دانشگاه ارومیه

کمر و هم‌کمر یک متروید همبند

علیرضا بدلی ساربانقلی

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

بهمن ۱۳۸۹

پایان نامه آقای علیرضا بدلی ساربانقلی به تاریخ ۱۳۸۹/۱۱/۱۰ شماره ۱۱۶۲-۲

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه بسیار خوب و نمره ۱۷/۵ (به حروف هفده و نیم)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر حبیب اذانچیلر

۲- داور خارجی : دکتر قدرت ا... آزادی

۳- داور داخلی : دکتر هوشیار قهرمانلو

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر ثیاب قدسی

فهرست مندرجات

چکیده ۲

پیشگفتار ۳

۱ مفاهیم مقدماتی ۵

۱.۱ نظریه گراف و ابرگراف ۵

۲.۱ نظریه متروید ۱۰

۲ همبندی مترویدها ۲۸

۱.۲ مینورها ۲۸

۲.۲ همبندی مترویدها ۳۲

۳ کمر و هم‌کمر یک متروید همبند ۳۸

۱.۳ مسأله هم‌کمر ۳۸

۲.۳ مسأله کمر ۵۰

۴ الگوریتم‌هایی برای مترویدهای برداری ۵۲

۱.۴ ساختار بلوک– حاشیه ۵۳

۲.۴ پیدا کردن هم کمر با استفاده از ساختار متروید ۵۸

۳.۴ پیدا کردن کمر یک متروید برداری ۷۵

۴.۴ مثال ۷۷

مراجع ۸۱

چکیده

این پایان نامه مسائل کمر[۱] و هم کمر[۲] را برای یک متروید همبند[۳] مطالعه می‌کند. مسأله پیدا کردن هم کمر یک متروید گرافیک[۴] به طور کامل مطالعه شده است اما مطالعات بر روی مسائل مشابه برای متروید برداری[۵] یا متروید عمومی[۶] به ندرت گزارش شده است.در این پایان نامه با استفاده از مفاهیم دوگان[۷] و همبندی[۸] مترویدها، خواص مربوط به کمر و هم کمر یک متروید که تحدید[۹] آن ناهمبند[۱۰] است; مطالعه شده است و سپس الگوریتمهایی[۱۱] به دست آمده که هم کمر یک متروید M را از مترویدهای مؤلفه‌های[۱۲] جمع مستقیم[۱۳] حاصل از تحدید M، پیدا می‌کند.

---

[۱] Girth
[۲] Cogirth
[۳] Connected Matroid
[۴] Graphic Matroid
[۵] Vector Matroid
[۶] General Matroid
[۷] Dual
[۸] Connectivity
[۹] Restriction
[۱۰] Disconnected
[۱۱] Algorithms
[۱۲] Components
[۱۳] Direct Sum

پیشگفتار

نظریه ماترویید[۱۴] از نظریه جبری وابستگی خطی[۱۵] شروع شد و در بسیاری از شاخه‌ها مانند نظریه گراف[۱۶]، نظریه لتیس[۱۷]، نظریه سیستمهای الکتریکی[۱۸] و برنامه‌ریزی خطی[۱۹] کاربرد پیدا کرد. خواص مجرد در نظریه ماترویید سبب می‌شوند تا مسائل مختلفی که شکل ماترویید به خود می‌گیرند را با الگوریتمهای ساخته شده بر اساس آن حل کنیم.

در این پایان نامه، نظریه ماترویید برای به وجود آوردن الگوریتمهایی برای پیدا کردن هم کمر یک ماترویید برداری مورد استفاده قرار گرفته است.

کمر و هم کمر کاربردهای عملی در جاهای زیادی مانند درجه سنسور در یک شبکه سنسوری [۱۳] دارند که می‌تواند به وسیله هم کمر یک ماترویید برداری نشان داده شود.

متأسفانه مسأله کمر و هم کمر برای اکثر مترویدها مثلاً ماتروییدهای برداری هنوز یک مسأله جنجال برانگیز است. در سال ۱۹۷۱، ولش[۲۰] الگوریتم مؤثری [۱۵] را برای پیدا کردن کوچکترین دور[۲۱] از یک ماترویید برداری بر روی میدان $\mathbb{F}$ ارائه کرد ولی چند جمله‌ای زمانی آنرا پیدا نکرد.

