پیشگفتار

امروزه استنباط بر اساس نمونه‌های سانسور شده توسط پژوهش‌گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از سانسورهای معروف، سانسور فزاینده نوع دو می‌باشد که با توجه به اهمیت کاربرد آن، تحقیقات زیادی بر اساس آن انجام شده است. یکی از مسائل مهم در مباحث سانسور فزاینده نوع دو چگونگی انتخاب مدل می‌باشد. برای این منظور معیارهای مختلفی از طرف پژوهش‌گران معرفی شده است، از جمله این معیارها می‌توان به اطلاع فیشر، کمترین مربعات خطا، زمان و هزینه آزمایش اشاره نمود. هدف اصلی این رساله تعیین طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو می‌باشد که در اینجا فقط دو معیار اطلاع فیشر و کمترین مربعات خطا را در نظر می‌گیریم. این رساله مشتمل بر هفت فصل می‌باشد.

- در فصل اول، بعد از معرفی آماره‌های مرتب و انواع سانسور، سانسور فزاینده نوع دو را که هدف اصلی این پایان نامه است، مورد بررسی قرار می‌دهیم، برای این منظور تاریخچه، حالت‌های خاص و برتری این روش از سانسور را نسبت به سایر سانسورها، بیان می‌کنیم و بعضی از کارهای انجام شده در این زمینه را معرفی می‌نمائیم.

- فصل دوم اختصاص به توابع چگالی احتمال توأم و حاشیه‌ای آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو دارد. همچنین برخی از ویژگی‌های آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو را مورد بررسی قرار می‌دهیم و چند رابطه بازگشتی برای توابع چگالی احتمال آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو را اثبات می‌کنیم.

- در فصل سوم، برآوردگرهای خطی نااریب و درستنمایی ماکسیمم بر حسب آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو را برای پارامترهای جامعه در خانواده‌های مقیاس و مکان ـمقیاس می‌یابیم.

- در فصل چهارم، به محاسبه اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو

می‌پردازیم.

- در فصل پنجم، با کمک روابط بدست آمده در فصل چهارم، طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو را بر اساس میزان اطلاع فیشر می‌یابیم و نشان می‌دهیم برای بعضی از توزیع‌ها بر مبنای این معیار نمی‌توان طرح بهینه یافت.
- در فصل ششم، با کمک محاسبات عددی، اطلاع فیشر را برای چند توزیع آماری محاسبه نموده و طرح بهینه را در این توزیع‌ها تعیین می‌کنیم. همچنین در این فصل زمان مورد انتظار آزمایش را برای این توزیع‌ها بررسی و آن را با اطلاع فیشر مقایسه می‌کنیم.
- در فصل هفتم، بهینه‌سازی طرح سانسور را بر اساس معیار کمترین مربعات خطا مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تحقیقات انجام شده در این زمینه منجر به ارائه مقاله‌ای مستخرج از پایان‌نامه تحت عنوان

" طرح بهینه سانسور فزاینده در توزیع بر نوع ۱۲ بر اساس میزان اطلاع فیشر "

در دهمین کنفرانس آمار ایران در مرداد ماه سال ۱۳۸۹ که در دانشگاه تبریز برگزار شد، شده است.

حال که تألیف این رساله به پایان رسیده است، بر خود لازم می‌دانم سپاس خالصانه و صمیمانه خود را به استاد عزیزم جناب آقای دکتر احمدی که با رهنمودهای ارزنده‌شان مرا یاری نموده‌اند، تقدیم کنم. از جناب آقای دکتر رزمخواه که سمت مشاوره این پایان نامه را به عهده داشته‌اند، نیز کمال تقدیر و تشکر را دارم. از جناب آقای دکتر محتشمی و سرکار خانم دکتر حبیبی راد که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نموده‌اند نیز سپاسگزارم. همچنین شایسته است مراتب قدردانی خود را از پدر و مادرم که همواره مشوق و همراه بنده بوده‌اند، اعلام نمایم. در انتها از تمام اعضای هیأت علمی گروه آمار، مدیریت دانشکده، مسئولین و کارکنان آزمایشگاه رایانه، کتابخانه، آموزش، بخش تکثیر، دوستان و همه کسانی که در طی این دوره مرا یاری رسانده‌اند، تشکر می‌نمایم.

