چکیده

وجود زیرگروه‌های نرمالساز تأثیر زیادی بر روی ساختار گروه‌ها دارد. تا آنجا که در سال ۱۹۸۸ گروه‌هایی با دو نرمالساز توسط روماس بررسی شد، در ادامه‌ی این کار در سال ۲۰۰۰ مورا گروه‌هایی موضعاً متناهی با دو نرمالساز را مورد مطالعه قرار داد. سپس توتا ساختار گروه‌های دلخواه که دارای زیرگروه‌هایی با دو، سه و چهار نرمالساز باشند را مشخص کرد و تأثیر این نرمالسازها را مورد بررسی قرار داد.

در این پایان‌نامه ما به تأثیر حل‌پذیری گروه‌های متناهی توسط زیرگروه‌های نرمالساز آنها می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که گروه‌هایی که حداکثر ۲۰ نرمالساز دارند، حل‌پذیرند و همچنین گروه‌های ساده با حداکثر ۵۷ نرمالساز را مشخص می‌کنیم. کار این پایان‌نامه دربرگرفته از مرجع[۱۸]، است.

کلمات کلیدی: زیرگروه‌های نرمالساز، گروه‌های ساده، n-انگل گروه، گروه‌های حل‌پذیر.

فهرست مطالب

پیشگفتار

بحث این پایان‌نامه درباره‌ی گروه‌هایی با n نرمالساز است. گوییم گروه G، η_n گروه است، $(G \in \eta_n)$ اگر دقیقاً n نرمالساز از زیرگروه‌هایش داشته باشد و همچنین گروه G، η_n^c گروه است اگر n نرمالساز از زیرگروه‌های دوری‌اش داشته باشد. گروه‌هایی که متعلق به $\eta_۱$ هستند گروه‌های ددکیند هستند. روماس [۱] در [۱۳] گروه‌های متناهی متعلق به $\eta_۲$ را مشخص می‌کند و کامپ مورا [۲] در [۵] این نتیجه را به گروه‌های موضعا متناهی تعمیم می‌دهد. همچنین توتا [۳] در [۱۶] ساختار گروه‌های دلخواه که دارای زیرگروه‌هایی با دو، سه و چهار نرمالساز هستند را مشخص کرد. نتایجی که تاکنون بدست آمده، را بیان می‌کنیم:

۱. گروه G تعداد متناهی نرمالساز دارد اگر و تنها اگر G مرکز به واسطه متناهی باشد.

۲. فرض می‌کنیم G یک η_n گروه با $n = ۳$ باشد، در این صورت G پوچ‌توان از کلاس حداکثر ۳ است.

۳. فرض می‌کنیم G یک η_n گروه با $n = ۴$ باشد، در این صورت G حل‌پذیر از کلاس حداکثر ۲ است.

۴. فرض می‌کنیم G یک η_n گروه با $n = ۴$ باشد، در این صورت اگر G موضعا متناهی نباشد، آنگاه G پوچ‌توان از کلاس حداکثر ۳ است.

هدف ما در این مقاله بررسی η_n^c گروه‌هاست و در ادامه یک معیار قابل حلی برای η_n^c گروه‌ها (η_n گروه) به وسیله n به دست می‌آوریم.

در فصل اول به بیان تعاریف و قضایا در مورد گروه‌ها می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم خواص گروه‌هایی با تعداد متناهی نرمالساز را مورد بحث قرار می‌دهیم و در فصل

---

[۱] Ramos
[۲] Camp-Mora
[۳] Tota

سوم η_n گروه‌های حل پذیر را بررسی می‌کنیم و همچنین در این فصل قضیه A را که ثابت می‌کند گروه‌هایی که حداکثر ۲۰ نرمالساز از زیرگروه‌های دوری دارند حل‌پذیرند را بیان می‌کنیم و حدس می‌زنیم که بالاترین کران ۲۱ باشد و نشان می‌دهیم حل‌پذیری چنین گروه‌هایی بستگی به مقدار n دارد. در فصل چهارم درباره η_n گروه‌های ساده غیرآبلی بحث می‌کنیم و با استفاده از قضیه B همه گروه‌های ساده غیرآبلی G که حداکثر ۵۷ نرمالساز دارند را مشخص می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ ساختار گروه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه و $a \in G$ باشد، زیرگروه تشکیل شده توسط a را با $\langle a \rangle$ نمایش می‌دهند و آن را زیرگروه دوری می‌نامند:

$$\langle a \rangle = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. اگر عنصر a در G چنان یافت شود که $G = \langle a \rangle$ آنگاه G دوری است و a را مولد G می‌نامند. ($\mathbb{Z}$ گروهی دوری است).

