دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش آنالیز

عنوان

بهترین تقریب یکنواخت، در رده چندجمله‌ای‌ها

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

پژوهشگر

سکینه سهیلی مقدم

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: سهیلی مقدم نام: سکینه

عنوان: بهترین تقریب یکنواخت، در رده چندجمله‌ای‌ها

استاد راهنما: دکتر مهدی ایرانمنش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۲

واژگان کلیدی: الگوریتم رمس، بهترین تقریب یکنواخت در مجموعه چندجمله‌ای‌ها، مجموعه متناوب، چندجمله‌ای‌های چبیشف، خطای تقریب

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا با استفاده از روش‌های عددی و معرفی الگوریتمی به‌نام الگوریتم رمس، بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را محاسبه می‌کنیم، در ادامه مفاهیم اولیه چندجمله‌ای‌های چبیشف، تقریب توابع و بهترین تقریب یکنواخت چندجمله‌ای‌ها را معرفی کرده و سپس با استفاده از قضیه تناوبی چبیشف و نیز ویژگی‌های چندجمله‌ای چبیشف به بررسی بهترین تقریب یکنواخت از نوع چندجمله‌ای‌ها، برای رده‌ای از توابع گویا می‌پردازیم. در پایان قضایایی در مورد بهترین تقریب این دسته از توابع، و نیز مجموعه‌های متناوبی برای خطای تقریب این توابع به‌دست می‌آوریم.

تقدیم به همه ی کسانی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] دکتر علی شریعتی

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکترمهدی ایرانمنش، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین لازم می‌دانم از پدید آورندگان بسته زی‌پرشین، مخصوصاً جناب آقای وفا خلیقی، که این پایان‌نامه با استفاده از این بسته، آماده شده است و نیز از آقای دکتر مرتضی فغفوری و آقای محمود امین‌طوسی به خاطر پاسخ‌گویی به سوالاتم در مورد LaTeX، کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ همسرم که در تمام مراحل زندگی پشتیبان من است کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

سکینه سهیلی مقدم

۱۳۹۲

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
مقدمات

پیشگفتار

با روش‌های ریاضی می‌توان هر پدیده را بر حسب یک سری از توابع پایه(مثلثاتی یا چندجمله‌ای) مانند $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p_j(x)$ با دقت مناسب تقریب زد (بردن و همکاران ۱۹۸۰).

اما این که چه پدیده‌ای را با چه نوع تابعی تقریب بزنیم کاملا بستگی به رفتار آن پدیده دارد که به کدام نوع تابع پایه نزدیک‌تر است. مناسب بودن یک سری از توابع پایه نسبت به یک سری دیگر بدین معنا است که می‌توان در تعداد جملات کمتری از سری به دقت دلخواه رسید.

با این تفسیر از آن جا که p_nها خود چندجمله‌ای هستند، وچندجمله‌ای‌ها تابع نیز هستند، بهترین توابع پایه برای تقریب آن‌ها چندجمله‌ای‌های دیگر خواهد بود، بنابراین می‌توان از روش‌های تقریب چندجمله‌ای استفاده کرد.

ازجمله کاربردهای چندجمله‌ای‌ها می‌توان به تقریب توابع در آنالیزعددی، معادله مشخصه ماتریس‌ها در جبر خطی و تعیین رنگ در رنگ آمیزی گراف، اشاره کرد. سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که هدف از تقریب یک تابع به یک چندجمله‌ای چیست؟

پاسخی که به این سوال داده می‌شود این است که انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری چندجمله‌ای‌ها به مراتب ساده‌تر از توابع است، هم‌چنین کامپیوتر می‌تواند آن‌ها را به‌طور دقیق ارزیابی و مقداردهی کرده و عملیات مورد نیاز را روی آن‌ها ساده‌تر انجام دهد.

بنابر نظریه وایرشتراس هر تابع پیوسته در بازه $[a, b]$ را می‌توان به‌صورت یکنواخت و با دقت دلخواه با یک چندجمله‌ای تقریب زد (رودین ۱۹۷۳).

