دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی مکانیک

آنالیز غیرخطی کمانش یک‌طرفه پانل‌های مرکب لایه‌لایه بر روی فونداسیون الاستیک بدون کشش برانگیخته شده با نیروهای مکانیکی و گرمایی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
مهندسی مکانیک طراحی کاربردی

دانیال پناهنده شهرکی

اساتید راهنما

دکتر علیرضا شهیدی **دکتر حمیدرضا میردامادی**

1390

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب ..... هشت

چکیده 1

فصل اول: مقدمه

1-1مقدمه 2

2-1 توسعه و تکامل تئوری پوسته ها 2

3-1 تاریخچه کمانش مکانیکی پوسته های استوانه ای دایره ای مرکب لایه لایه 5

4-1 تاریخچه کمانش گرمایی پوسته های استوانه ای دایره ای مرکب لایه لایه 7

5-1 تاریخچه کمانش یکطرفه 9

6-1 اهمیت موضوع و هدف 12

1-7 روش حل 12

8-1 محتوای فصل های بعدی 13

فصل دوم: تعریفهای مقدماتی

1-2 مقدمه 14

2-2 اصل کمینه انرژی پتانسیل 15

3-2 اصل کار مجازی 16

4-2 آنالیز به روش ریلی-ریتز 17

5-2 مقدمه ای بر مواد مرکب 17

1-5-2 تعریف 17

2-5-2 صفحه‌های نازک و صفحه‌های لایه‌لایه 20

3-5-2 قانون عمومی هوک 21

4-5-2 ویژگی‌های یک صفحه لایه‌ای تکسویی 23

فصل سوم: پوسته‌های نازک و معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار آنها در تغییر شکل‌های کوچک

1-3 مقدمه 24

2-3 خواص هندسی پوسته 24
3-3 تئوری کلاسیک پوسته‌ها 27
4-3 میدان جابجایی ۳۰
5-3 معادلات سینماتیکی ۳۱
6-3 معادلات ساختاری پوسته مرکب لایه‌لایه 33
3-7 معادلات دیفرانسیل حاکم بر پانل استوانه‌ای همگن و همسانگرد 36

فصل چهارم: روش تحلیل عددی

1-4 مقدمه 39
2-4 دستگاه مختصات 39
3-4 نگاشت مختصات 40
4-4 عملگرهای مشتق‌گیری 40
5-4 توابع شکل 42

فصل پنجم: فرمول‌بندی پانل مرکب لایه‌لایه بر روی فونداسیون بدون کشش

1-5 مقدمه 45
2-5 شبیه‌سازی فونداسیون 45
1-2-5 مدل ریاضی 45
3-5 معادلات اساسی 47
1-3-5 معادله انرژی 47
2-3-5 نمایش ماتریسی معادله انرژی 51
3-3-5 آنالیز کمانش یکطرفه پانل مرکب لایه‌لایه بر انگیخته شده با نیروهای مکانیکی درون‌صفحه‌ای و گرمایی 54
4-5 روند حل 56

فصل ششم: نتیجه‌گیری‌های عددی

1-6 آنالیز غیرخطی کمانش پانل‌های همگن و همسان‌گرد بر روی فونداسیون الاستیک بدون کشش، بر انگیخته شده با نیروی مکانیکی درون‌سطح 57
1-1-6 پانل‌های استوانه‌ای با شعاع انحنای بینهایت 57

2-1-6 پانل‌های استوانه‌ای با شعاع انحنای محدود 58
3-1-6 مقایسه پانل با شعاع انحنای محدود با پانل با شعاع انحنای بینهایت 76
2-6 آنالیز غیرخطی کمانش پانل‌های مرکب لایه‌لایه بر روی فونداسیون الاستیک بدون کشش، بر انگیخته شده با نیروهای مکانیکی درون‌صفحه‌ای 78
1-2-6 پانل‌های استوانه‌ای با شعاع انحنای بینهایت 78
3-6 آنالیز غیرخطی کمانش گرمایی پانل‌های مرکب لایه‌لایه بر روی فونداسیون الاستیک بدون کشش، بر انگیخته شده با افزایش دمای گسترده یکنواخت 91

فصل هفتم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات

1-7 نتیجه‌گیری 100
2-7 پیشنهادات 102
مراجع 104
چکیده انگلیسی 110

چکیده:
یکی از راه‌های تقویت سازه‌ها، پروفیل‌های فلزی پانلی شکلی هستند که به این سازه‌ها متصل می‌شوند. از این‌رو پانل توسط سازه مقید می‌شود که فقط در یک سوی خارج از سطح اعمال نیرو کمانش کند. در این پایان‌نامه کمانش یک‌طرفه پانل‌های استوانه‌ای دایره‌ای همگن همسانگرد و مرکب لایه‌لایه با شعاع انحنای محدود بر روی فونداسیون الاستیکی بدون کشش، برانگیخته شده با نیروهای مکانیکی درون‌سطح و گرمایی، به روش ریلی-ریتز آنالیز شده است. معادلات حاکم، براساس فرضیات تئوری کلاسیک و با اعمال اصل کار مجازی بر معادله انرژی، استخراج شده است. برای شبیه‌سازی فونداسیون، شبکه‌ای متشکل از فنرهای متمرکز به‌کار رفته است. مطالعات همگرایی تعیین تعداد فنر مورد نیاز در واحد طول برای تعیین شبکه‌ای مناسب(شبکه مرجع) از فنرها انجام شده است و به شبکه سایر نسبت‌های هندسی طول به محیط براساس این شبکه مقدار داده شده است. منحنی‌های کمانش الاستیکی پانل‌های همگن همسانگرد و پانل‌های مرکب لایه‌لایه استوانه‌ای دایره‌ای بر روی فونداسیون الاستیک بدون کشش برانگیخته شده با نیروهای مکانیکی درون‌سطح و گرمایی ارائه شده است. این نمودارها رابطه بین بار بحرانی و دمای بحرانی کمانش را با نسبت هندسی طول به محیط سازه در زاویه مرکزی مشخصی از پانل و رابطه بین بار بحرانی و دمای بحرانی کمانش را با زاویه مرکزی نشان می‌دهند. تأثیر پارامترهایی هم‌چون تعداد و نوع چینش لایه‌ها در ضخامت ثابت، نسبت هندسی طول به محیط، نسبت هندسی شعاع به ضخامت، شرایط تکیه‌گاهی، زاویه الیاف بر بار بحرانی و دمای بحرانی کمانش یک‌طرفه و دوطرفه بررسی شده است. برای ارائه درست‌سنجی روش حاضر، کمانش یک‌طرفه پانل با شعاع انحنای بی‌نهایت با کارهای موجود مقایسه شده است. نتیجه‌ها نشان دادندکه افزایش سطح پانل در اثر افزایش نسبت هندسی طول به محیط لزوماً منجر به افزایش سطح تماس بین پانل و فونداسیون و در نتیجه بار بحرانی کمانش نمی‌شود. از این‌رو الگوهای متفاوتی در تغییر بار بحرانی و دمای بحرانی کمانش یک‌طرفه دیده شد. از بررسی‌های انجام شده می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش نسبت هندسی شعاع به ضخامت، برخلاف افزایش بار بحرانی و دمای بحرانی کمانش، تأثیر قید یک‌طرفه بر بار بحرانی و دمای بحرانی کاهش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش تعداد لایه‌ها در ضخامت ثابت تأثیر قید یک‌طرفه کاهش می‌یابد.