تعریف ۳.۱.۱. اگر همه‌ی عناصر G تحت عمل بر G تعویض شوند، گروه را آبلی می‌نامیم، یعنی به ازای $x, y \in G$، $xy = yx$. ما گاهی این خاصیت را با $xyx^{-۱} = y$ نشان می‌دهیم که در آن $xyx^{-۱}$ «مزدوج y در G» نام دارد. (گروه‌های دوری متناهی و نامتناهی آبلی هستند).

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$. به ازای هر a و b در G می‌گوییم a با b همنهشت است به پیمانه H و می‌نویسیم $a \equiv b(Mod\ H)$ اگر و تنها اگر $ab^{-۱} \in H$.

تعریف ۵.۱.۱. اگر H زیرگروهی از G باشد همنهشتی به پیمانه‌ی H یک رابطه هم‌ارزی روی G است و به ازای هر a در G رده‌ی همنهشتی a عبارت است از

$$\bar{a} = Ha = \{ha : h \in H\}.$$

تعریف ۶.۱.۱. Ha را یک همدسته راست H در G می‌نامیم. به ازای هر b در G، bH که به صورت مشابه تعریف می‌شود یک همدسته چپ H در G است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. تعداد همدسته‌های راست متمایز H در G را شاخص H در G نامیده و با $[G:H]$ نمایش می‌دهیم.

تبصره ۸.۱.۱. چنانچه G یک گروه متناهی و H یک زیرگروه آن باشد آنگاه به سادگی نتیجه می‌شود که

$$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}.$$

قضیه ۹.۱.۱ (لاگرانژ). *چنانچه G یک گروه متناهی و H یک زیرگروه G باشد، آنگاه:*

$$|H|\Big||G|.$$

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۳.۳. □

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و N زیرگروهی از آن باشد. می‌گوییم N یک زیرگروه نرمال G است و می‌نویسیم $N \trianglelefteq G$ اگر به ازای هر g در G و هر n در N داشته باشیم $g^{-1}ng \in N$.*

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۴.۳. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید N یک زیرگروه نرمال G باشد در این صورت

$$\frac{G}{N}=\{Ng, g\in G\}$$

یعنی $\frac{G}{N}$ مجموعه همدسته‌های راست (چپ) در G است. مجموعه $\frac{G}{N}$ با عمل $aN\cdot bN=(ab)N$ به یک گروه تبدیل می‌شود که آن را گروه خارج‌قسمتی G بر N می‌نامیم.

مثال ۱۲.۱.۱. گروه جمعی $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. چون $\mathbb{Z}$ آبلی است پس هر زیرگروه آن نرمال است. اکنون اگر زیرگروه $k\mathbb{Z}$، $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ را در نظر بگیریم عناصر گروه خارج‌قسمتی $\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$ عبارتند از همدسته‌های $x+k\mathbb{Z}$ که مقدار x یکی از اعداد $0,1,2,\dots,k-1$ می‌تواند باشد بنابراین در حالت $k=0$ گروه

$\frac{\mathbb{Z}}{\circ} = \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$ همان $\mathbb{Z}$ است و در حالت $k \geq ۱$ گروه $\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$ متناهی و دارای k عضو، حال چون $\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}} = \langle ۱ + k\mathbb{Z} \rangle$ پس $\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$ دوری از مرتبه k است پس $\frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_k$.