الهام بصیری

شهریور ۱۳۸۹

نمادگذاری

متغیر تصادفی i ام	X_i
مقدار مشاهده i ام	x_i
rامین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم n	$X_{r:n}$
r امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو از راست با m شکست در نمونه‌ای به حجم n	$X_{r:m:n}$
r امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو از راست با m شکست در نمونه‌ای به حجم n با طرح سانسور $\tilde{R}$	$X^{\tilde{R}}_{r:m:n}$
i امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو با m شکست در نمونه‌ای به حجم n در حالتیکه زمان r شکست اول ثبت نشده باشد	${}_rX_{i:m:n}$
r امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو از چپ با m شکست در نمونه‌ای به حجم n با طرح سانسور $\tilde{R}$	${}^{\tilde{R}}Z_{r:m:n}$
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X	$f_\theta(x)$
تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X	$F_\theta(x)$
تابع چگالی احتمال rامین آماره مرتب	$f_{X_{r:n};\theta}(x)$
تابع چگالی احتمال r امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو	$f_{X_{r:m:n};\theta}(x)$
تابع چگالی احتمال r امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو با طرح سانسور $\tilde{R}$	$f^{\tilde{R}}_{X_{r:m:n};\theta}(x)$
تابع چگالی احتمال توام rامین و s امین آماره مرتب	$f_{X_{r:n},X_{s:n};\theta}(x,y)$
تابع چگالی احتمال توام rامین و s امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو	$f_{X_{r:m:n},X_{s:m:n};\theta}(x,y)$
تابع چگالی احتمال توام آماره‌های مرتب سانسور نوع دو	$f_{X_{1:n},\cdots,X_{m:n};\theta}(x_1,\cdots,x_n)$
تابع چگالی احتمال توام آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو	$f_{X_{1:m:n},\cdots,X_{m:m:n};\theta}(x_1,\cdots,x_m)$
تابع نرخ خطر متغیر تصادفی X	$\lambda_\theta(x)$
تابع بقای متغیر تصادفی X	$\overline{F}_\theta(x)$
تابع درستنمایی θ	$L(\theta)$
امید ریاضی	$E(\cdot)$
واریانس	$Var(\cdot)$
کواریانس	$Cov(\cdot)$

انتخاب k عضو از n عضو	$\binom{n}{k}$
X هم توزیع با Y	$X \overset{d}{=} Y$
مستقل و هم توزیع	$\overset{iid}{\sim}$
توزیع نمایی با پارامتر θ	$E(\theta)$
بهترین برآوردگر خطی نااریب برای θ	θ^*
برآوردگر درستنمایی ماکسیمم برای θ	$\hat{\theta}$
به طور یکنواخت همگرا	$\xrightarrow{u.c}$
میزان اطلاع فیشر در X در خصوص θ	$I(X;\theta)$
میزان اطلاع فیشر در آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو در خصوص θ	$I(X_{1:m:n},\cdots,X_{m:m:n};\theta)$
میزان اطلاع فیشر در آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو در خصوص θ در حالتیکه $R_k = n-m$	$I_k(X_{1:m:n},\cdots,X_{m:m:n};\theta)$
X به طور تصادفی کوچکتر از Y	$X <_{s.t} Y$
ثابت اویلر	γ
میزان اطلاع فیشر در سانسور فزاینده نوع دو یک مرحله‌ای	I_{OSP}
میزان اطلاع فیشر در سانسور نوع دو از راست	I_{RC}
میزان اطلاع فیشر در نمونه تصادفی ساده به حجم m	I_{SRS}
زمان مورد انتظار آزمایش در سانسور فزاینده نوع دو یک مرحله‌ای	E_{OSP}
زمان مورد انتظار آزمایش در سانسور نوع دو از راست	E_{RC}
زمان مورد انتظار آزمایش در نمونه تصادفی ساده به حجم m	E_{SRS}
مرحله بهینه سانسور	k_{opt}
علامت	$sgn(\cdot)$
ماتریس $\underline{A}$ در ترتیب لاونر کوچکتر از ماتریس $\underline{B}$	$\underline{A} \preceq_L \underline{B}$
دترمینان	$det(\cdot)$
اثر	$tr(\cdot)$

فهرست مندرجات

۱ مقدمات ۱

۱—۱ مقدّمه ۲

۱—۲ آماره‌های مرتب ۲

۱—۲—۱ اشاره‌ای به کاربرد آماره‌های مرتب ۲

۱—۳ سانسور ۴

۱—۳—۱ سانسور نوع I ۵

۱—۳—۲ سانسور نوع II ۵

۱—۴ سانسور فزاینده ٦

۱—۴—۱ تاریخچه سانسور فزاینده ٦

۱—۴—۲ سانسور فزاینده نوع I ۷

۱—۴—۳ سانسور فزاینده نوع II ۸

۱—۴—۴ حالت‌های خاص ۸

۱–۴–۵ مزایای سانسور فزاینده ۹
۱–۴–۶ کارهای انجام شده ۹

۲ خواص توزیعی سانسور فزاینده نوع II ۱۲

۲–۱ مقدّمه ۱۳

۲–۲ آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II ۱۳
۲–۲–۱ تابع چگالی احتمال توأم آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II . . ۱۴
۲–۲–۲ تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای و دوتایی ۱۶

