواهیم تعریف کلاف تاری را در یک جمله ساده بیان کنیم، باید بگوییم که یک کلاف تاری یک فضای توپولوژیک است که به‌طور موضعی مشابه حاصل‌ضرب مستقیم دو فضای توپولوژیک دیگر است.

**تعریف ۱.۲.۱** فرض کنیم $E$ ، $B$ و $F$ منیفلدهایی $C^r$ و $\pi : E \to B$ یک نگاشت $C^r$ پوشا باشد. چهارتایی $(E, \pi, B, F)$ را یک کلاف تاری می‌نامیم هرگاه برای هر $b \in B$ زیرمجموعه بازی از $B$ چون $U$ حول $b$ و دیفئومورفیسمی $C^r$ مانند $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ موجود باشد به‌طوری که نمودار زیر جابجایی باشد. یعنی $pr_1 \circ \phi = \pi$ .

$$\begin{tikzcd} E \supset \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

در این تعریف $E$ را **فضای کل**، $B$ را **منیفلد پایه**، $\pi$ را **نگاشت تصویر**، $pr_1 : U \times F \longrightarrow U$ را **نگاشت تصویر روی مولفه اول** و $F$ را **تار کلاف** می‌نامیم. برای هر $b \in B$ ، $\pi^{-1}(b)$ را **تار روی** $b$ نامیده و با نماد $E_b$ نمایش می‌دهیم.

زوج $(U, \phi)$ یک **کارت کلاف تاری** نام دارد. واضح است که بعد منیفلد $E$ برابر با جمع ابعاد $B$ و $F$ است.

$$\dim E = \dim B + \dim F$$

چنانچه ابهامی پیش نیاید، به جای نماد $(E,\pi,B,F)$ از نماد $\pi : E \longrightarrow B$ یا تنها از نماد $E$ برای معرفی یک کلاف تاری استفاده می‌کنیم.

### ۲.۲.۱ کلاف برداری

**تعریف ۲.۲.۱** فرض کنیم $(E,\pi,B,F)$ یک کلاف تاری باشد. می‌گوییم $(E,\pi,B,F)$ یک **کلاف برداری** است اگر $F$ یک فضای برداری به بعد $m$ بوده و این کلاف دارای اطلسی باشد که نگاشت‌های تغییر کارت آن در هر نقطه ایزومورفیسم‌های خطی باشند.

## ۳.۱ برگ بندی

به بیان ساده منظور از برگ‌بندی $n$ بعدی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر $M^m$، تجزیه آن به زیرمنیفلدهای همبند $n$ بعدی به نام برگ است، که این زیرمنیفلدها به طور موضعی مشابه زیرمنیفلدهایی از $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ با مختص دوم ثابت هستند. ساده‌ترین مثال برگ‌بندی $n$ بعدی، برگ‌بندی $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ است که در آن برگ‌ها صفحه‌های $n$ بعدی $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ ، $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ می‌باشند.

دیفئومورفیسم $h : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ که حافظ برگ‌های این برگ‌بندی است به طور موضعی به فرم زیر می‌باشد.

$$h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y)) \quad , (x,y) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \qquad (۳.۱.۱)$$

**تعریف ۱.۳.۱** فرض کنیم $M$ یک منیفلد $m$ بعدی از کلاس $C^\infty$ باشد. یک برگ‌بندی $n$ بعدی از کلاس $C^r$ روی منیفلد $M$ عبارت است از اطلس ماکزیمال $\mathcal{F}$ روی $M$ که در ویژگی‌های زیر صدق کند.

۱. اگر $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ که $U_1$ و $U_2$ به ترتیب گوی‌های بازی در $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^{m-n}$ هستند.

۲. اگر $(U_i,\varphi_i)$ و $(U_j,\varphi_j)$ دو کارت دلخواه از $\mathcal{F}$ با قلمروهای مشترک $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ باشند، آن‌گاه نگاشت تغییر مختصات $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ به صورت ۳.۱.۱

باشد، بدین معنی که $\varphi_j \circ \varphi_i^{-۱}(x,y) = (\psi_{ij}(x,y), \gamma_{ij}(y))$. در این صورت گوییم $M$ توسط $\mathcal{F}$ برگ‌بندی شده است و یا $\mathcal{F}$ یک ساختار برگ‌بندی از بعد $n$ و از کلاس $C^r$ روی $M$ است و کارت‌های $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$ را کارت‌های برگ‌بندی می‌نامیم.