قضیه ۱.۱.۱۳. *فرض کنید N زیر گروه نرمال G باشد در این صورت هر زیر گروه $\frac{G}{N}$ به صورت $\frac{K}{N}$ است که در آن K زیرگروهی از G و شامل N است. همچنین $\frac{K}{N}$ یک زیرگروه نرمال از $\frac{G}{N}$ است اگر و تنها اگر K یک زیرگروه نرمال G باشد.*

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۴.۵. □

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید G یک گروه باشد. مرکز گروه G را با $Z(G)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(G) = \{x \in G : xg = gx \ \ \forall g \in G\}.$$

قضیه ۱.۱.۱۵. *مرکز گروه G یک زیرگروه نرمال G است.* ($Z(G) \trianglelefteq G$)

اثبات. داریم $Z(G) = \{x \in G : xg = gx \ \ \forall g \in G\}$. فرض می‌کنیم x, g در G باشند پس به ازای هر g در G داریم:

$$xg = gx, gg = gg \to (xg)g = g(xg);$$

لذا $xg \in Z(G)$ و نیز:

$$xg = gx \to x^{-۱}(xg)x^{-۱} = x^{-۱}(gx)x^{-۱} \to gx^{-۱} = x^{-۱}g$$

بنابراین $x^{-۱} \in Z(G)$ پس $Z(G) \leq G$. حال فرض می‌کنیم g در G و x در $Z(G)$ دلخواه باشد داریم:

$$gxg^{-۱} = gg^{-۱}x = x \in Z(G)$$

در نتیجه $Z(G) \trianglelefteq G$. □

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد ($H \leq G$) در این صورت نرمالساز H در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_G(H) = \{g \in G | gH = Hg\} = \{g \in G | H^g = H\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض می‌کنیم $H \leq G$، آنگاه همه زیرگروه‌های نرمال G که شامل H می‌باشند را بستار نرمال H در G می‌گویند و با H^G نمایش می‌دهند.

(i) H^G، کوچکترین زیر گروه نرمال G که شامل H است.

(ii) $H^G = \{g^{-1}hg : g \in G, h \in H\}$.

(iii) $H^G = H[H, G] \trianglelefteq G$.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه آن باشد در این صورت:

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg, \forall h \in H\}$$

را مرکزساز H در G گویند که زیرگروهی از G می‌باشد.

قضیه ۱.۱.۱۹. *فرض کنید H زیرگروهی از G باشد در این صورت:*

$$Core(H) = \cap_{g \in G} gHg^{-1} \trianglelefteq G$$

اثبات. داریم $H \leq G$ و $N = \cap_{g \in G} gHg^{-1}$ به وضوح $N \subseteq H$. برای اثبات زیرگروه بودن N در G نشان می‌دهیم که به ازای هر $g \in G$ باید $gHg^{-1} \leq G$ داریم:

$$x, y \in gHg^{-1} \to x = gh_1g^{-1},\ y = gh_2g^{-1},\ \ h_1, h_2 \in H$$

$$xy = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = g(h_1h_2)g^{-1} \in gHg^{-1}$$

و نیز

$$x^{-1} = (gh_1g^{-1})^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$$

برای اثبات نرمال بودن N در G عنصر دلخواه x در G را انتخاب کرده، آن را ثابت نگه می‌داریم، بنا به تعریف باید نشان دهیم که

$$\begin{cases} \forall g \in G, n \in \mathbb{N} : g^{-1} n g \in \mathbb{N} \\ \text{یا} \\ \forall g \in G : N^g = N \end{cases}$$

$$N = \cap_{g_0 \in G} g_0^{-1} H g_0 \Rightarrow N^g = \left(\cap_{g_0 \in G} g_0^{-1} H g_0\right)^g$$

$$= \cap_{x \in G} x^{-1} H x = N \Rightarrow N^g = N \quad \forall g \in G$$

□

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید G و $\bar{G}$ دو گروه باشند، می‌گوییم نگاشت φ از گروه G به گروه $\bar{G}$ یک همریختی است، اگر به ازای هر a و b در G داشته باشیم: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. اگر همریختی φ یک به یک باشند. می‌گوییم φ یک تکریختی است و اگر φ یک به یک و پوشا باشد می‌گوییم دو گروه G و $\bar{G}$ (تحت نگاشت φ) یکریختند و می‌نویسیم $G \cong \bar{G}$.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید $\varphi : G \to \bar{G}$ یک همریختی از گروه G به گروه $\bar{G}$ باشد. هسته φ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ker \varphi = \{g \in G : \varphi(g) = \bar{e}\}.$$

قضیه ۲۲.۱.۱. *چنانچه $\varphi : G \to \bar{G}$ یک همریختی گروهی باشد آنگاه:*

الف) $\ker \varphi \trianglelefteq G$.

