بسم الله الرحمن الرحیم

**وزارت علوم، تحقیقات و فناوری**

**دانشگاه شهید مدنی آذربایجان**

دانشکده علوم پایه

**پایان نامه**

**جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد**

رشته ریاضی محض

# بررسی رفتار مجانبی مجموعه‌های خاصی از ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول‌های $Ext$

استاد راهنما

**دکتر منیره صدقی**

استاد مشاور

**دکتر رضا نقی پور**

پژوهشگر

**زهرا دادار**

تیر ۱۳۹۳

تبریز - ایران

## تقدیم به

پدر عزیز و بزرگوارم به او که رایحه ایمان است و الفبای صداقت و دنیای گذشت، چشمانش تشعشع نور الهی است و دستانش گهواره دعا.

مادر مهربانم به فرشته‌ای که در قدم به قدم راه زندگی چراغ هدایتم بود و با هر کلام و نگاهش یک دنیا عشق و محبت و عاطفه را به من بخشید. تقدیم به تو مادرم که با نام تو یک عمر وفاداری و عاطفه را معنی کردم.

خواهر و برادران عزیزم به آنان که وجودشان برایم عشق است و زندگی‌ام در کنار آن‌ها سبز و زیباست.

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نردبانی باشد برای فروتنی و دوری از تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دستمایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

حمد و ستایش به درگاه خداوند علیم که از سرچشمه زلال حکمت، توانایی برداشتن گامهایی هرچند کوچک در راه کسب دانش را عطا فرمود. اکنون که به یاری پروردگار انجام این تحقیق به پایان رسیده است، بر من است که شکر ایزد گویم و سپاسگزار همه آنهایی باشم که در این راه یاریگرم بودند.

# سپاس گزاری

حضرت علی علیه السلام:

هر آنکه به من علم آموخت مرا بنده خویش ساخت.

اکنون که با یاري خداوند متعال توانستم این تحقیق را به پایان رسانم از رحمت بیکران لایزالش سپاسگزارم و به رسم احترام و ادب:

از استاد راهنماي بزرگوارم سرکار خانم دکتر منیره صدقی که افتخار شاگردي ایشان را داشتم، بخاطر تمام راهنماییها و مساعدتهاي بی دریغشان در طی انجام و تدوین این پایان نامه، نهایت تشکر و امتنان را دارم.

از استاد مشاور ارجمند جناب آقاي دکتر رضا نقی پور که در طول این پژوهش از همفکریشان بهره برده و راهنمایی هاي ارزندهاي در جهت تدوین این تحقیق ارائه نمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

از جناب آقاي دکتر علی بجروانی که زحمت داوري پایان نامه را بر عهده داشتند.

از جناب آقای دکتر احد رحیمی که بنا به حکم ادب و اخلاق از هیچ کمک و راهنمایی دریغ ننمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و از تمام دوستانم که مشوق من بودند سپاسگزارم.

زهرا دادار

تیر ۱۳۹۳

تبریز / ایران

# فهرست مطالب

# چکیده

در این پایان نامه به بررسی ویژگی‌های عمق صافی، عمق تعمیم یافته و ایده‌آل‌های اول وابسته مدول کوهمولوژی موضعی می‌پردازیم. همچنین رفتار مجانبی مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی مدول‌های $Ext$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

**کلید واژه‌ها:** ایده‌آل‌های اول وابسته، مدول‌های $Ext$، مدول کوهمولوژی موضعی، عمق صافی، عمق تعمیم یافته.

# پیشگفتار

فرض کنیم $R$ یک حلقه‌ی نوتری، $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از $R$ و $M$ یک $R-$مدول متناهی مولد باشد. در سال ۱۹۷۹ برادمن[۱] به ارایه نتایجی پرداخت که نشان می‌داد دنباله های $\{Ass_R(\frac{M}{\mathfrak{a}^j M})\}_{j\in\mathbb{N}}$ و $\{Ass_R(\frac{\mathfrak{a}^j M}{\mathfrak{a}^{j+1} M})\}_{j\in\mathbb{N}}$ برای $n$های بقدر کافی بزرگ $n$ پایا هستند. وقتی که $A$ یک مدول آرتینی باشد، دوگان این نتیجه را شارپ[۲] در سال ۱۹۹۶بیان و نشان داد دنباله $\{Att_R(0 :_A \mathfrak{a}^j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ برای $n$های بقدر کافی بزرگ $n$ پایا هستند. در سال ۱۹۹۳ ملکرسن[۳] و شنزل[۴] نشان دادند که به ازای هر عدد صحیح $i$، مجموعه‌هایی از ایده‌آل‌های اول $Ass_R Tor_i^R(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M)$ و $Att_R Ext_R^i(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M)$ به ازای $j$های به اندازه‌ی کافی بزرگ، مستقل از $j$ هستند[۱۲]. همچنین آنها سوال زیر را مطرح کردند:

به ازای عدد صحیح نامنفی و ثابت $i$، چه موقع مجموعه‌ی $\cup_{j\in\mathbb{N}} Ass_R Ext_R^i(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M)$ متناهی است؟

در سال ۲۰۰۱ خشایار منش[۵] و سالارین[۶] نشان دادند که $Ass_R Ext_R^1(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M)$ به ازای $j$های بزرگ، مستقل از $j$ است. همچنین نشان دادند که اگر $n$ عددی صحیح باشد بطوریکه، به ازای هر $i < n$، مجموعه $Supp_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M))$ متناهی است آنگاه مجموعه‌ی

$$\cup_{j\in\mathbb{N}} Ass_R Ext_R^n(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M) \cap \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : dim(\frac{R}{\mathfrak{p}}) > 1\}$$

[۱] Brodmann
[۲] Sharp
[۳] Melkersson
[۴] Schenzel
[۵] Khashyarmanesh
[۶] Salarian

متناهی است. برادمن و نهان[۷] اخیرا نشان دادند که اگر $s \in \mathbb{N}_\circ$ و $n \in \mathbb{N}$، بطوریکه به ازای هر $i < n$، $dim(Supp_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M))) \leq s$ آنگاه به ازای هر عدد صحیح $t \leq n$، مجموعه‌ی

$$\cup_{j\in\mathbb{N}} Ass_R Ext^t_R(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M)_{\geq s}$$

شامل مجموعه‌ی متناهی $\cup^t_{k=\circ} Ass_R Ext^k_R(\frac{R}{\mathfrak{a}}, M)$ است. در این پایان نامه به عنوان اولین نتیجه اصلی قضیه‌ی اصلی زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

**قضیه ۱.۰.۰.** *فرض کنیم $n, s$ دو عدد صحیح نامنفی باشند بطوریکه به ازای هر $i < n$،*

$$dim(Supp_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M))) \leq s$$

*در اینصورت*

(i) *به ازای هر $i < n$، مجموعه $(\cup_{j>\circ} Supp_R Ext^i_R(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M))_{\geq s}$ متناهی است.*

(ii) *به ازای هر $i \leq n$، مجموعه $(\cup_{j>\circ} Ass_R Ext^i_R(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M))_{\geq s}$ متناهی است.*

همچنین بعنوان دومین نتیجه اصلی این پایان نامه قضیه زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

**قضیه ۲.۰.۰.** *فرض کنیم $n \geq \circ$ و $R$ یک حلقه نیم موضعی و مجموعه‌ی $Supp_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ به ازای هر $i < n$، متناهی باشد. در اینصورت*

(i) *به ازای هر $i < n$، مجموعه $(\cup_{j>\circ} Supp_R Ext^i_R(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M))$ متناهی است.*

(ii) *به ازای هر $i \leq n$، مجموعه $(\cup_{j>\circ} Ass_R Ext^i_R(\frac{R}{\mathfrak{a}^j}, M))$ متناهی است.*

در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و مورد نیاز و در فصل دوم مفهوم عمق صافی و برخی از ویژگی‌های آن، ایده‌آل اول وابسته‌ی مدول کوهمولوژی موضعی، عمق تعمیم یافته و برخی از ویژگی‌های آن را مطالعه و بررسی می‌کنیم. در فصل سوم قضایای بیان شده در بالا را اثبات می‌کنیم.

---

[۷] Nhan

# فصل ۱

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایایی از جبر جابجایی و همولوژی که در فصل‌های بعدی برای اثبات قضایا و لم‌ها از آنها استفاده می‌شود بیان شده است. در سرتاسر این پایان‌نامه منظور از حلقه‌ی $R$، حلقه‌ای جابجایی و یکدار و $(R, \mathfrak{m})$ نشان دهنده‌ی حلقه‌ی موضعی و نوتری با ایده‌آل ماکسیمال منحصربفرد $\mathfrak{m}$ می‌باشد.