البته خود چندجمله ای‌ها نیز از این قاعده مستثنی نیستند و با استفاده از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که یک چندجمله‌ای مرتبه بالا را در بازه‌های کوچکتری از دامنه تعریفشان می‌توان با

استفاده از چندجمله‌ای مرتبه پایین تقریب زد، که استفاده از این چندجمله‌ای مرتبه پایین باعث تسریع محاسبات خواهد شد.

در این پایان نامه تقریب توابع در سه فصل مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل اول ابتدا به معرفی پژوهش‌هایی که تا کنون برای به‌دست آوردن بهترین تقریب توابع توسط چندجمله‌ای‌ها انجام شده، می‌پردازیم، سپس در ادامه تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای به‌دست آوردن بهترین تقریب توابع را بیان می‌کنیم.

درفصل دوم با استفاده از روش‌های عددی، بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را به‌دست می‌آوریم.

هدف ما در فصل سوم این پایان‌نامه به‌دست آوردن بهترین تقریب یکنواخت توابع گویا در مجموعه چندجمله‌ای‌ها است.

۱.۱ پیشینه پژوهشی

مساله بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها از دیدگاه‌های متفاوتی بررسی شده است. ساده‌ترین حالت تقریب با چندجمله‌ای‌ها، تعیین خط مماس برای یک تابع مشتق‌پذیر در نقطه‌ای مانند $x_۰$ ظاهر می‌شود.

در حقیقت خط مماس در یک نقطه مانند $x_۰$ ساده‌ترین چندجمله‌ای از درجه یک است، که معمولا تابع f را در نزدیکی $x_۰$ به‌خوبی تقریب می‌زند.

برنشتاین [۱][۸]در سال ۱۹۷۳ اثبات کرد که اگر $f(x)$ تابعی پیوسته با دوره تناوب ۲π، و سری فوریه

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k \cos n_k(x)$$

باشد، با این شرط که $a_k > ۰$ و $\frac{n_{k+۱}}{n_k} = ۲p_k + ۱$ که p_k عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه داریم:

$$E_n(f) = \sum_{k=n+۱}^{\infty} a_k$$

که $(n_j \leq n \leq n_j + ۱)$.

علاوه بر این نیومن و ریولین[۲][۷] در سال ۱۹۷۶ نشان داده‌اند که اگر تابع f به شکل

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k T_k(x)$$

---

[۱] Bernstein

[۲] Newman

تعریف شود و a_k ها مثبت و صعودی باشند و در رابطه $a_k \leq a_{k-1}a_{k+1}$، ($k \geq 1$) صدق کنند، و $T_k(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه k باشد، آنگاه خطای تقریب تابع f در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$E_n(f) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq 4eE_n(f).$$

موضوع اصلی در مساله تقریب توابع، بررسی وجود، یکتایی و مشخصه‌هایی برای این مساله است. وجود و یکتایی مساله بهترین تقریب تابع $f \in C[d,e]$ با نرم L_m توسط واتسون[۳][۲] در سال ۱۹۸۰ و ریولین[۴][۱] در سال ۱۹۸۱ اثبات شده است. همچنین قضایایی مانند قضیه تناوبی چبیشف، در خصوص مشخصه بهترین تقریب یکنواخت توابع با نرم L_m وجود دارد. و این قضایا جواب را برای توابعی با نرم L_m ، $(1 \leq m < \infty)$ ودر موارد کلی برای تمام توابع هموار توصیف می‌کنند.

چون در نرم یکنواخت (L_∞)، قضیه تناوبی چبیشف، بهترین تقریب یکنواخت توابع را در رده چندجمله‌ای‌ها به‌طور صریح مشخص نمی‌کند، محققان به دنبال آن هستند که مشخصه بهترین تقریب یکنواخت توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها را روی رده‌های خاصی از توابع به‌دست آورند.