بر اساس یک تحقیق کامل دو روش عمده و متفاوت برای پیدا کردن کمر و هم کمر وجود

Matroid Theory[۱۴]

Algebraic theory of linear dependence[۱۵]

Graph Theory[۱۶]

Lattice Theory[۱۷]

Electrical System Theory[۱۸]

Linear Programming[۱۹]

Welsh[۲۰]

Circuit[۲۱]

دارند که یکی روش تست کردن رتبه[۲۲] است [۱۳] و دیگری الگوریتم شمارش دورها[۲۳] است. [۵]

تست کردن کامل رتبه که هم کمر یک متروید برداری را به دست می‌آورد می‌تواند در الگوریتم ۱ که در انتهای فصل یک آورده میشود خلاصه شود.

الگوریتم شمارش دورها [۵] و یا تولید ابر صفحه[۲۴] [۱۲] راه دیگری را برای پیدا کردن کمر و هم کمر مهیا می‌کنند. با وجود این در سیستمهای اندازه– بزرگ این الگوریتمهای شمارشی ممکن است عملی نباشند خصوصاً زمانی که تعداد دورها و هم دورها[۲۵] نسبتاً زیاد باشد. در حقیقت برای پیدا کردن کمر(هم‌کمر) شمارش همه دورها لازم نیست.

در این پایان نامه خاصیتهایی از نظریه متروید مطالعه می‌شوند و قضایایی درباره هم‌کمر مترویدهای همبند ثابت می‌شوند که این قضایا سبب می‌شوند که برای پیدا کردن هم‌کمر فقط زیرمجموعه‌های $C^*(M)$ بررسی شوند نه اینکه همه هم دورها مورد بررسی قرار گیرند و سپس الگوریتمهایی بر اساس قضایا ایجاد می‌شوند.

این پایان نامه متشکل است از:

در فصل اول، مقدماتی از نظریه گراف و ابرگراف و نظریه متروید بیان شده‌اند.

در فصل دوم، دربارهٔ همبندی مترویدها مطالبی آورده شده است.

در فصل سوم، قضایایی دربارهٔ کمر و هم‌کمر با کمک مفاهیم دوگان و همبندی مترویدها، ارائه و اثبات می‌شوند.

و در فصل چهارم، الگوریتمهای ۲ و ۳ که هدف اصلی مقاله است برای پیدا کردن هم‌کمر مترویدهای برداری با ارائه مثال و توضیح مفصل ارائه می‌شوند. این پایان نامه برگرفته از مقاله زیر است:

Jung Jin Cho, Yong Chen, Yu Ding, On the (co)girth of a connected matroid, Discrete Applied Mathematics 155 (2007) 2456-2470

[۲۲] Rank
[۲۳] Circuit Enumeration
[۲۴] Hyperplane
[۲۵] Cocircuit

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و ابرگراف ارائه می‌شوند و سپس مفاهیم مقدماتی و لم‌ها و قضایای اساسی نظریه ترویید با ذکر مثالهایی بیان می‌شوند. در این پایان نامه مطالب مربوط به نظریه گراف و ابرگراف از منبع [16] اقتباس شده است.

۱.۱ نظریه گراف و ابرگراف

تعریف ۱.۱.۱ یک گراف G یک سه تایی شامل یک مجموعه‌متناهی و غیرخالی از رأسها[۱] به نام V و یک مجموعه متناهی از یالها[۲] به نام E و یک رابطه‌ای که هر یال را به دو رأس نه لزوماً متمایز وابسته می کند.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $e = uv$ یک یال از گراف G باشد، آنگاه u و v را نقاط انتهایی[۳] یا رأسهای انتهایی یال e گویند، به علاوه e را یال واقع بر دو رأس u و v می گویند.

---

[۱] Vertex
[۲] Edge
[۳] End Points

تعریف ۳.۱.۱ دو عضو u و v از مجموعه $V(G)$ را مجاور[۴] هم گویند هرگاه $uv \in E(G)$ در غیر اینصورت این دو عضو را نامجاور گویند.

اگر نقاط انتهایی یک یال بر هم منطبق باشند، آن را یک طوقه[۵] گویند و اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آنها را یالهای موازی[۶] یا چندگانه[۷] گویند.

تعریف ۴.۱.۱ گراف فاقد طوقه[۸] و فاقد یالهای موازی را گراف ساده[۹] گویند.