۲–۳ برخی از خواص آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II ۱۸
۲–۳–۱ خاصیت مارکفی ۱۸
۲–۳–۲ آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II در جوامع متقارن ۲۳
۲–۳–۳ تفاضل‌ها در توزیع نمایی ۲۵
۲–۳–۴ نسبت‌ها در توزیع پارتو ۳۰

۲–۴ روابط بازگشتی بین توابع چگالی احتمال ۳۲

۳ برآورد پارامترهای جامعه بر اساس سانسور فزاینده نوع II ۳۹

۳–۱ مقدّمه ۴۰

۳–۲ لم پایه ۴۰

۳–۳ برآورد خطی برای خانواده مقیاس ۴۱
۳–۳–۱ توزیع نمایی ۴۲
۳–۳–۲ توزیع پارتو ۴۸

۳–۴ برآورد خطی برای خانواده مکان ـمقیاس ۵۲
۳–۴–۱ توزیع نمایی ۵۳

۳–۵ برآورد درستنمایی ماکسیمم ۵۹
۳–۵–۱ توزیع نمایی یک پارامتری ۶۰
۳–۵–۲ توزیع نمایی دو پارامتری ۶۱
۳–۵–۳ توزیع پارتو ۶۴

۴ اطلاع فیشر در آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II ۶۶

۴–۱ مقدّمه ۶۷

۴–۲ نتایج کمکی ۶۷

۴–۳ اطلاع فیشر ۶۸
۴–۳–۱ اطلاع فیشر در سانسور فزاینده نوع II ۷۴

۵ طرح بهینه براساس معیار اطلاع فیشر ۸۳

۵–۱ مقدّمه ۸۴

۵–۲ لم‌های تکنیکی ۸۴

۵–۳ پایایی اطلاع فیشر تحت سانسور ۸۶

۵–۴ معیارهای متداول برای طرح‌های بهینه سانسور ۸۷
۵–۴–۱ توزیع لجستیک (پارامتر مکان) ۹۴
۵–۴–۲ توزیع نرمال (پارامتر مکان) ۹۶

۵–۵ طرح بهینه در توزیع‌های بریده شده ۹۸
۵–۵–۱ توزیع مقادیر فرین بریده شده ۹۸
۵–۵–۲ توزیع لجستیک بریده شده ۹۹

۶ تعیین طرح بهینه بر اساس معیار اطلاع فیشر با استفاده از محاسبات عددی ۱۰۰

۶–۱ مقدّمه ۱۰۱

۶–۲ نتایج مقدماتی ۱۰۱

۶–۳ محاسبات عددی و تخمین یک مرحله ۱۰۴
۶–۳–۱ توزیع مقادیر فرین ۱۰۴
۶–۳–۲ توزیع بر نوع ۱۲ . . . . . ۱۱۳
۶–۳–۳ توزیع لجستیک ۱۱۶

۶–۴ زمان مورد انتظار آزمایش ۱۱۹

٦—٥ طرح‌های سانسور یک مرحله‌ای بهینه با استفاده از نمودار ۱۲۴
٦—٥—١ توزیع مقادیر فرین ۱۲٦
٦—٥—٢ توزیع بر نوع ۱۲ . . . . . ۱۲۷
٦—٥—٣ توزیع لجستیک ۱۲۹

۷ طرح بهینه بر اساس معیار کمترین مربعات خطا ۱۳۱

۷—۱ مقدّمه ۱۳۲

۷—۲ لم پایه ۱۳۲

۷—۳ معرفی خانواده توزیع‌ها ۱۳۳

۷—۴ حالت یک پارامتری ۱۳۵

۷—۵ حالت دو پارامتری ۱۳۸
۷—۵—۱ طرح بهینه بر اساس معیار ϕ_p ۱۴۰
۷—۵—۲ یکنوایی اثر و دترمینان ۱۵۳
۷—۵—۳ مقایسه نموداری طرح‌های سانسور ۱۵۸