ب) φ *یک به یک است اگر و تنها اگر* $\ker \varphi = (e)$.

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۲.۵.۱. □

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد، می‌گوییم همریختی $\varphi : G \to G$ یک خودسانی (خودریختی) G است اگر φ یک به یک و پوشا باشد. مجموعه همه خودسانی‌های گروه G را با $Aut(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و a در G باشد. خودسانی داخلی پدید آمده توسط a را با I_a نمایش داده و به ازای هر g در G به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_a(g) = a^{-1}ga$$

مجموعه همه خودسانی‌های داخلی گروه G را با $I_{nn}(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۵.۱.۱. *الف) مجموعه‌ی $Aut(G)$ با عمل ترکیب توابع یک گروه است.*

ب) مجموعه خودسانی‌های داخلی G یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است.

$$Inn(G) \trianglelefteq Aut(G).$$

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۵.۴. □

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و $Z(G)$ مرکز گروه G و $Inn(G)$ گروه خودسانی‌های داخلی G باشد آنگاه:*

$$\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G).$$

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۵.۳. □

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید S یک مجموعه ناتهی باشد، هر تابع یک به یک و پوشا از S به S را یک جایگشت S می‌نامیم و مجموعه همه‌ی جایشگت‌های S را با $A(S)$ نمایش می‌دهیم. چون ترکیب و وارون توابع یک به یک و پوشا باز یک به یک و پوشاست و با توجه به اینکه ترکیب توابع شرکتپذیر است پس $A(S)$ با عمل ترکیب توابع یک گروه است که عضو همانی آن تابع همانی I_S است. حالت خاص از $A(S)$ که در آن S مجموعه‌ی n عضوی می‌باشد (معمولاً فرض می‌کنند $S = \{1, 2, \ldots, n\}$) بسیار مورد توجه است. در این حالت $A(S)$ را صرفاً با S_n نمایش می‌دهیم و آن را گروه متقارن روی n حرف می‌نامیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. منظور از دور r بعدی $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ جایگشتی از S_n $(n \geq r)$ است که a_1 را به a_2 و a_2 را به a_3، ... و a_r را به a_1 می‌برد و بقیه عناصر مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$ را ثابت نگه می‌دارد.

تعریف ۲۹.۱.۱. هر دور دو بعدی (a,b) در S_n را یک ترانهش می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. می‌گوییم جایگشت $\alpha \in S_n$ زوج است اگر α به تعداد زوجی از ترانهش تجزیه شود، در غیر این صورت آن را فرد می‌نامیم.

تعریف ۳۱.۱.۱. مجموعه‌ی همه جایگشت‌های زوج S_n یک زیرگروه S_n است، این زیرگروه را با A_n نمایش می‌دهند و آن را گروه متناوب از درجه n می‌نامند.

قضیه ۳۲.۱.۱. *گروه متناوب A_n زیرگروه نرمالی از S_n با شاخص ۲ است. (لذا $|A_n| = \frac{n!}{۲}$) در نتیجه* $A_n \trianglelefteq S_n$.