واژگان کلیدی: آنالیز پایداری،کمانش دوطرفه، کمانش یک‌طرفه، روش ریلی-ریتز، تئوری کلاسیک، فونداسیون الاستیک، پانل‌های استوانه‌ای

فصل اول

مقدمه

1-1 مقدمه

پوسته‌ها یکی از پرکاربردترین اجزاء و قطعات در سازه‌های مهندسی هستند . از جمله مهم‌ترین و گسترده‌ترین کاربرد آن‌ها در مهندسی سازه و مکانیک، ساخت سازه‌هایی نظیر هواپیماها، فضاپیماها و سازه‌های دریایی است و کمتر سیستم سازه‌ی باربر و یا مکانیکی را می‌توان یافت که در ساخت آن از پوسته‌ها استفاده نشده باشد. یکی از نکات مهم طراحی چنین سازه‌هایی که در مقابل بارهای مختلفی قرار دارند ممانعت از ایجاد پدیده کمانش کلی و موضعی است و در واقع کنترل این پدیده یکی از معیارهای اصلی و اساسی در طی روند طراحی این سازه‌ها است. از این رو در روند طراحی قطعات چنین سازه‌هایی بیشینه‌کردن ظرفیت بار کمانشی توصیه می‌شود. از نظر مکانیکی، وقتی رفتار پوسته‌ای که تحت اثر نیروی غشایی یا درون صفحه قرار دارد، به‌گونه‌ای تغییر کند که پوسته مورد نظر، تمایل به خارج شدن از سطح اعمال نیرو را داشته باشد پدیده کمانش رخ می‌دهد؛ این رفتار متأثر از تغییرشکل بزرگ پوسته است.

با نحوه نگرش سختی در آنالیز رفتار تیرها، صفحه‌ها و پوسته‌ها، این سازه‌ها دارای سختی‌های ویژه‌ای(هندسی) در رفتار برون‌صفحه خود هستند. نیروهای درون‌صفحه یا تنش‌های فشاری اثری کاهشی بر سختی سازه دارند در صورتی که نیروها یا تنش‌های کششی اثری افزایشی بر سختی دارند. مقدار کاهش در سختی‌ها

متناسب با میزان اعمال بار یا تنش غشایی فشاری است. با افزایش مقدار این تنش، سختی در لحظه‌ای خاص به اندازه‌ای کاهش می‌یابد که سازه دیگر نمی‌تواند هیچ‌گونه سختی اضافی در مقابل اعمال بار از خود نشان دهد و کمانش می‌کند. در اصطلاح پایداری سازه‌ها، مقدار نیروی غشایی یا تنش فشاری که عضو را در آستانه دوشاخگی در وضعیت تعادل قرار می‌دهد بار بحرانی کمانش نامیده می‌شود.

به موازات توسعه روش‌های عددی تحلیل کمانش، وضعیت‌های خاص کمانش و از جمله کمانش یک‌طرفه نیز مورد توجه محققان قرار گرفت که به عنوان مثال می‌توان از کمانش یک‌طرفه صفحه‌ها پوسته‌ها نام برد. وقتی صفحه یا پوسته در مجاورت یک سطح قرار گرفته باشد و تحت اعمال نیروهای درون‌صفحه‌ای در آستانه کمانش قرار می گیرد، به‌دلیل حضور سطح، نمی‌تواند در موج‌های سینوسی ساده کمانش کند و این چنین تغییرشکل‌هایی که ناشی از کمانش صفحه یا پوسته هستند تمایل به دور شدن از سطح تماس را دارند. این نوع کمانش متفاوت با کمانش معمولی صفحه یا پوسته است و کمانش یک‌طرفه نامیده می‌شود. در کمانش یک‌طرفه، مود کمانشی طول موج‌های کوتاه‌تری داشته و صفحه یا پوسته در مقابل بارهای اعمال شده، سختی بیشتری از خود نشان می‌دهد.

2-1 توسعه و تکامل تئوری پوسته‌ها

لاو اولین محققی بود که توانست تئوری کامل و موفقی برای پوسته‌ها بر اساس تئوری الاستیسیته خطی کلاسیک ارائه کند. او با توسعه فرضیات کرشهاف[1]، تئوری خطی کلاسیک پوسته‌ها را معرفی کرد. این تئوری نقص‌هایی داشت. یکی از این نقص‌ها برخورد دوگانه‌ای بود که با عبارت‌های کوچک و هم‌مرتبه می‌شد که منجر به ایجاد ناسازگاری در معادلات دیفرانسیل می‌گردید. به‌همین خاطر دانشمندان دیگر سعی بر مرتفع کردن این مشکلات کردند. بسیاری از تئوری‌های کلاسیک ارائه شده برای پوسته‌های همگن و همسانگرد نازک بر اساس فرضیات کرشهاف-لاو هستند که به آن‌ها تئوری‌های با تقریب مرتبه اول لاو $(LFAT)$[2] گفته می‌شود. این فرضیات عبارتند از:

1- پوسته نازک است.
2- تغییرشکل‌ها کوچک هستند.
3- تنش عمود بر میان‌سطح در مقایسه با دیگرمؤلفه‌های تنش ناچیز است.

---

[1] Kirchoff

[2] Love First order Approximation Theory

4- خطوط مستقیم عمود بر میان‌سطح، بعد از تغییرشکل هم‌چنان مستقیم و عمود بر میان‌سطح باقی می‌مانند.