۸ نتیجه گیری و آینده تحقیق ۱٦۲

فصل ۱

مقدمات

۱–۱ مقدّمه

۱–۲ آماره‌های مرتب

۱–۲–۱ اشاره‌ای به کاربرد آماره‌های مرتب

۱–۳ سانسور

۱–۳–۱ سانسور نوع I

۱–۳–۲ سانسور نوع II

۱–۴ سانسور فزاینده

۱–۴–۱ تاریخچه سانسور فزاینده

۱–۴–۲ سانسور فزاینده نوع I

۱–۴–۳ سانسور فزاینده نوع II

۱–۴–۴ حالت‌های خاص

۱–۴–۵ مزایای سانسور فزاینده

۱–۴–٦ کارهای انجام شده

۱ — ۱ مقدّمه

با توجه به اینکه موضوع این پایان نامه مطالعه طرح‌های بهینه در سانسور فزاینده نوع II است، در این فصل، ابتدا آماره‌های مرتب معمولی را معرفی نموده و مختصری از کاربردهای این آماره‌ها در آمار ارائه می‌شود. در یک آزمون طول عمر ممکن است زمان‌های شکست تمام واحدهایی که مورد آزمایش قرار گرفته‌اند، مشاهده نشود، بنابراین در این حالت یک نمونه سانسور شده داریم. در این خصوص ضمن معرفی مفاهیم سانسورها و انواع آن‌ها، چند نوع خاص را بیشتر بررسی می‌کنیم. سپس تعمیمی از سانسورهای معرفی شده را که سانسور فزاینده نامیده می‌شود و هدف اصلی پایان نامه است، به طور کامل‌تری مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، به تاریخچه، حالت‌های خاص و برتری این روش از سانسور نسبت به سایر سانسورها، می‌پردازیم. در نهایت، بعضی از کارهای انجام شده در این زمینه را معرفی می‌کنیم.

۱ — ۲ آماره‌های مرتب

فرض کنید X_1، ...، X_n، نمونه‌ای تصادفی از جامعه مورد بررسی باشد. اگر آن‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم و مقادیر مرتب شده را به صورت $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$، نشان دهیم، در این صورت $X_{j:n}$، $(j = 1, \ldots, n)$ را jامین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم n گویند. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آماره مرتب، یعنی $X_{1:n}$ و $X_{n:n}$ به مقادیر فرین معروفند و در مطالعات آماری بیشتر مورد توجه هستند.

۱ — ۲ — ۱ اشاره‌ای به کاربرد آماره‌های مرتب

آماره‌های مرتب در قسمت‌های مختلف توصیفی و استنباطی علم آمار، دارای کاربرد می‌باشند. یکی از کاربرد این آماره‌ها در آمار توصیفی، کشف مشاهدات پرت — داده‌های خیلی کوچک یا خیلی بزرگ — در یک مجموعه از داده‌های همتوزیع می‌باشد.

همان گونه که می‌دانیم یکی از ضعف‌های استفاده از میانگین به عنوان معیاری جهت تمرکز داده‌ها، میزان حساسیت بالای آن نسبت به داده‌های دورافتاده و تغییرات الگو است، در عوض میانه یا میانگین اصلاح شده، که این معیارها نیز جزء معیارهای تمرکز می‌باشند، نسبت به تغییرات الگو از حساسیت کمتری برخوردار هستند و در محاسبه آن‌ها، آماره‌های مرتب نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند.

یکی دیگر از کاربردهای آماره‌های مرتب، مباحث طول عمر است. در قابلیت اعتماد $X_{1:n}$ طول عمر یک سیستم سری با n مؤلفه است. همچنین $X_{n:n}$، طول عمر یک سیستم موازی با n مؤلفه است.

در مباحث نمونه‌گیری دنباله‌ای، از دامنه مشاهدات می‌توان در قاعده توقف[1] استفاده کرد، که برای محاسبه آن از مقادیر فرین استفاده می‌شود.

در آمار استنباطی نیز می‌توان به مثال‌های زیر در خصوص کاربرد آماره‌های مرتب اشاره نمود.

۱ — در محاسبه تابع توزیع تجربی نیازمند استفاده از آماره‌های مرتب هستیم و از آنجا که در آزمون‌های نیکویی برازش، اغلب تمرکز روی تغییرات بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع فرضی است، آماره‌های مرتب در این آزمون‌ها نقش اساسی دارند.

۲ — در موضوعات کنترل کیفیت برای بررسی در کنترل بودن تولیدات، اغلب از نمودار میانگین و دامنه تغییرات و یا از نمودار میانه و دامنه تغییرات استفاده می‌شود که برای محاسبه میانه و دامنه تغییرات ناچار به استفاده از آماره‌های مرتب می‌باشیم.

۳ — آماره‌های مرتب، در بسیاری از موارد به عنوان آماره‌های بسنده معرفی می‌شوند و برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس، فواصل اطمینان و پرتوان‌ترین آزمون برای پارامترهای مجهول را فراهم می‌کنند.

۴ — در آزمایشات طول عمر، اغلب به دلیل فاکتورهایی از قبیل زمان یا اعتبار مالی، امکان شرکت دادن تمام واحدها در آزمایش وجود ندارد. بنابراین مشاهده طول عمر تمام واحدها امکان‌پذیر نیست، به همین دلیل از روش‌های سانسور استفاده می‌کنیم و آماره‌های مرتب نقش مهمی در سانسورها دارند.

برای جزئیات بیشتر در مورد خواص آماره‌های مرتب و کاربردهای آن‌ها، می‌توان به دیوید و ناگاراجا[2]

[1] Stopping rule

[2] David and Nagaraja

(۲۰۰۳) یا آرنولد[۳] و همکاران (۱۹۹۲) مراجعه نمود.
در بخش بعد، به معرفی سانسور و انواع آن می‌پردازیم.