بنابراین برخی محققان بر روی رده‌هایی از توابع، که توسط چندجمله‌ای چبیشف بسط داده می‌شوند، متمرکز شده‌اند. به‌طور مثال ریولین بهترین تقریب یکنواخت رده‌ای از توابع گویا مانند $1/(x-a)$ با شرط ($a > 1$) را در مجموعه چندجمله‌ای‌ها مشخص کرد.

همچنین لوبینسکی[۵][۶] در سال ۲۰۰۳ نشان داد که به‌وسیله درون‌یابی‌های لاگرانژ صفرهای چندجمله‌ای‌های چبیشف، بهترین تقریب تابع $1/(1+(ax)^2)$ روی بازه $[-1,1]$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌ها می‌توان به‌دست آورد.

۲.۱ تعاریف اولیه

این بخش شامل تعاریف و اصول اولیه‌ای است که لازمه‌ی مطالعه و شناخت در زمینه پیداکردن بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها و شناسایی آن‌ها می‌باشد. به دلیل بدیهی بودن و مطابقت داشتن با برخی از قضایای ساده آنالیز از بیان جزییات و اثبات آن‌ها خودداری می‌کنیم و اثبات آن‌ها را به بخش مراجع ذکر شده در انتهای پایان‌نامه می‌سپاریم.

[۳] Watson
[۴] Rivlin
[۵] Lubinsky

تعریف ۱.۲.۱. تابع نرم: یک نرم روی یک فضای برداری X یک تابع حقیقی مقدار روی فضای X است که تصویر هر $x \in X$ تحت این تابع با نماد$\|x\|$ نمایش داده می‌شود و برای هردو بردار دلخواه $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

۱. $\|x\| \geq 0$

۲. $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

۳. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

۴. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

فضای خطی X را فضای خطی نرم‌دار گوییم اگر هر عنصر $x \in X$ در ویژگی‌های ۱.۲.۱ صدق کند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X فضای خطی نرم‌دار، و f ($f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\|f\| < \infty$) تابع اندازه پذیری در فضای X باشد، و $0 < m < \infty$، آن‌گاه نرم m تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|f\|_m = \left(\int |f(x)|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}$$

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ با نماد $C[a, b]$ نمایش داده می‌شود. به هر $f \in C[a, b]$، نرم سوپریمم آن یعنی

$$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

را مربوط می‌کنیم، که نرم یکنواخت یا نرم چبیشف نام دارد.

تعریف ۴.۲.۱. چندجمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x_n$ یک تابع است، که اعداد $a_0, \ldots, a_n$ حقیقی و x یک متغیر حقیقی است. اگر $a_n \neq 0$ باشد، آن‌گاه p یک چندجمله‌ای از درجه n است. فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n را با P_n نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر اگر $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x_k$ و $k \leq n$ باشد آن‌گاه $p \in P_n$ است.

خارج قسمت دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ یا $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا گوییم. تمامی چندجمله‌ای‌ها توابعی گویا با $Q(x) = 1$ هستند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید K زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای ضرب داخلی X و$x \in X$ باشد. عنصر $y_0 \in K$ بهترین تقریب، یا نزدیکترین نقطه به x در مجموعه K است، اگر

$$\|x - y_0\| = d(x, K)$$

که
$$d(x,K) := \inf\{\|x-y\|; y \in K\}$$
مقدار $d(x,K)$ فاصله x تا K، یا خطای تقریب عنصر x به‌وسیله مجموعه K نامیده می‌شود. مجموعه تمام بهترین تقریب‌های عنصر x از مجموعه K را با $P_K(x)$ نشان می‌دهیم. بنابراین
$$P_K(x) := \{y \in K \ ; \quad \|x-y\| = d(x,K)\}$$
اگر هر $x \in X$ حداقل یک بهترین تقریب در مجموعه K داشته باشد، K یک مجموعه تقریب نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر K یک مجموعه تقریب است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $P_K(x) \neq \emptyset$.