اگرچه تعریف دقیقی برای نازکی پوسته‌ها(فرض اول) وجود ندارد اما زمانی‌که نسبت ضخامت به شعاع در برابر عدد یک ناچیز است انتظار است که پاسخ‌های به‌دست آمده از تئوری‌های با تقریب مرتبه اول لاو از دقت کافی برخوردار باشند. فرض دوم تأثیر مستقیمی بر محاسبه مشتقات در معادلات دارد. این فرض باعث می‌شود که تئوری خطی باشد. فرض سوم نیز به‌طور کلی به‌جز نقاطی که در نزدیکی بار متمرکز قرار دارند، معتبر است. براساس فرض چهارم نیز مؤلفه‌های کرنش برشی در راستای عمود بر میان‌سطح ناچیز هستند. تئوری کلاسیک لایه‌ای نیز که با (CLT) نشان داده می‌شود بر مبنای همین فرضیات پایه‌گذاری شده است. نقدی [1] در سال 1956 به صورت کامل به بررسی تئوری‌های کلاسیک پرداخت.

در ادامه توسعه وتکامل تئوری پوسته‌ها، دسته دوم از تئوری‌های الاستیک همگن و همسانگرد برای پوسته‌های نازک و نسبتاً ضخیم که با $(\boldsymbol{LSAT})$ [1] نشان داده می‌شوند ارائه شدند. تئوری‌هایی که در این دسته قرار می‌گیرند بر اساس همه فرضیات کرشهاف-لاو نیستند. به‌عنوان مثال فلوگ [2] در سال 1934، لور [3] در سال 1940 و بیرین [4] در سال 1944 بر اساس فرضیات کرشهاف-لاو به جز فرض نازک بودن، به‌طور جداگانه، به توسعه تئوری پرداختند. علاوه بر نادیده گرفتن فرض نازک بودن، اثرهای تغییرشکل برشی و تنش عمود بر میان‌سطح نیز در تئوری ارائه شده توسط هیلدبراند، ریزنر وتوماس [5] در سال 1949 در نظر گرفته شدند. دانشمندان دیگری هم‌چون دانل [6]، کویتر [7] و نوژیلو [8] نیز با ارائه تئوری‌هایی خطی، بر مبنای فرضیات کرشهاف-لاو، سعی بر مرتفع کردن مشکلات تئوری لاو کردند. اما باید دانست که تنها، تئوری غیرخطی سندرز [9] در سال 1959 بود که به‌طور موفق توانست ناسازگاری‌های تئوری لاو را برطرف کند.

تاکنون تحقیقات بسیاری بر پایداری پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار فشاری محوری انجام گردیده است. لورنز [10] و تیموشنکو[11] از اولین محققانی بودند که کمانش الاستیکی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار فشاری محوری را آنالیز کردند. فون کارمن [12] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای دراز را با معرفی تئوری تغییر شکل‌های بزرگ، بررسی کرد. بتدورف و همکاران [13] نیز کمانش پوسته‌های استوانه‌ای نازک تحت بار فشاری محوری را بر اساس تئوری خطی حل کردند. نتیجه‌های تجربی نشان می‌داد که در تحلیل کمانش، تئوری‌های غیرخطی پوسته‌ها نسبت به تئوری‌های خطی از دقت بالاتری برخوردارند. برای مطالعه بیشتر درباره تاریخچه کمانش پوسته‌های استوانه‌ای [14] را ببینید.

[1] Love Second order Approximation Theory

3-1 تاریخچه کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای مرکب لایه‌لایه

استفاده از رشته‌های تقویت‌کننده مرکب، باعث بهتر شدن خاصیت مهندسی مواد می‌گردد و در عین کاهش وزن، سختی سازه‌ها را افزایش می‌دهد. پانل‌های مرکب لایه‌لایه یکی از مهم‌ترین سازه‌های پرکاربرد در صنایع مهندسی هستند و به صورت پرکاربرد در صنایعی هم‌چون هوافضا، زیردریا، هسته‌ای، نیرو و غیره استفاده می‌شوند. این سازه‌ها تحت بارهای متفاوتی هم‌چون بار فشاری محوری قرار می‌گیرند که ممکن است پایداری سازه را به چالش بکشانند. از این‌رو بررسی رفتار کمانشی آن‌ها بسیار با اهمیت است.

مارچ و همکارش در سال 1945 اولین محققانی بودند که به آنالیز پایداری پوسته‌های استوانه‌ای همگن وعمودسانگرد تحت بارگذاری پیچشی پرداختند. آن‌ها هم‌چنین در سال 1956 بررسی مشابهی را تحت بارگذاری محوری فشاری ارائه کردند [15].

ژانگ و متیوس [16] در سال 1983 به بررسی کمانش اولیه پانل‌های مرکب لایه‌لایه با شعاع انحنای محدود تحت بارگذاری ترکیبی محوری فشاری و برشی پرداختند. آن‌ها معادلات تعادل را براساس فرضیات کرشهاف-لاو استخراج کردند و سپس بار بحرانی کمانش را ارائه کردند و تأثیر انحنا، زاویه الیاف(رشته ها) ، چینش لایه‌ها ونسبت‌های هندسی پانل را بر بار بحرانی کمانش بررسی کردند. آن‌ها هم‌چنین رابطه‌ای بین بار بحرانی محوری و نیروهای برشی برای پانل‌های مرکب لایه‌لایه متقارن ارائه کردند. در پایان نیز نتیجه‌های به‌دست آمده را با نتیجه‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند.

خدیر، ردی و فردریک [17] در سال 1989 حل‌های تحلیلی را برای کمانش، ارتعاش و خمش پوسته‌های استوانه‌ای مرکب لایه‌لایه عمودچین براساس تئوری‌های کلاسیک، تغییرشکل برشی مرتبه اول و سوم پوسته‌ها و با استفاده از روش فضای حالت[1] ارائه کردند. در چند مثال تأثیر شرایط تکیه‌گاهی، تعداد لایه‌ها و اثر تغییرشکل برشی بر تغییرشکل‌ها، تنش‌ها، فرکانس و بار بحرانی کمانش بررسی شده است. آن‌ها نشان دادند که تئوری کلاسیک بار بحرانی کمانش و فرکانس را بیشتر و تغییرشکل‌ها را کم‌تر از تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه اول وسوم پیش‌بینی می‌کند. نتیجه‌های به‌دست آمده از تئوری مرتبه اول نسبت به تئوری کلاسیک، به تئوری مرتبه سوم نزدیک‌تر است؛ اما به مقداری جزیی بار بحرانی کمانش و فرکانس را کم‌تر و تغییرشکل‌ها را بیشتر از تئوری مرتبه سوم پیش بینی می‌کند. آن‌ها در توجیه اختلاف بین دو تئوری مرتبه اول و سوم بیان کردند که تئوری مرتبه سوم با در نظرگرفتن توزیع سهموی تنش‌های برشی در راستای ضخامت که در سطح‌های بالایی و پایینی پوسته صفر هستند، دیگر نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی ندارد.