۱—۳ سانسور

در آزمون‌های طول عمر، آزمایشات کلینیکی، مطالعات تأثیر دوز سم‌ها، تحقیقات زیست شناسی، آنالیز بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار با نمونه‌هایی مواجه هستیم که همه مشاهدات نمونه ثبت نشده‌اند، یا همه واحدهای نمونه به نتیجه نرسیده‌اند. این محدویت ممکن است به صورت اختیاری توسط مشاهده‌گر (آمارگر) اعمال شود یا ماهیت آزمایش طوری باشد که خود به خود محدودیتی را در مشاهدات به وجود آورد. بعضی از محدودیت‌ها عبارتند از :

— فرصت کم برای اعلام نتایج
— طولانی شدن مدت آزمایش
— عدم دسترسی به همه واحدها یا مأیوس شدن از نتیجه دادن همه واحدها.

واحدهایی را که به هر دلیلی در نمونه مشاهده نمی‌شوند، اصطلاحاً می‌گوییم سانسور شده‌اند. سانسور معمولا به صورت‌های مختلفی اعمال می‌شود . بعضی از انواع سانسورهای معروف عبارتند از :

— سانسور نوع I
— سانسور نوع II
— سانسور فزاینده
— سانسور تصادفی
— سانسور فاصله‌ای
— سانسور هیبرید

برای جزئیات بیشتر در مورد انواع سانسورها و کاربرد آن‌ها، می‌توان به آرنولد و همکاران (۱۹۹۲)،

[۳] Arnold

لاولس [۴](۲۰۰۳) و همچنین به نلسن [۵](۲۰۰۴) مراجعه نمود.

۱–۳–۱ سانسور نوع I

فرض کنید یک آزمون طول عمر با n واحد، باید در زمان مشخص T به پایان برسد، در این صورت همه واحدها در زمان $t = 0$ فعال می‌شوند و شروع به کار می‌کنند و در زمان T، آزمایش به پایان می‌رسد، به این روش از سانسور، سانسور نوع I یک مرحله‌ای از راست گویند.
در این روش از سانسور، تعداد شکست‌ها یک متغیر تصادفی است، در واقع تعداد شکست‌ها دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $p = F(T)$ است، که $F(\cdot)$ تابع توزیع واحدهای تحت آزمایش می‌باشد.
سانسور نوع I یک مرحله‌ای از راست، می‌تواند به حالت سانسور نوع I دو مرحله‌ای (از راست و چپ) تعمیم داده شود. این حالت زمانی رخ می‌دهد که شکست‌های اول به سرعت رخ دهند بطوریکه نتوان زمان دقیق آن‌ها را ثبت نمود، بنابراین مشاهدات از زمان ثابت T_L شروع می‌شوند و در زمان از قبل تعیین شده T $(T > T_L)$، آزمایش به پایان می‌رسد.

۱–۳–۲ سانسور نوع II

اگر در آزمایشی با n واحد بخواهیم دقیقاً m $(m < n)$ شکست را مشاهده کنیم و بعد از مشاهده mامین شکست آزمایش را متوقف کنیم، در این صورت طول عمر $(n - m)$ واحد باقیمانده سانسور می‌شوند، به این روش از سانسور، سانسور نوع II یک مرحله‌ای از راست گویند.
در این روش از سانسور زمان لازم برای رسیدن به mامین شکست یک متغیر تصادفی است. در حقیقت، زمان مشاهده mامین شکست، برابر با توزیع mامین آماره مرتب معمولی است. این روش از سانسور نیز می‌تواند به سانسور نوع II دو مرحله‌ای (از راست و چپ)، تعمیم داده شود، این حالت زمانی رخ می‌دهد که زمان‌های r شکست اول ثبت نشده باشند و مشاهدات از زمان $(r + 1)$امین

[۴] Lawless
[۵] Nelson

شکست شروع شوند و در زمان مشاهده mامین شکست، آزمایش به اتمام می‌رسد.
برای جزئیات بیشتر در مورد سانسورهای نوع I و II، می‌توان به کوهن [٦](۱۹۹۱)، بالاکریشنان و کوهن (۱۹۹۱)، بین و انگلهارت [۷](۱۹۹۱) و همچنین هارتر و بالاکریشنان [۸] (۱۹۹٦) مراجعه نمود.