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۶.۳. □

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید $n \geq ۳$ یک عدد طبیعی باشد. گروه تولید شده توسط a و b که در آن $|a| = n$ و $|b| = ۲$ و $ba = a^{-۱}b$ گروه دووجهی (از درجه n) نامیده و با D_n نمایش می‌دهند.

$$D_n = \langle a, b : |a| = n, |b| = ۲, ba = a^{-۱}b = a^{n-۱}b\rangle.$$

تبصره ۳۴.۱.۱. در گروه دووجهی D_n که یک گروه ناآبلی است اگر n زوج باشد آنگاه $Z(D_n) = (a^{\frac{n}{۲}}) = \{e, a^{\frac{n}{۲}}\}$ و اگر n فرد باشد $Z(D_n) = (e)$.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$ در این صورت $[x,y] = x^{-۱}y^{-۱}xy$ را جابه‌جاگر x و y می‌نامیم. زیرگروه G که توسط تمام $[x,y]$ها پدید می‌آید، زیرگروه جابه‌جاگر یا مشتق می‌نامیم که با G' نمایش می‌دهیم:

$$G' = \langle [x,y] | x, y \in G\rangle.$$

مثال ۳۶.۱.۱. اگر a و b با هم جابه‌جا شوند آنگاه $a^{-۱}b^{-۱}ab = e$ از این رو شرط لازم و کافی برای اینکه گروه G آبلی باشد این است که $G' = (e)$.

قضیه ۳۷.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد، در این صورت $G' \trianglelefteq G$ و $\frac{G}{G'}$ آبلی است.*

اثبات. داریم $G' = \langle aba^{-1}b^{-1} | a,b \in G\rangle$ برای اثبات نرمال بودن G' در G کافی است ثابت کنیم، به ازای هر جابه‌جاگر $aba^{-1}b^{-1}$ و هر $g \in G$ داریم:

$$g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} \in G'$$

داریم:

$$\begin{aligned} g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} &= (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) \\ &= (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1} \to (gbg^{-1})^{-1} \in G' \end{aligned}$$

و برای اثبات آبلی بودن $\frac{G}{G'}$، فرض می‌کنیم a و b در G باشند چون:

$$(aG')(bG') = (bG')(aG') \Leftrightarrow abG' = baG'.$$

$\square$

قضیه ۳۸.۱.۱. *فرض کنید N یک زیرگروه نرمال G و $\frac{G}{N}$ آبلی باشد، آنگاه $G' \subseteq N$.*

اثبات. فرض می‌کنیم $N \trianglelefteq G$ و $\frac{G}{N}$ آبلی و $aba^{-1}b^{-1}$ یک جابه‌جاگر G باشد داریم:

$$abN = (aNbN) = (bN)(aN) = baN$$

و لذا $aba^{-1}b^{-1} \in N$ در نتیجه $G' \subseteq N$. $\square$

مثال ۳۹.۱.۱. فرض کنید می‌خواهیم گروه مشتق S_3 را محاسبه کنیم. می‌دانیم $A_3 \trianglelefteq S_3$ و $\frac{S_3}{A_3}$ با گروه دوری مرتبه ۲ یکریخت است از این رو بنا به قضیه قبل باید داشته باشیم $S_3' \leq A_3$ اما A_3 گروهی از مرتبه ۳ است و تنها دو زیرگروه دارد یعنی ۱ و A_3. چون S_3 آبلی نیست پس $S_3' \neq 1$ و در نتیجه $S_3' = A_3$.

خواص جابه‌جاگرها

فرض کنید $x, y, z \in G$ در این صورت موارد زیر برقرارند:

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$.

(ii) $[xy, z] = [x, z]^{y} \cdot [y, z]$.

(iii) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1} = [y, x]^{y^{-1}}$.

(iv) $[x, y^{-1}, z]^{y}[y, z^{-1}, x]^{z}[z, x^{-1}, y]^{x} = 1$.

تعریف ۴۰.۱.۱. گروه G را ساده گوییم، هر گاه G دارای زیرگروه نرمال غیربدیهی نباشد.

(A_5 و $n \neq 1, 2, 4$)

تعریف ۴۱.۱.۱. گروه G را نیم‌ساده گوییم هرگاه G دارای هیچ زیرگروه نرمال آبلی نباشد. (S_n و $n \geq 5$)

تذکر ۴۲.۱.۱ . هر گروه ساده، نیم‌ساده است، اما عکس آن درست نیست.