---

[1] State Space Aproach

رائو و تریپاتی [18] در سال 1990 زاویه الیاف لایه‌های پانل‌های مرکب لایه‌لایه را با هدف افزایش ظرفیت کمانشی به روش اجزای محدود و با استفاده از المان پوسته لایه‌لایه نامتقارن دوجه دوم 48 درجه آزادی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که بهترین راه برای افزایش بار بحرانی کمانش استفاده از لایه‌های با زاویه الیاف $\mathbf{45^0}\pm$ به جای زاویه $\mathbf{0^0}$ یا $\mathbf{90^0}$ است. آن‌ها هم‌چنین استفاده از لایه‌های فقط با زاویه $\mathbf{45^0}+$ یا $\mathbf{-45^0}$ به جای زاویه‌های $\mathbf{0^0}$ یا $\mathbf{90^0}$ که به‌دلیل ایجاد اثر درهم‌گیرش[1] چرخشی-خمشی، باعث کاهش بار بحرانی کمانش می‌شوند را توصیه نکردند.

کررا [19] در سال 1990 معادلات تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد را برای پوسته‌های از دو سو انحنادار[2] ناهمسانگرد لایه‌لایه عمودچین براساس تئوری فلوگ و با در نظر گرفتن اثرهای تغییرشکل برشی ارائه کردند. ایشان هم‌چنین معادلات را براساس تئوری‌های کلاسیک لاو و کلاسیک دانل نیز به دست آورد. سپس با ارائه نتیجه‌ها برای پوسته‌های استوانه‌ای و کروی به مقایسه تئوری‌ها با توجه به پارامترهای هندسی متفاوت پرداخت.

نوزیر و ردی [20] در سال 1991 روش تحلیلی جدیدی را برای تعیین مقادیر ویژه مسایل پایداری و ارتعاش آزاد پوسته‌های لایه‌لایه عمودچین معرفی کردند. برای ارائه روش، از تئوری تغییرشکل برشی دانل و تئوری کلاسیک دانل استفاده شده است. آن‌ها شرایط تکیه‌گاهی متفاوتی را بررسی کردند و در پایان روش تحلیلی جدیدشان را برای حل (از نوع لوی) مسایل پایداری و ارتعاش صفحه‌ها و پانل‌های مرکب لایه‌لایه با معادلات دیفرانسیل دارای تعداد و مرتبه بیشتر از به ترتیب 3 و 8 پیشنهاد کردند.

جانکی و نایت [21] در سال 1998 به مقایسه بار کمانش پانل‌های استوانه‌ای دایره‌ای مرکب لایه‌لایه همگن همسانگرد و ناهمسانگرد براساس سه تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول سندرز-کویتر 1959، لاو 1927 و دانل 1957 و با استفاده از روش ریلی-ریتز تحت بار محوری فشاری در شرایط تکیه‌گاهی متفاوت پرداختند. آن‌ها نشان دادند که تئوری دانل در مقایسه با تئوری سندرز وابسته به درجه ناهمسانگردی مواد و پارامترهای هندسی هم‌چون شعاع به ضخامت و طول به شعاع در پانل‌های با شعاع انحنای محدود دچار خطا است. اما نتیجه‌های تئوری لاو به نتیجه‌های تئوری سندرز نزدیک‌تر است. آن‌ها بیان کردند که نادیده گرفتن نیروی برشی محیطی در استخراج معادلات تعادل در راستای محیطی در تئوری دانل و نادیده‌گرفتن سهم جابجایی در راستای ضخامت و طولی پانل در عبارت‌های چرخشی در تئوری لاو عامل اصلی اختلاف با تئوری سندرز (که کامل‌ترین تئوری پوسته است) می‌باشد.

---

[1] Coupling

[2] Doubly curved shell

هو و یانگ [22] در سال 2006 به آنالیز بهینه‌سازی کمانش پانل‌های استوانه‌ای دایره‌ای مرکب لایه‌لایه متقارن تقویت‌شده[1] تحت بار محوری فشاری پرداختند. آن‌ها با تغییر زاویه الیاف با استفاده از روش برنامه‌نویسی مداوم خطی[2] به دنبال افزایش بار بحرانی کمانش به‌دست آمده از تحلیل دوشاخگی کمانش نرم‌افزار ***ABAQUS*** بودند. از کارهای اخیر نیز می‌توان به [23] اشاره کرد که توسط ژانگ و خان در سال 2010 ارائه شد. آن‌ها در این مقاله با استفاده از روش اجزای محدود به بحث در زمینه کمانش پانل‌ها و صفحه‌هایی که به‌طور خاص در صنعت کشتی‌سازی استفاده می‌شوند، پرداختند.

برای مطالعه بیشتر تاریخچه کمانش پوسته‌های مرکب، مقالات ارائه شده توسط آمبارتسمیان [24] در سال 1974، تنیسان [15] در سال 1975 و اسمیت [25] در سال 1986 را ببینید.

4-1 تاریخچه کمانش گرمایی پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای مرکب لایه‌لایه

مواد مرکب به‌خاطر مزایایی که در تقویت و افزایش مقاومت ماده دارند به صورت گسترده در ساخت سازه‌هایی که در محیط‌های با دمای بالا قرار دارند استفاده می‌شوند. از جمله پوسته‌های استوانه‌ای که در طراحی سیستم‌های سازه‌ای هم‌چون هواپیماهای مافوق صوت[3] و فراصوتی[4]، موشک‌ها، راکت‌ها، ماهواره‌ها، خطوط لوله نیروگاه‌های هسته‌ای، دیگ‌های جوشان[5]، مبدل‌های گرمایی، مخازن تحت فشار و غیره کاربرد دارند. یکی از مهم‌ترین مشکلات این‌گونه سازه‌ها، رخداد کمانش در اثر تغییرات دمایی است. از این‌رو مطالعه و بررسی تنش‌های گرمایی و تغییرشکل‌های ناشی از این پدیده در راستای افزایش بهره‌وری و قابلیت تحمل باربری، اهمیت بالایی دارد.