۱—۴ سانسور فزاینده

در آزمون‌های طول عمر مواردی پیش می‌آید که واحدها قبل از شکست، از آزمایش حذف می‌شوند. این حذف شدن، ممکن است به طور غیر عمدی باشد یا از قبل طراحی شده باشد. اما اکثر اوقات، حذف واحدها از آزمایش، به دلایلی مانند کمبود هزینه و زمان، نبودن امکانات لازم و ... به طور عمدی اتفاق می‌افتد. در این جا ما حالتی را در نظر می‌گیریم که واحدها به طور عمدی از آزمایش حذف می‌شوند.
در سانسورهای نوع I و II که در بخش قبل معرفی شدند، این امکان وجود داشت که واحدها را بتوان در انتهای آزمایش حذف کرد، که این یک ضعف برای این سانسورها به حساب می‌آید. در این بخش، روش دیگری از سانسور را معرفی می‌کنیم که تعمیمی از سانسورهای نوع I و II می‌باشد و به سانسور فزاینده معروف است. ابتدا انگیزه تعریف و تاریخچه آن و در ادامه، مفهوم دو نوع از این سانسور را ارائه می‌دهیم.

۱—۴—۱ تاریخچه سانسور فزاینده

موضوعات مربوط به سانسور فزاینده به سال‌های ۱۹۵۵ تا ۱۹٦٦ برمی‌گردد. به منظور نگاه کلی به تاریخچه آن، در سال ۱۹٦٦ یک سؤال به صورت زیر مطرح شد:
" در آزمون‌های طول عمر، ممکن است واحدهایی به دلایلی کاملاً مستقل از روند طبیعی شکست، از کار بیافتند. به عنوان مثال، فرض کنید تعدادی لامپ تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته باشند. یکی

[٦] Cohen
[۷] Bain and Englhardt
[۸] Harter and Balakrishnan

از لامپ‌ها ممکن است بعد از شروع آزمایش به طور تصادفی شکسته شود در حالیکه همه لامپ‌ها قبلاً سوخته‌اند. اگر تمام لامپ‌ها به جز یکی سوخته باشند و آخرین لامپ به طور تصادفی بشکند، پارامترهای جامعه به آسانی با طرح سانسور از راست، برآورد می‌شوند. شکست لامپی که دارای بیشترین طول عمر در نمونه است، این مسئله را بوجود می‌آورد که چگونه از اطلاعات لامپی که شکسته شده، استفاده کنیم. چه روشی در این جا توصیه می‌شود؟"

جواب این سؤال توسط کوهن داده شد، به این صورت که در این مواقع می‌توان از روش سانسور فزاینده استفاده کرد. در سال ۱۹۶۳ کوهن یک مقاله با عنوان سانسور فزاینده ارائه داد. اما، او اولین کسی نبود که به موضوع سانسور فزاینده پرداخت. هرد[۹] در سال ۱۹۵۶ رساله دکتری خودش را با عنوان برآورد پارامترهای جامعه با استفاده از نمونه سانسور شده چندگانه نوشت. توجه داشته باشید که اصطلاح سانسور چندگانه به جای سانسور فزاینده به کار برده شد. بنابراین، هرد اولین کسی بود که موضوع سانسور فزاینده را بررسی کرد. با وجود مطالب گفته شده، حذف واحدها از آزمایش، قبل از به پایان رسیدن آزمایش، مسئله‌ای است که باعث به وجود آمدن موضوع سانسور فزاینده شد. حال این سؤال پیش می‌آید که دقیقاً سانسور فزاینده چیست؟

۱—۴—۲ سانسور فزاینده نوع I

با تعمیم سانسور نوع I یک مرحله‌ای از راست، روش جدیدی از سانسور را داریم که به عنوان سانسور فزاینده نوع I شناخته می‌شود. در این روش از سانسور، واحدها در زمان $t = ۰$ شروع به کار می‌کنند و در زمان‌های ثابت $T_۱$، ...، $T_{m-۱}$، به ترتیب $R_۱$، ...، $R_{m-۱}$ واحد از آزمایش خارج می‌شوند و در زمان ثابت T_m، R_m واحد باقیمانده از آزمایش خارج می‌شوند و آزمایش به پایان می‌رسد. در این جا، تعداد شکست‌ها متغیر تصادفی و T_iها مقادیری ثابت می‌باشند.

این روش از سانسور نیز می‌تواند تعمیم پیدا کند به حالتی که شکست‌ها از زمان T_L $(L < m)$ مشاهده شوند، در این زمان تعداد R_L واحد از آزمایش خارج می‌شوند و بالاخره در زمان T_m با حذف R_m واحد باقیمانده، آزمایش به پایان می‌رسد.

[۹] Herd

۱–۴–۳ سانسور فزاینده نوع II

با تعمیم سانسور نوع II یک مرحله‌ای از راست، می‌توان به یک روش مشابه دست یافت که سانسور فزاینده نوع II از راست نامیده می‌شود. تحت این روش از سانسور، n واحد در زمان صفر مورد آزمایش قرار می‌گیرند، بلافاصله بعد از مشاهده اولین شکست تعداد R_1 واحد از $n-1$ واحد باقیمانده به طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند، بعد از مشاهده دومین شکست تعداد R_2 واحد از $n-R_1-2$ واحد باقیمانده به طور تصادفی حذف می‌شوند و در نهایت در زمان مشاهده mامین شکست تعداد R_m واحد باقیمانده از آزمایش حذف می‌شوند طوری که $R_m = n - \sum_{i=1}^{m-1} R_i - m$.