تعریف ۴۳.۱.۱. گروه G را یک گروه موضعاً متناهی می‌گوییم، هرگاه هر زیر گروه متناهیاً تولید شده آن متناهی باشد. (گروه‌های حل‌پذیر)

برخی خواص گروه‌های موضعا متناهی عبارتند از:

۱. هر گروه متناهی، موضعا متناهی است.

۲. هر زیرگروه از گروه موضعا متناهی، موضعا متناهی است.

تعریف ۴۴.۱.۱. گروه G را ددکیند گروه می‌نامیم، اگر هر زیرگروه از G، در G نرمال باشد. (همه گروه‌های آبلی ددکیند گروه هستند.)

تعریف ۴۵.۱.۱. گروه G را مرکز به واسطه متناهی می‌گوییم هر گاه تعداد زیرگروه‌هایی از G که شامل $Z(G)$ هستند متناهی باشند.

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| < \infty.$$

تعریف ۴۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد، در این صورت عنصر g از G را یک FC عنصر گروه گوییم هرگاه، تعداد مزدوجات در G متناهی باشد، یعنی:

$$|G : C_G^{(g)}| < \infty.$$

تعریف ۴۷.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد، در این صورت زیرگروهی از G که تولید شده توسط همه FC-عنصرهاست را FC مرکز گوییم یعنی:

$$FC(G) = \langle \{g \in G : |x^g| < \infty\} \rangle.$$

تعریف ۴۸.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد، در این صورت G، FC-گروه است اگر هم‌ارز (مساوی) FC-مرکز خودش باشد.

نکته ۴۹.۱.۱. از جمله FC گروه‌های مهم، گروه‌های آبلی متناهی، گروه‌هایی که مرکز به واسطه متناهی و گروه‌های متناهی هستند

هر زیرگروهِ یک FC گروه یک، FC گروه است و هر FC گروه متناوب، موضعاً متناهی است.

۲.۱ گروه‌هایی با تبدیل خطی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه و n عدد طبیعی باشد، مجموعه همه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ با درایه‌هایی در R را با $M_n(R)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی همه عناصر وارون‌پذیر (دترمینان$\neq$ ۰) در $M_n(R)$ تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه خطی عام می‌نامیم و با $GL_n(R)$ نمایش می‌دهیم و مجموعه تمام ماتریس‌هایی در $GL_n(R)$ با دترمینان ۱ را گروه خطی خاص گوییم و با نماد $SL_n(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری با بعد n روی میدان F باشد، مجموعه همه تبدیلات خطی معکوس‌پذیر را با $GL(V)$ نمایش می‌دهیم، که می‌توانیم داشته باشیم:

$$GL(V) \cong GL(n,F)$$

حال اگر F یک میدان متناهی باشد و $|F| = q$، که q به صورت توان مثبتی از یک عدد اول است در این صورت گروه‌های $GL(n,F)$ و $SL(n,F)$ را با $GL(n,q)$ و $SL(n,q)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض می‌کنیم R یکی از مجموعه‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد و گروه‌های $GL_n(R)$ و $SL_n(R)$ را در نظر می‌گیریم در این صورت $SL_n(R) \trianglelefteq GL_n(R)$ و $\frac{GL_n(R)}{SL_n(R)} \cong \mathbb{R}^*$. (که $\mathbb{R}^*$ گروه ضربی $\mathbb{Q}^*$ و $\mathbb{R}^*$ یا $\mathbb{C}^*$ است)*

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۲.۶.۲. □

لم ۴.۲.۱. *مرکز $GL(n,R)$ یک ماتریس اسکالر غیرصفر است که با $a1_n$ نمایش می‌دهیم و مرکز $SL(n,R)$ یک ماتریس اسکالر $a1_n$ است به طوری که $a^n = 1$.*

اثبات. رجوع به [۱۴] لم ۳.۳.۱. □

تعریف ۵.۲.۱. فرض می‌کنیم R یکی از مجموعه‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد و $GL(n,R)$ گروه خطی عام از درجه n باشد در این صورت تصویر گروه خطی عام از درجه n را روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$PGL(n,R) = \frac{GL(n,R)}{Z(GL(n,R))}.$$

بر اساس تعریف بالا می‌توانیم تصویر گروه خطی خاص را تعریف کنیم:

$$PSL(n,R)=\frac{SL(n,R)}{Z(SL(n,R))}=\frac{SL(n,R)}{SL(n,R)\cap Z(GL(n,R))}.$$

تذکر ۱.۲.۶. اگر $n>۲$ یا ($n=۲$ و $|F|>۳$) آنگاه $PSL(n,F)$ ساده است.