تعریف ۵.۱.۱ گراف H یک زیرگراف[۱۰] G است هرگاه:

(۱) $V(H) \subseteqq V(G)$

(۲) $E(H) \subseteqq E(G)$

در اینصورت آن را با $H \subseteqq G$ نمایش داده و گویند G شامل H است.

تعریف ۶.۱.۱ H را یک زیرگراف فراگیر[۱۱] G گویند هرگاه H زیرگراف G باشد و $V(H) = V(G)$. یعنی مجموعه رأسهای H با مجموعه رأسهای G برابر باشد.

تعریف ۷.۱.۱ برای هر رأس $v \in V(G)$، درجه[۱۲] آن رأس را تعداد یالهای واقع بر آن رأس تعریف کرده و آن را با $d(v)$ نشان می‌دهند.

---

[۴] Adjacent
[۵] Loop
[۶] Parallel
[۷] Multiple
[۸] Loopless
[۹] Simple graph
[۱۰] Subgraph
[۱۱] Spanning Subgraph
[۱۲] Degree

رأسی که هیچ یالی بر آن واقع نباشد (رأس با درجه صفر) را رأس تنها[۱۳] گویند.

تعریف ۸.۱.۱ یک گشت[۱۴] در گراف G دنباله‌ای از رأسها و یالهای G به صورت زیر است:

$$V_0 e_1 V_1 e_2 V_2 ... e_n V_n$$

که در آن V_{i-1} و V_i نقاط انتهایی یال e_i هستند.

اگر هیچ یالی در یک گشت تکرار نشود، آن را یک گذر[۱۵] گویند.

اگر هیچ رأسی در یک گذر تکرار نشود، آن را یک مسیر[۱۶] گویند.

مسیر $V_0 e_1 V_1 e_2 V_2 ... e_n V_n$ را که در آن $V_0 = V_n$ یک دور[۱۷] گویند.

تعریف ۹.۱.۱ گراف بی‌دور گرافی است که هیچ دوری نداشته باشد.

یک گراف بی‌دور را یک جنگل[۱۸] گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف G را کامل[۱۹] نامند اگر هر دو رأس G مجاور باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱ گراف G را همبند گویند هرگاه برای هر دو رأس u و v از آن یک مسیر شامل u و v وجود داشته باشد. هر زیرگراف همبند ماکسیمال G را یک مؤلّفه[۲۰] G گویند.

---

[۱۳] Isolated Vertex
[۱۴] walk
[۱۵] Trail
[۱۶] Path
[۱۷] Cycle
[۱۸] Forest
[۱۹] Complete
[۲۰] Component

تعریف ۱۲.۱.۱ هر گراف همبند بی‌دور را یک درخت[۲۱] می‌نامند. رأس با درجه یک از یک درخت را یک برگ[۲۲] یا یک رأس آویخته[۲۳] می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱ درخت T که زیرگراف G است را یک درخت فراگیر[۲۴] گویند اگر $V(G) = V(T)$.

تعریف ۱۴.۱.۱ گراف G را مسطح[۲۵] نامند اگر هر دو یال آن حداکثر در نقاط انتهایی همدیگر را قطع کنند و یک گراف را مسطح‌شدنی[۲۶] نامند اگر یکریخت با یک گراف مسطح باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ اگر G یک گراف و $V' \subseteqq V(G)$، آنگاه $G[V']$ را زیرگرافی از G تعریف می‌کنیم که مجموعه رأسهای آن V' باشد و مجموعه یالهای آن، یالهای با نقاط انتهایی در V' باشد و به طور مشابه اگر $E' \subseteqq E(G)$ آنگاه $G[E']$ را زیرگرافی از G با مجموعه یالهای E' تعریف می‌کنند که مجموعه رأسهای آن، رأسهای انتهایی یالهای مجموعهٔ E' باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ دو گراف G و H را یکریخت گویند اگر توابع دوسویی $\psi : V(G) \to V(H)$ و $\varphi : E(G) \to E(H)$ موجود باشند به طوریکه رأس V از G نقطه انتهایی یال e از G است اگر و تنها اگر $\psi(V)$ از H نقطه انتهایی یال $\varphi(e)$ از H باشد. و در

[۲۱] Tree
[۲۲] Leaf
[۲۳] Pendant Vertex
[۲۴] Spanning Tree
[۲۵] Plane
[۲۶] Planar

اینصورت آنرا با نماد $G \cong H$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۷.۱.۱ ابرگراف[۲۷] H شامل یک مجموعه‌متناهی و غیرخالی از رأسهابه نام V و یک مجموعه از ابریالها[۲۸] مانند H است به طوریکه هر ابریال H یک زیر مجموعه V می باشد.