در این روش از سانسور، R_iها مقادیری ثابت و از قبل تعیین شده می‌باشند و زمان‌های شکست، متغیرهای تصادفی هستند، که آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II از راست نامیده می‌شوند. بنابراین، طرح سانسور فزاینده نوع دو بر اساس m و بردار $\tilde{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ مشخص می‌شود.

در سانسور فزاینده نوع II از راست، ممکن است شکست‌ها از زمان $(r+1)$امین شکست مشاهده شوند، یعنی قبلاً r واحد از کار افتاده باشند ولی زمان آن‌ها ثبت نشده باشد. بنابراین، در زمان مشاهده $(r+1)$امین شکست تعداد R_{r+1} واحد از آزمایش خارج می‌شوند و در زمان مشاهده $(r+2)$امین شکست تعداد R_{r+2} واحد به طور تصادفی حذف می‌شوند و بالاخره در زمان مشاهده mامین شکست تعداد R_m واحد باقیمانده از آزمایش حذف می‌شوند که در این حالت، $R_m = n - \sum_{i=r+1}^{m-1} R_i - m$.

۱–۴–۴ حالت‌های خاص

در سانسور فزاینده نوع II از راست، اگر سانسور فقط در یک مرحله، مثلاً مرحله kام $(1 \le k \le m)$، اتفاق بیافتد، یعنی $R_k = n - m$، آنگاه سانسور فزاینده نوع II یک مرحله‌ای را داریم. در حالت خاص، اگر $R_1 = \cdots = R_{m-1} = 0$ و بنابراین $R_m = n - m$، آنگاه سانسور فزاینده نوع II از راست به سانسور نوع II از راست تقلیل می‌یابد. در این حالت، آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II از راست همان اولین m آماره مرتب معمولی هستند. علاوه بر این، اگر $R_1 = n - m$ و در نتیجه $R_2 = \cdots = R_m = 0$، آنگاه به جای سانسور فزاینده نوع II از راست، سانسور اولین مرحله را داریم.

همچنین هرگاه $R_1 = \cdots = R_m = 0$ و بنابراین $m = n$، در این صورت سانسور فزاینده نوع II از راست به حالتی که هیچ سانسوری اتفاق نیافتاده (نمونه کامل) تبدیل می‌شود، در این حالت آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II از راست همان آماره‌های مرتب معمولی هستند. هر رابطه‌ای که برای آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II از راست برقرار باشد برای آماره‌های مرتب معمولی نیز برقرار است، اما در فصل ۲ نشان می‌دهیم که عکس آن لزوماً برقرار نیست.

۱—۴—۵ مزایای سانسور فزاینده

یکی از ایرادات سانسورهای نوع I و II معمولی این است که امکان خروج واحدها به جز در نقطه نهایی آزمایش وجود ندارد، اما در روش سانسور فزاینده می‌توان تعدادی از واحدهای تحت آزمایش را در زمان‌های دلخواه مثلاً لحظه از کار افتادگی هر مؤلفه، از آزمایش خارج نمود. همچنین در سانسور فزاینده، قطعات سانسور شده دارای طول عمر بیشتری نسبت به سانسورهای نوع I و II هستند زیرا به محض از کار افتادن اولین واحد تعداد R_1 واحد به طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند و می‌توان از آن‌ها به عنوان قطعات دست دوم مجدداً در آزمایش‌های دیگر استفاده نمود که از نظر اقتصادی حائز اهمیت است.

۱—۴—۶ کارهای انجام شده

برآورد پارامترهای توزیع‌های طول عمر بر حسب داده‌های سانسور فزاینده، یکی از موضوعات مورد علاقه محققین بوده است، بویژه یافتن برآوردگر درستنمایی ماکزیمم توسط تعداد زیادی از پژوهش‌گران مورد مطالعه قرار گرفته است، علاقه‌مندان می‌توانند به کارهای انجام شده توسط کوهن (۱۹۶۳، ۱۹۶۶، ۱۹۷۵، ۱۹۷۶)، رینگر و اسپرینکل [۱۰] (۱۹۷۲)، وینگو [۱۱] (۱۹۷۳، ۱۹۹۳)، کوهن و نورگارد [۱۲] (۱۹۷۷)، بین (۱۹۷۸)، شریف و تان [۱۳] (۱۹۷۸)، لاولس (۲۰۰۳)، نلسن (۲۰۰۴)،

[۱۰] Ringer and Sprinkle
[۱۱] Wingo
[۱۲] Cohen and Norgaard
[۱۳] Sherif and Tan

گیبانز و وانس [۱۴](۱۹۸۳)، کوهن و ویتن [۱۵](۱۹۸۸)، کوهن (۱۹۹۱)، بالاکریشنان و کوهن (۱۹۹۱)، بین و انگلهارت (۱۹۹۱) و همچنین وانگ [۱۶](۱۹۹۳)، مراجعه نمایند.