اگر هر $x \in X$ دقیقا یک بهترین تقریب در مجموعه K داشته باشد، K یک مجموعه چبیشف[۶] نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر K یک مجموعه چبیشف است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $P_K(x)$ یک مجموعه تک عضوی باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه متناهی با طول L باشد، به‌علاوه فرض کنید f,g توابع انتگرال پذیر روی I باشند.

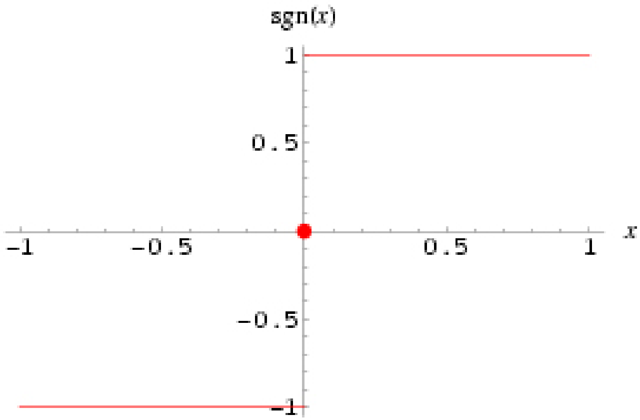
در این صورت تابع g را تقریب یکنواخت تابع f می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم:
$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon \qquad \forall x \in I \tag{1.1}$$

قضیه ۷.۲.۱. قضیه تقریب وایرشتراس:فرض کنید f تابع پیوسته‌ای روی بازه $[a,b]$ باشد، در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ یک چندجمله‌ای $p(x)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x \in [a,b]$،
$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

برهان. برای اثبات به [۱۲] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. تابع علامت برای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$sgnx = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

[۶] Chebyshev



شکل ۱.۱: نمودار تابع علامت

یادآوری: ماسون در [۹] نشان داد که برای $f \in C[d,e]$، چندجمله‌ای یکتایی مانند $p_n^* \in P_n$ وجود دارد به طوری که

$$\|f - p_n^*\|_m \leq \|f - p\|_m, \quad \forall p \in P_n,$$

و p_n^* بهترین تقریب تابع f (با نرم L_m) در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n روی بازه $[d,e]$ نامیده می‌شود.

و اگر نرم یکنواخت (L_∞) را داشته باشیم:

$$\max_{d \leq x \leq e} |f(x) - p_n^*(x)| < \max_{d \leq x \leq e} |f(x) - p(x)|, \quad \forall p \in P_n,$$

که در این حالت p_n^* **بهترین تقریب یکنواخت** تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[d,e]$ نامیده می‌شود.

با توجه به این مطلب که ترکیب خطی هر دو عضو دلخواه از یک زیرفضا، عضوی از زیرفضا است، لذا هر زیرفضا یک مجموعه محدب است. در مورد یک مجموعه،ویژگی محدب بودن به‌صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. زیرمجموعه S از یک فضای خطی X را محدب گوییم، اگر هر ترکیب محدب از هر دو عضو S، همچنان عضو S باشد. یعنی اگر $x,y \in S$ باشند، آنگاه به ازای هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in S$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید p_n^* بهترین تقریب تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ در مجموعه

چندجمله‌ای‌های P_nباشد، خطای تقریب تابع f را با $e(x)$ نمایش داده و به صورت

$$e(x) = f(x) - p_n^*(x)$$

تعریف می‌کنیم.

هم‌چنین خطای بهترین تقریب یکنواخت تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n به صورت

$$\inf_{p_n^* \in P_n} \|f - p_n^*\| = E_n(f)$$

تعریف می‌شود.

در نتیجه اگر $e(x)$ خطای تقریب تابع f روی بازه $[a, b]$ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است

$$|e(x)| = E_n(f; [a, b])$$

که نماد $E_n(f; [a, b]$ خطای تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[a, b]$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۱۱. اگرf تابعی پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشد، حداقل دو نقطه $x_۱, x_۲ \in [a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$|e(x_۱)| = |e(x_۲)| = E_n(f; [a, b])$$

و

$$e(x_۱) = -e(x_۲)$$

برهان. با توجه به پیوستگی تابع f، منحنی پیوسته $y = e(x)$ برای $a \leq x \leq b$ از بین خطوط $y = \pm E_n(f)$ عبور می‌کند و حداقل با یکی از این خطوط مماس می‌شود. نشان می‌دهیم که این منحنی باید بر هر دو خط مماس شود.