تذکر ۱۸.۱.۱ اگر A یک ماتریس $p \times m$ باشد، نمایش ابرگراف A عبارت است از $H = (V, N)$ که V مجموعه علامتهای سطرهای A است و $N_i \in N$ شامل رأسهای متناظر با سطرهایی است که یک درآیه غیرصفر در ستون iام دارد و اگر $i \in V$؛ آنگاه $i \in N_j$ اگر و تنها اگر $a_{ij} \neq ۰$ که a_{ij} درآیه (i, j) ام A می‌باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ $\pi = \{V_۱, V_۲, ..., V_k\}$ یک افراز k- راه[۲۹] برای ابرگراف $H = (V, N)$ است اگر در شرایط زیر صدق کند:

i) هر عضو π یک زیرمجموعه غیرخالی V است.

ii) اعضای π دوبدو جدا از هم هستند.

iii) اتحاد k عضو π برابر V می‌باشد.

---

[۲۷] Hyper Graph
[۲۸] Hyper edge
[۲۹] k-Way Partitioning

در این فصل مفاهیم مقدماتی نظریه متروید از منبع [11] اقتباس شده است.

۲.۱ نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ یک متروید M زوج مرتب $M=(E,\mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعه متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

(I۱) $\phi \in \mathcal{I}$

(I۲) اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$؛ آنگاه $I' \in \mathcal{I}$

(I۳) اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_1| < |I_2|$؛ آنگاه عضوی مانند $e \in I_2 - I_1$ وجود داشته باشد به طوریکه $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد؛ آنگاه M را یک متروید روی E و E را مجموعه زمینه[۳۰] متروید M نامند. هر عضو $\mathcal{I}$ را یک مجموعه مستقل[۳۱] متروید M نامند و هر زیر مجموعه‌ای از E که عضو $\mathcal{I}$ نیست را یک مجموعه وابسته[۳۲] متروید M نامند.

تعریف ۲.۲.۱ هر زیرمجموعه وابسته مینیمال متروید M را یک دور M گویند و مجموعه تمامی دورهای متروید M را با $\mathcal{C}(M)$ یا $\mathcal{C}$ نشان می‌دهند.

با معلوم بودن عناصر $\mathcal{C}(M)$ می‌توان اعضای $\mathcal{I}(M)$ را مشخص کرد. عناصر آن دقیقاً آن زیرمجموعه‌هایی از E هستند که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(M)$ نیستند.

گزاره ۳.۲.۱ خواص زیر در مورد $\mathcal{C}(M)$ برقرارند.

(C۱) $\phi \notin \mathcal{C}$

[۳۰] Ground Set
[۳۱] Independent Set
[۳۲] Dependent Set

(C۲) اگر $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ و $C_2 \subseteq C_1$، آنگاه $C_1 = C_2$

(C۳) این خاصیت به صورت یک لم بیان می‌شود:

لم ۴.۲.۱ اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آنگاه عضوی مانند C_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوریکه $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$، یعنی مجموعه $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$ یک مجموعه وابسته می‌باشد.

برهان : به منبع [11] گزاره ۳.۱.۱ مراجعه شود. ■

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد که در سه خاصیت (C۱) و (C۲) و (C۳) صدق می‌کند. همچنین فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه تمامی زیرمجموعه‌های E باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند. در این صورت $(E, \mathcal{I})$ یک ماترویید روی E است که $\mathcal{C}$ گردایه دورهای آن می‌باشد.

برهان : به منبع [11] قضیه ۴.۱.۱ مراجعه شود. ■

نتیجه ۶.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه زمینه $E(M)$ باشد. در این صورت $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک ماترویید روی E است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در شرایط (C۱) و (C۲) و (C۳) صدق کند.

گزاره ۷.۲.۱ فرض کنید I یک زیرمجموعه مستقل M و $e \in E - I$ به طوریکه $I \cup \{e\}$ وابسته باشد در این صورت M دارای دور منحصر به فردی است که زیرمجموعه $I \cup \{e\}$ و شامل e است.