اغلب کارهای موجود به کمانش مکانیکی پوسته‌ها و کمانش گرمایی صفحه‌های مرکب لایه‌لایه محدود هستند و کم‌تر به کمانش گرمایی پوسته‌ها پرداخته شده است. یکی از اولین مطالعات در زمینه کمانش گرمایی توسط هاف [26] در سال 1957 انجام شد. او به تحلیل کمانش گرمایی یک پوسته استوانه‌ای نازک پرداخت. زوک [27] در سال 1957 آنالیز کمانش گرمایی یک پوسته استوانه‌ای بر روی تکیه‌گاه گیردار را با استفاده از روش گالرکین ارائه کرد.

---

[1] Fiber-reinforced

[2] Sequential linear programming

[3] Supersonic

[4] Hypersonic

[5] Boiler

ابیر وناردو [28] در سال 1959، هاف و همکاران [29] در سال 1964 و راس و همکاران [30] و [31] در سال 1965و 1966 نیز به تحلیل‌های مشابهی در محیط‌های دمایی متفاوت پرداختند. همه این بررسی‌ها و مطالعات به مواد همگن همسانگرد محدود بودند.

گاپتا و وانگ [32] در سال 1971 اولین محققانی بودند که به بررسی ناپایداری پوسته‌های استوانه‌ای عمودسانگرد تحت توزیع بار گرمایی محوری متقارن با استفاده از روش ریلی-ریتز پرداختند. رادهامون و ون کاتارامانا [33] سال 1975 هم مانند گاپتا و همکارش به بحث در زمینه کمانش گرمایی پوسته‌های عمودسانگرد با صرف‌نظر کردن از ضریب انبساط گرمایی برشی پرداختند.

چانگ و چو [34] در سال 1990 به آنالیز کمانش گرمایی پانل‌های استوانه‌ای مرکب لایه‌لایه نامتقارن تحت افزایش دمایی گسترده یکنواخت بر روی تکیه‌گاه لولایی، براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا و با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند. آن‌ها نتیجه‌های به دست آمده را با نتیجه‌های تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول ارائه شده توسط ریزنر-میدلاین مقایسه کردند(همان‌طورکه می‌دانیم اثر تغییرشکل برشی ناشی از مؤلفه‌های در راستای ضخامت در هر دو تئوری و اثر تغییرشکل عمود در راستای ضخامت فقط در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا در نظر گرفته می‌شود). آن‌ها نشان دادند که دمای بحرانی کمانش به‌دست آمده از تئوری مرتبه اول بیشتر از دمای به‌دست آمده از تئوری مرتبه بالا است. بنابراین آن‌ها تئوری مرتبه بالا را برای تحلیل مسأله پیشنهاد کردند. آن‌ها هم‌چنین تأثیر نسبت‌های درون صفحه‌ای چون ضریب انبساط گرمایی و مدول الاستیسیته، زاویه الیاف لایه‌ها، تعداد لایه‌ها و غیره را بر دمای بحرانی کمانش بررسی کردند.

گوتسیس وگاپتیل [35] در سال 1993 با استفاده از روش اجزای محدود سه‌بعدی مطالعات پارامتری در بررسی تأثیر پارامترهایی هم‌چون طول، ضخامت، فشار هیدرواستاتیک داخلی، ضخامت متفاوت در لایه‌ها، محیط‌های دمایی متفاوت در راستای ضخامت، چینش لایه‌ها و غیره بر پوسته‌های استوانه‌ای انجام دادند. آن‌ها نشان دادند که ضخامت لایه‌ها و زاویه الیاف بر دمای بحرانی کمانش اثر قابل توجهی دارد.

بیرمان و برت [36] در سال 1993 تأثیر دما بر کمانش و پس از کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و صفحه‌های مرکب تقویت شده و تقویت‌نشده را بررسی کردند. در ابتدا آن‌ها معادلات تعادل یک پوسته که به‌طور هم‌زمان تحت بارگذاری مکانیکی محوری و میدان دمایی قرار دارد را استخراج کردند. سپس از این معادلات برای به‌دست آوردن یک شکل کلی از معادلات جبری توصیف‌کننده پاسخ پس از کمانش یک پوسته استفاده کردند. در پایان آن‌ها معادلات‌شان را برای پیش‌بینی رفتار پس از کمانش یک پانل با شعاع انحنای بی‌نهایت تحت بارگذاری ترمومکانیکی به‌کار بردند.

اسلامی و جواهری [37] در سال 1999 به آنالیز کمانش پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای مرکب لایه‌لایه نازک تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی پرداختند. آن‌ها معادلات پایداری خطی را براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا و با استفاده از روابط کرنش-جابجایی سندرز به‌دست آوردند. این معادلات با معادلات پایداری ارائه شده توسط دانل مقایسه شد. نتیجه‌ها نشان داد که این معادلات نسبت به معادلات پایداری دانل از دقت بیشتری در تعیین بار بحرانی کمانش برخوردارند.

پاتل و همکاران [38] در سال 2003 ویژگی‌های پایداری پوسته‌های استوانه‌ای مرکب لایه‌لایه عمودچین با مقطع‌های دایره‌ای شکل و بیضی شکل تحت توزیع دمایی گسترده یکنواخت را براساس آنالیز غیرخطی استاتیکی و با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کردند. آن‌ها هم‌چنین تأثیر پارامترهای مختلفی چون پارامتر خروج از مرکز[1]، تعداد لایه‌ها ، خواص مواد و غیره را بر پایداری پوسته نشان دادند.

توپال و ازمن [39] در سال 2008 به آنالیز بهینه‌سازی کمانش گرمایی پوسته‌های استوانه‌ای مرکب لایه‌لایه اریب‌چین تحت توزیع دمایی گسترده یکنواخت براساس تغییرشکل برشی مرتبه اول و با استفاده از روش ***MFDM***[2] پرداختند. آن‌ها هم‌چنین اثر تعداد لایه‌ها، نسبت طول به شعاع و شرایط تکیه‌گاهی را بر دمای بحرانی بهینه بررسی کردند.

تورنتون [40] در سال 1993 به طور خلاصه به بررسی کارهای انجام شده در زمینه کمانش و پس از گرمایی صفحه‌ها، پوسته‌های کوتاه، پانل‌های با شعاع انحنای محدود، پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی همگن همسانگرد و مرکب پرداخت. ایشان هم‌چنین معادلات حاکم بر کمانش گرمایی چند مسأله کاربردی ویژه را در به‌دست آوردن دمای بحرانی کمانش ارائه کرد. مرور بیشتر بر کارهای انجام شده در زمینه کمانش گرمایی را می‌توانید در [41] که توسط نور و برتون در سال 1992 ارائه شده است، ببینید.