# ۴.۱ $p$-فرمی‌ها

## ۱.۴.۱ $p$ -فرمی روی فضای برداری

**تعریف ۱.۴.۱** فرض کنید $E$ یک فضای برداری به بعد $n$ روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک $p$- **فرمی خارجی** (یا یک فرم از درجه $p$ ) عبارت است از نگاشت $p$- خطی متناوب $\omega$ که به صورت زیر می‌باشد.

$$\omega : E \times \cdots \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

**ملاحظه ۲.۴.۱** نگاشت $p$- خطی $\omega$ را **متناوب** گوییم هرگاه $p = ۱$ یا برای $p \leq ۲$ داشته باشیم

$$\omega(X_۱, \cdots X_i, \cdots X_j, \cdots X_p) = -\omega(X_۱, \cdots X_j, \cdots X_i, \cdots X_p)$$

## ۲.۴.۱ فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر

فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر حالت خاصی از فرم‌های خارجی روی فضاهای برداری با بعد متناهی هستند.

**تعریف ۳.۴.۱** فرض کنید $M$ یک مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^n$ و $r$ یک عدد صحیح باشد. فضای برداری تمام $r$-فرمی‌های خارجی روی $M$ را با $\Lambda^r\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم. یک فرم دیفرانسیل‌پذیر از درجه‌ی $r$ یا به‌طور خلاصه یک $r$-فرمی روی $M$، نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $\alpha : M \longrightarrow \Lambda^r\mathbb{R}^n$ است. در این‌صورت برای هر $x \in M$ ، $\alpha_x$ یک $r$- فرمی روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. مجموعه‌ی تمام $r$-فرمی‌های روی $M$ یک فضای برداری است که آن‌را با $\Omega^r M$ نمایش می‌دهیم.

### ۳.۴.۱ $p$ -فرمی روی منیفلدها

**تعریف ۴.۴.۱** یک میدان $p$- فرمی روی منیفلد $M$ عبارت است از یک نگاشت $C^\infty$ که به هر نقطه $m$ از $M$ یک $p$- فرمی وابسته می‌کند.

$$\omega : m \in M \to \omega_m \in \Omega^p(T_m M)$$

می‌توان یک میدان $p$-فرمی را توسط یک نگاشت متناوب $C^\infty(M)$ $p$-خطی به صورت زیر معرفی نمود.

$$\omega : \overbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}^{\text{مرتبه}-p} \longrightarrow C^\infty(M)$$

در این‌جا $\mathcal{X}(M)$ مجموعه میدان‌های برداری دیفرانسیل‌پذیر روی منیفلد $M$ است. خانواده این نگاشت‌ها را توسط $\Omega^p M$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۵.۴.۱** منیفلد $M$ را انقباض‌پذیر در نقطه $p_\circ$ از $M$ گوییم اگر نگاشت $C^\infty$ زیر موجود باشد

$$h : M \times [\circ, \text{۱}] \longrightarrow M$$

به طوری که برای هر $p$ در $M$ ،

$$h(p, \text{۱}) = p$$

$$h(p, \circ) = p_\circ$$

به عنوان مثال $\mathbb{R}^n$ انقباض‌پذیر در نقطه $\circ \in \mathbb{R}^n$ می‌باشد، زیرا می‌توانیم تابع $h$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$h : \mathbb{R}^n \times [\circ, \text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(p, t) \longmapsto tp$$

**لم ۶.۴.۱ (پوآنکاره)** فرض کنیم $\omega \in \Omega^p(M)$ ، $(p \geq \text{۱})$ به‌طوری‌که $d\omega = \circ$ در این صورت برای هر نقطه $m \in M$ یک همسایگی $U$ در $M$ و یک $(p - \text{۱})$-فرمی $\pi$ روی $U$ موجود است به طوری که

$$\omega_{|U} = d\pi$$