برهان : به منبع [11] گزاره ۶.۱.۱ مراجعه شود. ■

تعریف ۸.۲.۱ عضو e از متروید M را یک طوقه[۳۳] گویند اگر $\{e\}$ یک دور M باشد.

تعریف ۹.۲.۱ اگر f و g دو عضو متروید M باشند به طوریکه $\{f,g\}$ یک دور M باشد، آنگاه f و g را موازی[۳۴] گویند.

تعریف ۱۰.۲.۱ یک کلاس موازی[۳۵] از M، زیرمجموعه ماکسیمال X از $E(M)$ است که هر دو عضو متمایز آن موازی‌اند و هیچ عضو آن یک طوقه نیست.

یک کلاس موازی را بدیهی[۳۶] گویند، اگر شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید بدون طوقه بوده و هر کلاس موازی آن بدیهی باشد، در این صورت M را یک متروید ساده[۳۷] گویند.

حال اگر تمامی طوقه‌های متروید M را حذف کرده و از هر کلاس موازی همه عضوها را به جز یکی حذف کنید، متروید حاصل را متروید ساده وابسته به M می‌گویند.

تعریف ۱۲.۲.۱ هر مجموعه مستقل ماکسیمال متروید M را یک پایه[۳۸] گویند. گردایه تمامی پایه‌های متروید M را با $\mathcal{B}(M)$ و یا $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهند.

لم ۱۳.۲.۱ فرض کنید B_1 و B_2 دو پایه از متروید M باشند، در اینصورت $|B_1| = |B_2|$.

برهان : به منبع [11] لم ۱.۲.۱ مراجعه شود. ■

[۳۳] Loop
[۳۴] Parallel
[۳۵] Parallel Class
[۳۶] Trivial
[۳۷] Simple Matroid
[۳۸] Base

گزاره ۱۴.۲.۱ گردایه تمامی پایه‌های متروید M دارای دو خاصیت زیر است:

$\mathcal{B} \neq \phi$ (B۱)

(B۲) این خاصیت به شکل لمی بیان می‌شود:

لم ۱۵.۲.۱ فرض کنید $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 - B_2$، در اینصورت عضو $y \in B_2 - B_1$ وجود دارد که $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان : به منبع [11] گزاره ۲.۲.۱ مراجعه شود. ■

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد که در شرایط (B۱) و (B۲) صدق می‌کند و فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه تمام زیرمجموعه‌هایی از E باشد که زیرمجموعه عضوی از $\mathcal{B}$ هستند، در اینصورت $(E, \mathcal{I})$ یک متروید است که $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های آن است.

برهان : به منبع [11] قضیه ۳.۲.۱ مراجعه شود. ■

نتیجه ۱۷.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد در این صورت $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک متروید مثل M است اگر و تنها اگر در دو شرط (B۱) و (B۲) صدق کند.

تذکر ۱۸.۲.۱ $\mathcal{B}(M)$ گردایه زیرمجموعه‌های ماکسیمال $E(M)$ است که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}(M)$ نیستند. $\mathcal{C}(M)$ گرادیه تمامی زیرمجموعه‌های مینیمال $E(M)$ است که زیرمجموعه هیچ عضوی از $\mathcal{B}(M)$ نیستند. لذا با شناسایی هرکدام از گردایه‌های $\mathcal{I}(M)$، $\mathcal{C}(M)$ و $\mathcal{B}(M)$، بقیه مشخص می‌شوند. بنابراین هر متروید با مجموعه زمینه خود و یکی از گردایه‌های $\mathcal{I}(M)$، $\mathcal{C}(M)$ و یا $\mathcal{B}(M)$ قابل شناسایی است.

تذکر ۱۹.۲.۱ فرض کنید $B \in \mathcal{B}$ و $e \in E(M) - B$، در اینصورت $B \cup \{e\}$ شامل دوری یکتا مثل $C(e, B)$ است که $e \in C(e, B)$. $C(e, B)$ را دور اصلی[۳۹] e وابسته به پایه B گویند.

تعریف ۲۰.۲.۱ دو متروید $M_۱ = (E_۱, \mathcal{I}_۱)$ و $M_۲ = (E_۲, \mathcal{I}_۲)$ را یکریخت[۴۰] گویند و می‌نویسند $M_۱ \cong M_۲$ اگر تناظر ۱−۱، $\psi : E(M_۱) \to E(M_۲)$ موجود باشد به طوریکه برای هر $X \subseteq E(M_۱)$، $\psi(X)$ یک مجموعه مستقل $M_۲$ است اگر و تنها اگر X یک مجموعه مستقل $M_۱$ باشد.