(برهان خلف)، فرض کنیم این منحنی بر هر دو خط مماس نشود، و فرض کنیم که q_n تقریبی بهتر از p_n^* برای تابع f باشد. حال فرض کنیم $e(x) > -E_n(f)$ در تمام بازه $[a, b]$ برقرار باشد. آنگاه

$$\min_{a \leq x \leq b} e(x) = m > -E_n(f) \qquad , \qquad c = \frac{E_n(f) + m}{۲} > ۰$$

چون $f(x) - q_n(x) = e(x) - c$ و $q_n = p_n^* + c \in P_n$ و

$$-(E_n(f) - c) = m - c \leq e(x) - c \leq E_n(f) - c$$

داریم: $\|f - q_n\| = E_n(f) - c$ که یک تناقض برای $E_n(f)$ است. بنابراین باید یک نقطه در بازه $[a, b]$ مانند $x_۱$ وجود داشته باشد به‌طوری که $e(x_۱) = -E_n(f)$.

با روشی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $x_2 \in [a, b]$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $e(x_2) = E_n(f)$.

□

فصل ۲

بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها با روش‌های عددی

۱.۲ روش‌های تکراری رمس

در این بخش الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که الگوریتم رمس [۱] نامیده می‌شود و طی آن با روش‌های گام به گام عددی به بهترین تقریب توابع در مجموعه چندجمله‌ای‌ها دست می‌یابیم.

قبل از بیان این الگوریتم تعاریف و قضایای مورد نیاز اولیه را بیان می‌کنیم، چون فقط به صورت این قضایا نیاز داریم از ارائه اثبات‌ها خودداری می‌کنیم و اثبات تمام قضایا در مراجع انتهایی آورده شده است.

۱.۱.۲ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید $C[a, b]$ فضای تمام توابع پیوسته حقیقی مقدار مانند $f(x)$، روی بازه $a \leq x \leq b$ باشد، نرم هر تابع مانند f روی این بازه به‌صورت

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad (۱.۲)$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید X فضای نرم‌دار خطی با عناصر $f, g, \ldots$ روی میدان اعداد حقیقی (مختلط)، و V، زیر فضای خطی n بعدی از X باشد. تقریب خطی عناصر X به صورت زیر بیان می‌شود.

---

[۱] Remez

تعریف ۲.۱.۲. با مفروضات فوق برای هر $f \in \mathbf{X}$ اگر عضو $g \in V$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $h \in V$ داشته باشیم

$$\|g - f\| \leq \|h - f\|$$

آن‌گاه می‌گوییم g تقریب خطی f است.

اگر g یک تابع خطی باشد، قرارداد می‌کنیم:

$$\mathcal{Q}_V(f) = \inf_{h \in V} \|h - f\| \qquad \forall f \in \mathbf{X}$$

در حالتی که تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌ها تقریب زده شود، به جای $\mathcal{Q}_V(f)$ از $E_n(f)$ استفاده می‌کنیم.

مرتبه تقریب یک تابع را به‌این صورت تعریف می‌کنیم که دنباله g_n از تقریب‌های تابع f را از مرتبه ρ_n، $\rho > ۰$ گوییم اگر

$$\|g_n(f) - f\| = o(\rho_n)$$

تعریف ۳.۱.۲. تابع انتگرال پذیر $\omega(x)$ را روی بازه $[a, b]$یک تابع وزن‌دار گوییم اگر برای هر $x \in [a, b]$ ، $\omega(x) \geq ۰$ باشد، اما روی هر زیر بازه از $[a, b]$، $\omega(x) \neq ۰$ باشد.