1-5 تاریخچه کمانش یک‌طرفه

گاهی اوقات سازه‌ها در مجاورت با اجزای دیگری قرار می‌گیرند. حال اگر سازه در معرض پدیده کمانش قرار گیرد، به این نوع از کمانش به خاطر این‌که عضو کمانش کننده توسط جزء دیگر به‌گونه‌ای مقید می‌شود که فقط در یک سوی خارج از سطح اعمال نیرو کمانش کند، کمانش یک‌طرفه گفته می‌شود. کمانش یک‌طرفه از

---

[1] Non-circularity

[2] Modified feasible direction method

نوع مسأله‌های تماسی می‌باشد. تاکنون محققان زیادی این گونه مسائل را با این فرض که یکی از دو عضو در حال تماس به عنوان فونداسیون دیگری باشد، تحلیل کرده‌اند.

در کل سطح تماس بین دو عضو در حال تماس از نظر تأثیر قید کششی در دو کلاس متفاوت از سطح تماس بررسی می‌شود. در نوع اول، قید کششی همانند قید فشاری وجود دارد. به‌همین دلیل سطح تماس بین دو عضو مشخص می‌باشد. بنابراین با حل یک دستگاه معادلات خطی مسأله کمانش، تحلیل می‌شود. گاهی اوقات سطح تماس، توانایی اعمال قید کششی را ندارد. بنابراین سطح تماس فقط شامل قید فشاری است. به‌عبارت دیگر فونداسیون زمانی به تغییر شکل عضو کمانش‌کننده پاسخ می‌دهد که عضو در حال فرو رفتن در آن باشد. این ویژگی دوگانه فونداسیون باعث نامشخص بودن سطح تماس می‌شود. در این پایان‌نامه در مسأله کمانش یک‌طرفه به بررسی سطح تماس نوع دوم می‌پردازیم که از سال 1970 مورد توجه قرار گرفته است.

ویتسمن [42] در سال 1970 اولین محققی بود که حل تحلیلی برای مسائلی که دارای سطح تماس از نوع دوم می‌باشند ارائه کرد. وی در ارائه مدل فیزیکی جدید فونداسیون، از دو مدل ارائه شده توسط وینکلر و ریزنر با فرض این‌که تنش کششی در سطح تماس بین دو عضو وجود ندارد، استفاده کرد. هم‌چنین در توسعه این فونداسیون، به بررسی مثال‌هایی از سازه‌هایی تیری و صفحه‌ای بدون وزن، که تحت تأثیر بار متمرکز قرار گرفته‌اند، پرداخت.

یان و همکاران [43] در سال 1985 مدلی برای کمانش خطوط لوله تحت فشار داخلی ارائه کردند. آن‌ها خطوط لوله مورد بررسی را با ارائه مدلی از یک تیر سنگین که بر روی یک فونداسیون و تحت بار محوری قرار داشت، مدل کردند. فونداسیون مورد بررسی، دارای سطح تماس از نوع دوم بود. آن‌ها هر دو نوع فونداسیون الاستیک و صلب را بررسی کردند.

شاوان و واس [44] در سال 1994 با استفاده از روش گالرکین و بر اساس تئوری کلاسیک به بررسی رفتار کمانشی یک صفحه مستطیلی که از یک طرف به‌وسیله فونداسیون مقید شده است، پرداختند. آن‌ها برای مدل کردن فونداسیون، از شبکه‌ای متشکل از فنرهای غیرخطی استفاده کردند. هم‌چنین آن‌ها به بررسی تأثیر شرایط مرزی متفاوت و عمودسانگردی مواد بر کمانش یک طرفه صفحه نیز پرداختند. علاوه بر آن، آن‌ها [45] در سال 1998 با استفاده از دو روش تحلیلی و آزمایشگاهی به بررسی رفتار کمانشی یک صفحه مستطیلی لایه‌لایه که به صورت یک‌طرفه توسط یک فونداسیون مقید شده است، پرداختند. برای بررسی تحلیلی از روش گالرکین و بر اساس تئوری کلاسیک با توجه به فرضیات کرشهاف-لاو استفاده کردند.

اسمیت و همکاران در سال 1999 پایداری یک صفحه مستطیلی که به صورت یک‌طرفه مقید شده است را تحت بار برشی با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت بر اساس روش ریلی-ریتز مطالعه کردند[46] و [47] آن‌ها فونداسیونی را در نظر گرفتند که ویژگی دوگانه‌ای داشت. آن‌ها هم‌چنین بررسی‌های مشابهی برای یک صفحه مستطیلی که تحت بارگذاری محوری فشاری، برشی و خمشی قرار دارد

[48] و [49] را نیز انجام دادند و نتیجه‌ها را با [50] که به صورت تجربی به دست آمده، مقایسه و تأیید کردند.

باترورث [51] در سال 2007 کمانش چارچوب‌های بتنی تحت بارگذاری فشاری محوری و خمشی را با استفاده از روش اجزای محدود تحلیل کردند. در این تحقیق چارچوب‌ها به صورت صفحه‌های نامحدود دوسانگرد و بتن به صورت فونداسیون صلب مدل شده‌اند. ایشان نشان دادند که بار کمانشی بتن با استفاده از چارچوب‌ها افزایش می‌یابد. از این‌رو چارچوب‌ها برای افزایش قدرت باربری تیرها وستون‌ها به‌کار می‌روند.

صفحه‌های تقویت‌کننده تیرهای بتنی توع خاصی از مسأله کمانش یک‌طرفه می‌باشند که تحلیل آن‌ها برای محققان از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. برای مثال اسمیت و همکاران [49] در سال 1999 کمانش موضعی تیرهای بتنی تحت بار فشاری محوری، خمشی و برشی را با استفاده از روش ریلی-ریتز مورد بررسی قرار دادند. هدایتی و همکاران [**Error! Reference source not found.** در سال 2007 به بررسی کمانش موضعی یک صفحه مستطیلی که با پیچ شدن به یک فونداسیون بتنی تقویت شده است، پرداختند. برای تحلیل مسأله از روش ریلی-ریتز استفاده کردند و برای اعمال قیدها روش ضرایب لاگرانژ را به‌کار گرفتند.