گزاره ۲۱.۲.۱ فرض کنید E مجموعه یال‌های گراف G و $\mathcal{C}$ گردایه تمام دورهای G باشد، در این صورت $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک متروید روی مجموعه E است. این متروید را متروید دوری[۴۱] گراف G گوییم و آن را با $M(G)$ نمایش می‌دهند.

برهان: به منبع [11] قضیه ۷.۱.۱ مراجعه شود. ■

تعریف ۲۲.۲.۱ متروید M را گرافیک[۴۲] گویند هرگاه گرافی وجود داشته باشد که متروید دوری این گراف یکریخت با M باشد.

گزاره ۲۳.۲.۱ فرض کنید M یک متروید گرافیک باشد، در این صورت $M \cong M(G)$ که در آن G یک گراف همبند می‌باشد. یعنی گراف همبندی مثل G وجود دارد که متروید دوری تولید شده توسط G یکریخت با M باشد.

---

[۳۹] Fundamental Circuit
[۴۰] Isomorphic
[۴۱] Cycle Matroid
[۴۲] Graphic

برهان : به منبع [11] گزاره ۸.۲.۱ مراجعه شود. ∎

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و $E \subseteqq X$ و $X \subseteqq E$ باشد و $\mathcal{I}\big|_X = \{I \subseteqq X \big| I \in \mathcal{I}\}$، می‌توان دید که $(X, \mathcal{I}\big|_X)$ یک متروید است. این متروید را متروید تحدید[۴۳] M به X یا حذف[۴۴] $E - X$ از M گویند و به ترتیب با نمادهای $M|_X$ یا $M\backslash(E - X)$ نشان می‌دهند.

گردایه دورهای این متروید به صورت زیر است:

$$\mathcal{C}(M\big|_X) = \Big\{C \in \mathcal{C} \;\Big|\; C \subseteqq X\Big\}$$

تعریف ۲۵.۲.۱ چون $M|_X$ یک متروید است، پس پایه‌های آن دارای تعداد مساوی عضو هستند رتبه[۴۵] X در M را تعداد اعضای یک پایه $M\big|_X$ تعریف می‌کنند. در حقیقت $r(X)$ تعداد اعضای زیرمجموعه مستقل ماکسیمال X در M است.

$$r(X) = \max\Big\{|Y| \;\Big|\; Y \subseteqq X \;\;,\;\; Y \in \mathcal{I}(M)\Big\}$$

در حقیقت $r(X)$ تابعی است که به هر عضو ۲^E یک عدد صحیح نامنفی را نسبت می‌دهد:

$$r : \text{۲}^E \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\text{۰}\}$$

رتبه متروید M عبارتست از $r(E(M))$ که با $r(M)$ نمایش می‌دهند یعنی $r(M)$ برابر تعداد اعضای یک پایه M است.

بدیهی است که برای هر مجموعه مستقل $X \subseteqq E$، $r(X) = |X|$.

---

[۴۳] Restriction

[۴۴] Deletion

[۴۵] Rank

گزاره ۲۶.۲.۱ تابع رتبه ماترویید $M = (E, \mathcal{I})$ دارای خواص زیر است:

(R۱) اگر $X \subseteqq E$، آنگاه $0 \leqq r(X) \leqq |X|$

(R۲) اگر $X \subseteqq Y \subseteqq E$، آنگاه $r(X) \leqq r(Y)$.

(R۳) این خاصیت به صورت یک لم بیان می‌شود:

لم ۲۷.۲.۱. اگر X و Y دو زیرمجموعه E باشند، آنگاه

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leqq r(X) + r(Y)$$

برهان : به منبع [11] گزاره ۱.۳.۱ مراجعه شود. ■

قضیه ۲۸.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $r : 2^E \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ تابعی است که در شرایط (R۱) و (R۲) و (R۳) صدق می‌کند. فرض کنید $\mathcal{I}$ گردایه آن زیرمجموعه‌های $X \subseteqq E$ باشد که $r(X) = |X|$. در این صورت $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترویید با تابع رتبه r است.