لم ۱.۲.۷. *فرض می‌کنیم n یک عدد طبیعی و q توان مثبتی از یک عدد اول باشد، در این صورت مرتبه گروه خطی عام و خاص برابر است با:*

$$|GL(n,q)|=(q^n-۱)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-۱}).$$

$$|SL(n,q)|=|GL(n,q)|/(q-۱)=|PGL(n,q)|.$$

$$|PSL(n,q)|=|GL(n,q)|/(q-۱)(n,q-۱).$$

اثبات. رجوع به [۱۴] لم ۲.۵.۳. □

۳.۱ عمل گروه بر مجموعه

تعریف ۱.۳.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه و X مجموعه غیرتهی باشد. فرض کنیم به ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \cdot g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که:

۱. به ازای هر از X، $x \cdot 1 = x$،

۲. به ازای g_1 و g_2 از G و هر x از X

$$x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$$

در این صورت گوییم G بر X عمل می‌کند و $\cdot$ را عمل G بر X گویند. (برای سهولت در نوشتن به جای $x \cdot g$ خواهیم نوشت xg)

مثال ۲.۳.۱. به عنوان مثال گروه G روی خودش عمل می‌کند که در آن e عضو خنثی G است یا به عنوان مثال دیگر اگر $H \leq G$، آنگاه G روی مجموعه‌ی تمام همدسته‌های راست H در G عمل می‌کند. یعنی به ازای هر عضو Hg از مجموعه همدسته‌های راست H در G و هر عضو g' از G، عضو Hgg' متناظر می‌شود.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند به ازای هر g از G تابع $\phi_g : X \to X$ را با ضابطه $x\phi_g = xg$ تعریف می‌کنیم در این صورت $\phi_g \in S_X$ و نگاشت $\varphi : G \to S_X$ را با ضابطه $g \mapsto \varphi_g$ یک همریختی است که هسته آن با هسته عمل برابر است.*

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۶.۱. □

نتیجه ۴.۳.۱. *فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند و K هسته عمل باشد در این صورت $K \lhd G$ و $\frac{G}{K}$ با یک گروه از S_X یکریخت است.*

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه غیرتهی X عمل کند و $x \in X$ در این صورت مجموعه $\{g \in G | xg = x\}$ را پایدارساز x در G می‌نامیم و آن را با علامت $St_G(x)$ نشان می‌دهیم که مختصراً می‌نویسیم $St(x)$.

قضیه ۱.۳.۶. *فرض می‌کنیم G گروه باشد در این صورت $St(x) \leq G$.*

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۶.۱۰. $\square$

مثال ۱.۳.۷. فرض می‌کنیم $G = \langle \mathbf{t} \rangle$ و $\mathbf{t} = (۱,۲,۳)(۴,۵)$ معلوم است که G به عنوان زیرگروهی از $S_۵$ بر مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، به طور طبیعی عمل می‌کند که

$$St(۱) = \{۱, \mathbf{t}^۲\}, \qquad St(۴) = \{۱, \mathbf{t}^۲, \mathbf{t}^۴\}.$$

قضیه ۱.۳.۸. *فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند و φ نمایش جایگشتی G متناظر با عمل گروه و K هسته عمل باشد، در این صورت:*

$$K = \ker\varphi = \cap_{x\in X} St(x).$$

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۱.۶.۶. $\square$

قضیه ۱.۳.۹. *فرض کنیم G با عمل تزویج بر Gعمل کند و $x \in G$، در این صورت $St(x) = C(x)$. در نتیجه اگر K هسته عمل و φ نمایش جایگشتی G متناظر با عمل باشد آنگاه:*

$$K = \ker\varphi = \cap_{x\in G} C(x) = Z(G)$$

بنابراین $\frac{G}{Z(G)} \rightarrow S_G$ به آسانی محقق می‌شود که $Im\varphi = Inn(G)$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$.