ما وهمکاران [53] در سال 2007 با نوشتن معادلات دیفرانسیل برای یک صفحه مرکب لایه‌لایه که لایه‌های صفحه مورد نظر در ناحیه‌هایی از هم جدا شده بودند به آنالیز کمانش تماسی تحت بار محوری فشاری پرداختند. آن‌ها هم‌چنین

[54] در سال 2008 به تحلیل رفتار پروفیل‌های نازک که بر روی دیوارهای کامپوزیتی پانلی شکل قرار دارند، پرداختند. آن‌ها برای شبیه‌سازی مسأله تماسی، پروفیل را با صفحه‌های بی‌نهایت دراز، نازک و عمودسانگردی که بر روی فونداسیون بدون کشش قرار دارند، مدل کردند. سپس با نوشتن معادلات دیفرانسیل حاکم، بار بحرانی کمانش موضعی را به دست آوردند. تفاوت این کار با کار قبلی‌شان در این است که در دومی صفحه بر روی فونداسیون مورد نظر بوده است اما در اولی فونداسیونی وجود ندارد.

مورادوا و همکاران [55] در سال 2009 به بررسی کمانش یک صفحه مستطیلی بر اساس تئوری فون-کارمن که از دو سو توسط فونداسیون مقید شده است، پرداختند. این فونداسیون به دو صورت وینکلر و فونداسیون

بدون کشش در نظر گرفته شد. صفحه دارای تکیه‌گاه مفصلی بود که تحت بارگذاری کششی و فشاری محوری قرار گرفته بود. آن‌ها از تکنیک‌های عددی براساس اصل تغییرات و روش طیفی استفاده کردند. هم‌چنین آن‌ها برای تشخیص ناحیه تماس یک پارامتر تعریف شده را به‌کار بردند.

1-6 اهمیت موضوع و هدف

همان‌گونه که بیان شد پوسته‌ها از پرکاربردترین قطعات در سازه‌های مهندسی می‌باشند. از این‌رو تحلیل رفتار آن‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف در شرایط مرزی متفاوت در طراحی سازه‌ها بسیار با اهمیت است. سازه باید باربری و پایداری لازم تحت بارگذاری را داشته باشد. یکی از نکات مهم طراحی چنین سازه‌هایی که در مقابل بارهای مختلفی قرار دارند ممانعت از ایجاد پدیده کمانش کلی و موضعی است و در واقع کنترل این پدیده یکی از معیارهای اصلی و اساسی در طی روند طراحی این سازه‌ها است.

در این پایان‌نامه به‌طور خاص پروفیل‌های پانلی شکلی مورد نظر بوده است که بر روی اجزا یا سازه‌های دیگر قرار دارند. پانل‌هایی که برای تقویت سازه‌ها، ستون‌ها و تیرهای بتنی یا فلزی، اتصالات و اجزای مکانیکی همانند مخازن وسیستم‌های لوله‌کشی صنعتی به‌کار برده می‌شوند. سازه‌هایی که رفتارشان را می‌توان با فونداسیون الاستیکی بدون کشش مدل کرد. پانل‌های مورد بررسی از جنس همگن همسانگرد و مرکب لایه‌لایه بوده که تحت تأثیر نیروهای مکانیکی و گرمایی کمانش می‌کنند؛ اما توسط فونداسیون بدون کشش مقید می‌شوند که فقط در یک سوی خارج از سطح اعمال نیرو کمانش کنند. این نوع از کمانش، کمانش یک‌طرفه نامیده می‌شود. تاکنون این نوع از کمانش، فقط بر روی تیرها و صفحه‌ها تحلیل شده است.

1-7 روش حل

با توجه به اینکه کمانش یک‌طرفه به عنوان یک مسأله تماسی شناخته شده است لذا برای حل کمانش یک‌طرفه پوسته می‌توان از روش‌های عددی استفاده نمود. روش‌های عددی هم چون اجزای محدود، تفاضل محدود، نوار محدود، المان‌های مرزی، روش گالرکین و روش ریلی-ریتز از جمله روش‌های تقریبی می‌باشند که تاکنون جهت بررسی مسأله کمانش یک‌طرفه استفاده شده‌اند. در این پایان‌نامه از روش ریلی-ریتز برای تحلیل مسأله مورد نظر استفاده شده است.

در تمامی این روش‌ها با روند تکرار، ماتریس‌های سختی و هندسی تشکیل می‌شوند و تأثیر قید یک‌طرفه از طریق یک تابع افزوده و یا به کمک ضرایب لاگرانژ در حل مسأله منظور می‌شود. وضعیت قید یک‌طرفه، به‌طور مستقیم، دلیل موجهی برای غیرخطی بودن رفتار فونداسیون الاستیکی است. مود کمانشی پوسته با اعمال تدریجی یک تابع سختی به سیستم به دست می‌آید. چگونگی این سختی با درجات آزادی ناشی از تماس یا تداخل در فونداسیون الاستیکی مرتبط می‌باشد. قیدهای یک‌طرفه با این ویژگی تعریف می‌شوند که قادر به تحمل تنش‌های کششی عمود بر سطح تماس نیستند. ناحیه تماس به نحوه بارگذاری، سختی پوسته و سختی فونداسیون الاستیکی بستگی دارد. در بارگذاری عمودبر میان‌سطح، وقتی بارگذاری متقارن است مسأله ساده می‌باشد.اما هنگامی‌که بارگذاری نامتقارن است نمی‌توان مسأله را صریحاً حل نمود بنابراین یک روند حل تکراری برای تعیین ناحیه تماس نیاز می‌باشد.

1-8 محتوای فصل‌های بعدی

فصل‌های بعدی در این پایان‌نامه به این صورت تنظیم شده‌اند؛ نخست در فصل دوم تعریف‌های مقدماتی درباره اصل کمینه انرژی پتانسیل، اصل کار مجازی، روش عددی مورد استفاده، مواد مرکب وسازه‌های لایه‌لایه داده شده است. در فصل سوم پوسته‌های نازک، روابط سینماتیکی، معادلات ساختاری، نیروها وگشتاورها تعریف شده‌اند و معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار آن در تغییر شکل‌های کوچک براساس روش تعادلی آمده است. در فصل چهارم به توضیح درباره نگاشت دستگاه مختصات، توابع شکل مورد استفاده و شرایط تکیه‌گاهی پرداخته شده است. در فصل پنجم علاوه بر تعریف مدل فونداسیون، معادلات پایداری پانل مرکب لایه‌لایه برانگیخته شده با نیروهای مکانیکی درون‌صفحه‌ای وگرمایی براساس اصل کار مجازی استخراج شده است. در فصل ششم نیز مثال‌های حل شده کمانش یک‌طرفه پانل مرکب لایه‌لایه و نتیجه‌گیری‌ها ارائه شده است.