من[۱۷] (۱۹۶۹، ۱۹۷۱)، توماس و ویلسن[۱۸] (۱۹۷۲)، کاسیاری و مونتانری[۱۹] (۱۹۸۷) و همچنین ویوروس و بالاکریشنان[۲۰] (۱۹۹۴)، همگی استنباط خطی تحت سانسور فزاینده نوع II از راست را برای توزیع‌های نمایی و وایبل مطالعه کردند. بیشتر کارهای انجام شده بر اساس سانسور فزاینده تا سال ۱۹۹۰، مربوط به برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترهایی است که باید به روش‌های عددی برآورد شوند. استنباط خطی که توسط من (۱۹۶۹، ۱۹۷۱) مورد بررسی قرار گرفته است، شامل عبارات پیچیده‌ای است که برای حل آن‌ها نیاز به انتگرال‌های عددی و جدول‌های خاصی است. توماس و ویلسن (۱۹۷۲) به منظور بهبود استنباط خطی در نظر گرفته شده توسط من، یک الگوریتم برای محاسبه گشتاورهای آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II از راست از توزیع‌های پیوسته دلخواه، ارائه دادند. این نویسندگان همچنین استقلال تفاضل‌های آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II از توزیع نمایی را اثبات کردند. ویوروس و بالاکریشنان (۱۹۹۴) بهترین برآوردگرهای خطی نااریب پارامترهای توزیع نمایی یک و دو پارامتری را بر اساس آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II بدست آوردند. در زمینه سانسور فزاینده نوع II، چندین نظریه پرکاربرد، توسط پژوهش‌گرانی مانند بالاکریشنان و سندهو[۲۱] (۱۹۹۵، ۱۹۹۶)، آگاروالا[۲۲] (۱۹۹۶) و همچنین آگاروالا و بالاکریشنان (۱۹۹۸، ۱۹۹۶) ارائه شده است. بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰)، مجموعه تحقیقات انجام شده تا سال ۲۰۰۰ را جمع آوری و به صورت یک کتاب تدوین نمودند. در این کتاب، علاوه بر معرفی سانسور فزاینده، بررسی خواص توزیعی آماره‌های مرتب سانسور فزاینده، برآورد درستنمایی و خطی

[۱۴] Gibbons and Vance
[۱۵] Cohen and Whitten
[۱۶] Wong
[۱۷] Mann
[۱۸] Thomas and Wilson
[۱۹] Cacciari and Montanari
[۲۰] Viveros and Balakrishnan
[۲۱] Balakrishnan and Sandhu
[۲۲] Aggarwala

پارامترهای توزیع‌های طول عمر کلاسیک نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. چند سال بعد، بالاکریشنان در مجله تست[۲۳]، نظریه سانسور فزاینده و تحقیقات انجام شده بر مبنای سانسور فزاینده را به بحث کشاند که این موضوع توسط حدود ده نفر از آماردانان برجسته در زمینه داده‌های ترتیبی از جمله آرنولد، بالاسوریا[۲۴]، گولباید[۲۵]، ناگاراجا، دیوید، کمپس[۲۶] مورد نقد و بحث قرار گرفته است. زنگ و پارک[۲۷](۲۰۰۴) و همچنین ابوالنین[۲۸](۲۰۰۸)، میزان اطلاع فیشر در آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II را محاسبه کردند. علاوه بر این، ابوالنین چند رابطه بازگشتی برای اطلاع فیشر در سانسور فزاینده نوع II اثبات کرد. بروسکات[۲۹] و همکاران (۲۰۰۶، $2007b$) به موضوع طرح بهینه بر اساس معیار ماتریس واریانس ـکواریانس بهترین برآوردگرهای خطی نااریب، پرداختند. بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۸) طرح بهینه را در مدل سانسور فزاینده نوع II بر اساس معیار اطلاع فیشر، مورد بررسی قرار دادند و طرح بهینه را برای چند توزیع طول عمر بدست آوردند.

در این پایان نامه بیشتر تأکید بر موارد زیر بر اساس آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II می‌باشد:

۱ — مطالعه برآوردگرهای درستنمایی و خطی

۲ — محاسبه اطلاع فیشر

۳ — بررسی طرح بهینه بر مبنای اطلاع فیشر

۴ — مطالعه طرح بهینه بر مبنای معیار کمترین مربعات

موارد ذکر شده در فصل‌های جداگانه‌ای به طور مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

---

[۲۳] Test

[۲۴] Balasooriya

[۲۵] Guilbaud

[۲۶] Kamps

[۲۷] Zheng and Park

[۲۸] Abo - Eleneen

[۲۹] Burschat