اثبات. رجوع به [۱۴] قضیه ۲.۶.۶. $\square$

تعریف ۱.۳.۱۰. فرض می‌کنیم G یک گروه و S زیرمجموعه‌ای غیر تهی از G باشد و $g \in G$، در این صورت:

$$S^g = g^{-۱}Sg = \{g^{-۱}xg | x \in S\}$$

را مزدوج مجموعه S می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه و χ مجموعه همه زیرمجموعه‌های غیرتهی G باشد در این صورت G با تزویج χ عمل می‌کند به عبارت دیگر به ازای هر X از χ و هر g از G ضابطه $X^g = Xg$ یک عمل بر χ تعریف می‌کند. حال هرگاه u عضو دلخواهی از χ باشد داریم:

$$St(u) = \{g \in G | u^g = u\}$$

(مجموعه طرف دوم نرمالساز u در G می‌نامیم و با $N_G(u)$ نمایش می‌دهیم).

قضیه ۱۲.۳.۱ (نرمالساز-مرکزساز). *فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$ در این صورت*

$$C_G(H) \lhd N_G(H).$$

اثبات. به آسانی معلوم می‌شود که گروه $N_G(H)$ با تزویج بر H عمل می‌کند فرض کنیم:

$$\varphi : N_G(H) \to S_H$$

نمایش جایگشتی گروه $N_G(H)$ متناظر با عمل باشد.

بنا به قضیه ۸.۳.۱

$$\ker \varphi = \cap_{h \in H} St(h) = \cap \{g \in N_G(H) | h^g = h\}$$

$$C_{N(H)}(H) = C_G(H) \cap N_G(H) = C_G(H)$$

زیرا همواره $C_G(H) \leq N_G(H)$. □

۴.۱ قضایای سیلو

تعریف ۱.۴.۱ (p- گروه). فرض کنید p یک عدد اول باشد، گروه متناهی G را p- گروه می‌گوییم هرگاه مرتبه هر عضو آن توانی از عدد اول p باشد یعنی $\forall g \in G \quad |g| = p^{\alpha}$ که $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (گروه‌های دووجهی مرتبه ۸)

گزاره ۲.۴.۱ (مرکز p گروه). *مرکز p- گروه نابدیهی است. به طور کلی اگر G یک p- گروه باشد و N زیرگروه نرمال و نابدیهی G باشد آنگاه $N \cap Z(G)$ نابدیهی است.*

اثبات. رجوع به [۱۴] گزاره ۱.۶.۱۴. □

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید G یک گروه باشد در این صورت M یک زیرگروه ماکسیمال نامیده می‌شود، هرگاه $M \neq G$ و اگر $M \leq H \leq G$ آنگاه $H = M$ یا $H = G$. یعنی M زیرگروه سره‌ای از G بوده و به جز M زیرگروه سره‌ای بین M و G وجود نداشته باشد.

گزاره ۴.۴.۱. *فرض کنید G یک p- گروه باشد و M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد در این صورت $M \trianglelefteq G$ و $[G : M] = p$.*

اثبات. رجوع به [۱۴] گزاره ۱.۶.۱۶. □

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و p مقسوم علیه اول G باشد. می‌توان نوشت $|G| = p^n \cdot m$ که m و n اعداد طبیعی هستند به طوری که $(p, m) = 1$ در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^n یک p-زیرگروه سیلوی G می‌نامند. مجموعه‌ی تمام p زیرگروه‌های سیلو G را به $Syl_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶.۴.۱. *گروه متناهی G، p- گروه است، اگر و تنها اگر $|G|$ توانی از p باشد.*

اثبات. فرض می‌کنیم G، p- گروه متناهی باشد. پس طبق تعریف ۱.۴.۱ مرتبه هر عضو آن توانی از p است. حال فرض می‌کنیم q عدد اولی باشد که $|G|$ را می‌شمارد پس طبق قضیه کشی (هرگاه G گروه متناهی باشد