تعریف ۴.۱.۲. چندجمله‌ای‌های متعامد، رده‌هایی از چندجمله‌ای‌ها مانند $P_n(x)$ هستند که روی بازه $[a, b]$ تعریف می‌شوند و برای آن‌ها رابطه زیر صادق است،

$$\int_a^b \omega(x) p_m(x) p_n(x) d(x) = \delta_{mn}$$

که در آن $n \neq m$ و $\omega(x)$ یک تابع وزن‌دار و δ_{mn} دلتای کرونیکر است.

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند، که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۲. چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه‌ی nبر بازه $[-۱, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-۱} x)$$

با توجه به تعریف ۵.۱.۲ هر چندجمله‌ای چبیشف در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$T_{n+۱}(x) = ۲xT_n(x) - T_{n-۱}(x), \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

با توجه به روابط

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta$$

و جمع این دو رابطه داریم

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta - \cos(n-1)\theta$$

با توجه به تعریف چندجمله‌ای چبیشف درجه n، اگر قرار دهیم $\theta = \cos^{-1} x$، پس $x = \cos\theta$. در نتیجه برای $n \geq 1$ داریم

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta = 2xT_n(x)$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

تعدادی از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به‌صورت زیر هستند.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

توجه می‌کنیم که $T_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n است و با استقرا نشان داده می‌شود که ضریب x^n (بزرگترین توان) در آن 2^{n-1} است. به‌عبارتی

$T_n(x) = 2^{n-1}x^n +$ عباراتی با درجه کمتر از n

اگر $T_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از درجه n باشد، با محاسبه T' مشاهده می‌کنیم که T' یک چندجمله‌ای از درجه $n-1$ است.

حال با مشتق‌گیری از رابطه $T_n(x) = \cos n\theta$ نسبت به x به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\frac{1}{n}T'_n(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

که یک چندجمله‌ای از مرتبه $n-1$ است و آن را چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

مطالب جزیی‌تر در مورد $U_n(x)$ در فصل سوم بیان شده است.

صفرهای $T_n(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = 0 \Rightarrow n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

در نتیجه ریشه‌های $T_n(x)$ عبارتند از

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

این ریشه‌ها در بازه $[-1, 1]$ قرار دارند و متمایز هستند.

ضمنا برای سهولت درکار با چندجمله‌ای‌ها، توجه می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های چبیشف تعریف شده روی بازه دلخواه $[a, b]$ را می‌توان به چندجمله‌ای چبیشف روی بازه $[-1, 1]$ تبدیل کرد.

چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n(t)$، $n = 0, 1, \dots$ را در بازه $-1 \leq t \leq 1$ در نظر بگیرید. تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید

$$x = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2}, \qquad -1 \leq t \leq 1$$

این تبدیل بازه $[a, b]$ از محور x را به بازه‌ی $[-1, 1]$ از محور t نقش می‌کند، و برعکس.

اکنون فرض کنید $T_n(t)$ چندجمله‌ای چبیشف بر بازه $-1 \leq t \leq 1$ باشد، چندجمله‌ای $\tilde{T}_n(x)$، ($\tilde{T}$فقط یک نمادگذاری است)را بر بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{T}_n(x) = T_n(t) = \cos(n\cos^{-1} t), \qquad n = 0, 1, \dots$$

بنابراین

$$\tilde{T}_0(x) = T_0(t) = 1$$

$$\tilde{T}_1(x) = T_1(t) = t = \frac{2x - (a+b)}{b-a}$$

$$\tilde{T}_2(x) = T_2(t) = 2t^2 - 1 = 2\left[\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right]^2 - 1$$

تعریف ۶.۱.۲. یک تابع مولد برای $f(x)$، یک سری توانی به صورت $\sum a_n x^n$ است که $f(x) = \sum a_n x^n$.

گزاره ۷.۱.۲. تابع مولد برای چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}$$

با توجه به رابطه $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ رابطه زیر را می‌توانیم داشته باشیم

$$e^{in(\arccos(x))} = \cos(n\arccos(x)) + i\sin(n\arccos(x))$$