برهان : به منبع [11] قضیه ۲.۳.۱ مراجعه شود. ■

نتیجه ۲۹.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه باشد. تابع $r : 2^E \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ تابع رتبه یک ماترویید روی E است اگر و تنها اگر در شرایط (R۱) و (R۲) و (R۳) صدق کند.

تعریف ۳۰.۲.۱ فرض کنید M یک ماترویید روی مجموعه زمینه $E(M)$ با تابع رتبه r باشد. تابع $cl : 2^E \to 2^E$ را برای هر $X \subseteqq E$ با ضابطه

$cl(X) = \left\{x \in E \;\middle|\; r(X \cup x) = r(X)\right\}$ تعریف می‌کنند. این تابع را عملگر بستار[۴۶] M گویند.

لم ۳۱.۲.۱ عملگر بستار متروید M روی مجموعه E دارای خواص زیر است:

(cl۱) اگر $X \subseteqq E$، آنگاه $X \subseteqq cl(X)$

(cl۲) اگر $X \subseteqq Y \subseteqq E$، آنگاه $cl(X) \subseteqq cl(Y)$

(cl۳) اگر $X \subseteqq E$، آنگاه $cl(cl(X)) = cl(X)$

(cl۴) اگر $X \subseteqq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$، آنگاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان : به منبع [11] لم ۲.۴.۱ مراجعه شود. ■

قضیه ۳۲.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $cl : ۲^E \to ۲^E$ تابعی است که در خواص (cl۱) و (cl۲) و (cl۳) و (cl۴) صدق می‌کند و فرض کنید $\mathcal{I} = \left\{X \subseteqq E \;\middle|\; x \notin cl(X - x) \;\; \forall x \in X\right\}$. در اینصورت $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید با عملگر بستار cl است.

برهان : به منبع [11] قضیه ۴.۴.۱ مراجعه شود. ■

نتیجه ۳۳.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه باشد. در این صورت $CL : ۲^E \to ۲^E$ عملگر بستار یک متروید روی E است اگر و تنها اگر در خواص (cl۱) , (cl۲) , (cl۳) و (cl۴) صدق کند.

تعریف ۳۴.۲.۱ فرض کنید M یک متروید باشد و $X \subseteqq E(M)$، در اینصورت $cl(X)$ را بستار[۴۷] X در M گویند و آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهند.

---

[۴۶] Closer Operatore

[۴۷] Closur

تعریف ۳۵.۲.۱ اگر $cl(X) = X$، آنگاه X را یک مجموعه بسته یا یک فلت[۴۸] گویند. یک ابرصفحه[۴۹] از M یک مجموعه بسته M از رتبه $r(M) - 1$ است. زیرمجموعه X از $E(M)$ را یک مجموعه فراگیر[۵۰] گویند هرگاه $cl(X) = E(M)$.

تذکر ۳۶.۲.۱ اگر $M = M(G)$، آنگاه $X \subseteq E(G)$ یک فلت است اگر و تنها اگر G شامل دوری مثل C نباشد که X شامل همه یالهای C به جز یک یال آن باشد.

فرض کنید G یک گراف باشد در این صورت H یک ابرصفحه در $M(G)$ است اگر و تنها اگر $E(G) - H$ یک مجموعه مینیمال از یال‌ها باشد که حذف آنها از G تعداد مولفه‌های همبند G را افزایش دهد.

تعریف ۳۷.۲.۱ فرض کنید M یک متروید و X زیرمجموعه‌ای از $E(M)$ باشد که یک دور و نیز یک ابر صفحه M است. فرض کنید $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{X\}$، در اینصورت $\mathcal{B}'$ گردایه پایه‌های یک متروید مثل M' روی E است بعلاوه:

$$\mathcal{C}(M') = (\mathcal{C}(M) - \{X\}) \cup \{X \cup e \mid e \in E(M) - X\}$$

در اینحالت گویند M' از واهلش[۵۱] دور– ابرصفحه X از متروید M حاصل شده است.

لم ۳۸.۲.۱ مجموعه $\mathcal{B}$ از پایه‌های یک متروید در خاصیت زیر صدق می‌کند:

(B۲)* اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_2 - B_1$، آنگاه $y \in B_1 - B_2$ وجود دارد به طوریکه $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}$.

---

[۴۸] Flat
[۴۹] Hyperplane
[۵۰] Spanning set
[۵۱] Relaxing