فصل دوم
تعریف‌های مقدماتی

2-1 مقدمه

هنگامی‌که پوسته در سطح میانی خود فشرده می‌شود، نزدیک به مقدار بار بحرانی ناپایدار می‌گردد و کمانش می‌کند. حل دقیق معادله کمانش مستلزم دشواری و دقت زیادی است و شرایطی که منجر به یافتن کمینه مقدار ویژه یا بار حقیقی کمانش شود، در بسیاری از موقعیت‌ها واضح و آشکار نیست. این مطلب به‌ویژه در مورد پوسته‌هایی که بر فونداسیون الاستیکی یک‌طرفه واقع شده‌اند و یا پوسته‌هایی که دارای شکل‌های هندسی پیچیده هستند، صادق است. از این‌رو استفاده از روش‌های تقریبی و عددی به موازات توسعه رایانه‌ها، کاربرد فراوانی یافته است. از جمله روش‌های تقریبی به روش‌هایی چون ریلی-ریتز و گالرکین و از روش‌های عددی به روش‌هایی چون المان محدود، نوار محدود و تفاضل محدود می‌توان اشاره کرد. در پایان‌نامه حاضر از روش ریلی-ریتز جهت حل مسأله کمانش استفاده شده است که روشی بر اساس اصل کار مجازی است.

با استفاده از روش‌های انرژی به عنوان روش جایگزین روش‌های تعادلی[1]، آنالیز تغییر شکل و آنالیز تنش در یک جسم الاستیک را می‌توان انجام داد. همان‌طور می‌دانیم که روش‌های تعادلی به روش‌های نیوتنی و روش‌های انرژی به روش‌های لاگرانژی معروف هستند، روش‌های لاگرانژی بر این اصل استوار هستند که معادلات حاکم بر یک جسم الاستیک تغییرشکل‌یافته با کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل مربوط به تغییر شکل و بارگذاری قابل استخراج است.

---

[1] Equilibrium methods

روش‌های انرژی در آنالیز مسایلی که دارای شکل‌های نامنظم، بارهای غیریکنواخت، سطح مقطع‌های متغیر و مواد ناهمسانگرد هستند، بسیار مؤثر است. در این فصل تعریف‌های مقدماتی در مورد اصل کار مجازی و اصل کمینه انرژی پتانسیل ارائه شده است .

2-2 اصل کمینه انرژی پتانسیل

قضیه انرژی پتانسیل ایستا به صورت زیر تعریف می‌شود:

"یک سازه(خطی و یا غیرخطی) هنگامی در حال تعادل است که در اثر تغییر مکان جزیی هیچ‌گونه تغییری در مقدار انرژی پتانسیل کل ایجاد نشود."

اگر U و W به ترتیب نشان دهنده انرژی تغییر شکل سازه(انرژی کرنشی) و انرژی پتانسیل نیروهای خارجی وارد بر سازه باشند، مجموع این دو کمیت را انرژی پتانسیل کل سازه Π می‌نامند:

$$\Pi = U - W \tag{1-2}$$

بیان ریاضی قضیه ایستایی انرژی پتانسیل به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\delta\Pi = \delta(U - W) = 0 \tag{2-2}$$

عمل‌گر δ نیز بیان‌گر تغییرات[1] یک کمیت است و نشان‌دهنده مقدار تغییری است که تحت اثر یک تغییر مکان جزیی اختیاری یا تغییر مکان مجازی به‌وجود می‌آید. قضیه انرژی ایستا که نخستین بار توسط کرشهاف در مکانیک به‌کار برده شد و گاهی به نام قضیه کرشهاف خوانده می‌شود به‌این معناست که تعادل سازه در حالتی برقرار خواهد شد که انرژی پتانسیل کل آن ایستا(کمینه، بیشینه و یا خنثی) باشد. اگر برای ایجاد تغییر شکل در سازه، افزودن انرژی به آن لازم باشد، تعادل پایدار و انرژی پتانسیل کل کمینه است و چنان‌چه سازه ضمن تغییر شکل از خودش انرژی آزاد کند در این صورت تعادل ناپایدار و انرژی پتانسیل کل بیشینه است. اگر تغییر شکل سازه بدون جذب و یا آزاد نمودن انرژی باشد، تعادل خنثی است. محاسبه بار بحرانی، تعیین باری است که تحت اثر آن تعادل خنثی ممکن باشد، یعنی باری که در اثر آن تعادل وضعیت تغییر شکل یافته سازه امکان پذیر است.

[1] Variation

3-2 اصل کار مجازی

فرض کنید که یک جسم الاستیک تحت نمو جابجایی دلخواه یا به اصطلاح تغییر مکان مجازی قرار گیرد. این تغییر مکان‌ها نیازی نیست که واقعاً اتفاق بیافتند و یا بی‌اندازه کوچک باشند. اما اگر کار انجام شده بر روی جسم، تغییر مکانی بی‌اندازه کوچک ایجاد کند، منطقی است که سیستم نیروهای عمل کننده بر روی جسم ثابت فرض شود. در این صورت به واسطه تغییر مکان ایجاد شده، دیگر تغییری در معادلات تعادل حاکم بر یک جسم، ایجاد نمی‌شود.

کار انجام شده توسط نیروهای سطحی T بر واحد سطح جسم در فرآیند تغییرمکان مجازی از یک حالت تعادل اولیه به یک حالت تعادل دیگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta W = \iint_{\Omega_0} \left(T_x \delta u + T_y \delta v + T_z \delta w\right) d\Omega \tag{3-2}$$

در این‌جا $d\Omega$ المان سطح T_x، T_y و T_z مؤلفه‌های نیروهای سطحی و δu، δv و δw مؤلفه‌های میدان جابجایی به ترتیب در راستاهای x ، y و z هستند. هم‌چنین انرژی کرنشی δU به‌دست آمده توسط یک جسم الاستیک به حجم dV به عنوان نتیجه جابجایی مجازی عبارتست از:

$$\delta U = \iiint_{V_0} \left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}\right) dV \tag{4-2}$$

انرژی کرنشی در واقع همان کار انجام شده توسط نیروهای داخلی است که کار داخلی نیز نامیده می‌شود. کل کار انجام شده در طی جابجایی مجازی صفر می‌باشد:

$$\delta\Pi = \delta(U - W) = 0$$

بنابراین اصل کار مجازی برای یک جسم الاستیک که بیان‌گر تساوی کار داخلی و کار خارجی است به‌صورت زیر قابل ارائه است:

$$\delta U = \delta W \tag{5-2}$$