## ۱.۱ مفاهیم و قضایایی از جبر جابجایی

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض کنیم $M$ و $N$ دو $R-$مدول باشند. زیرمجموعه‌ای با نماد $(M :_R N)$ از $R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(M :_R N) = \{x \in R : \ xN \subseteq M\}.$$

بسادگی می‌توان نشان داد ایده‌آلی از $R$ است. همچنین پوچساز $M$ نسبت به حلقه‌ی $R$ را با $Ann_R(M)$ یا $(0 :_R M)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ann_R(M) = \{x \in R : \ xM = 0\}.$$

بعلاوه اگر فرض کنیم $x$ عضوی از حلقه‌ی $R$ باشد. $Ann(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ann(x) = (0 :_R x) = \{r \in R : \; rx = 0\}.$$

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض کنیم $I$ ایده‌آلی از حلقه‌ی $R$ باشد. رادیکال $I$ را با $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{x \in R : \; \exists n \in \mathbb{N}, \; x^n \in I\}.$$

**قضیه ۳.۱.۱.** ( *اجتناب از ایده‌آل‌های اول* ). *فرض کنید* $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ *که* $n \geq 2$*، ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی جابجایی* $R$ *باشند و حداکثر دو تا از آنها اول نباشند. فرض کنید* $S$ *زیرگروهی از گروه جمعی* $R$ *باشد که نسبت به ضرب بسته است.* (مثلا $S$ *ممکن است ایده‌آل* $R$ *یا زیرحلقه‌ی* $R$ *باشد.*) *فرض کنید*

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

*در اینصورت به ازای زای که* $1 \leq j \leq n$*،* $S \subseteq \mathfrak{p}_j$.

***برهان.*** رجوع شود به قضیه‌ی ۶۱.۳ مرجع [۱۷]. □

**لم ۴.۱.۱.** *فرض کنید* $\mathfrak{p}$ *و* $\mathfrak{q}$ *ایده‌آل‌های اول از حلقه‌ی جابجایی* $R$ *باشند و* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$*. اگر ایده‌آل اولی از* $R$ *اکیداً بین* $\mathfrak{p}$ *و* $\mathfrak{q}$ *قرار داشته باشد (یعنی اگر زنجیره‌ی* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ *اشباع شده نباشد). آنگاه تعدادی نامتناهی از این ایده‌آل‌های اول وجود دارند که اکیداً بین* $\mathfrak{p}$ *و* $\mathfrak{q}$ *قرار دارند.*

***برهان.*** رجوع شود به تمرین ۳.۱۵ مرجع [۱۷]. □

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض کنیم $I$ ایده‌آلی سره از حلقه‌ی $R$ باشد. در این صورت واریته $I$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم و به اختصار با $V(I)$ نشان می‌دهیم،

$$V(I) = \{\mathfrak{p} : \; \mathfrak{p} \in Spec(R) \; , \; I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

واضح است که $V(I)$ دسته کم یک عضو مینیمال نسبت به رابطه‌ی مشمولیت دارد. عضوهای مینیمال $V(I)$ را ایده‌آل‌های اول مینیمال $I$ گوییم و آن را با نماد $Min(I)$ نشان می‌دهیم. اگر حلقه‌ی $R$ ناصفر باشد ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل صفر حلقه $R$ را ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه‌ی $R$ می‌نامیم و با نماد $Min(R)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۶.۱.۱.** فرض کنیم $M$ یک $R-$مدول باشد. در این صورت محمل $M$ را با $Supp_R(M)$ یا $Supp(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Supp_R(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : M_{\mathfrak{p}} \neq ۰\}.$$

**لم ۷.۱.۱.** *فرض کنیم $M$ یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد. در این صورت*

$$Supp_R(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : Ann(M) \subseteq \mathfrak{p}\} = V(Ann(M)).$$

*اگر $M$ متناهی مولد نباشد، آنگاه $Supp_R(M) \subseteq V(Ann(M))$.*

***برهان.*** رجوع شود به قضیه‌ی ۲۰.۹ مرجع [۱۷]. □

**لم ۸.۱.۱.** *فرض کنید $۰ \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow ۰$ یک دنباله‌ی دقیق از $R-$مدول‌ها و $R-$ هomomorphism‌ها باشد. در این صورت*

$$Supp_R(M) = Supp_R(N) \cup Supp_R(L).$$

***برهان.*** رجوع شود به تمرین ۱۹.۹ مرجع [۱۷]. □

**لم ۹.۱.۱.** *فرض کنیم $I$ ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری $R$ باشد. در این صورت*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in Spec(R) \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Min(I)} \mathfrak{p}$$

***برهان.*** رجوع شود به قضیه‌ی ۵۴.۳ مرجع [۱۷]. □

**تعریف ۱.۱.۱۰.** بعد حلقه‌ی $R$ را با $dimR$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dimR = sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists\ \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_i \in Spec(R);\ i = 0, \ldots, n\}.$$

اگر sup موجود نباشد بعد $R$ را $\infty$ در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۱.۱.۱۱.** فرض کنید $I$ ایده‌آلی از حلقه‌ی $R$ باشد، بعد $I$ که با $dimI$ نمایش می‌دهیم را همان $dim\frac{R}{I}$ تعریف می‌کنیم. یعنی

$$dim(I) = dim\frac{R}{I} = sup\{n \in \mathbb{N}_0 : I \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n\ ,\ \mathfrak{p}_i \in Spec(R)\ ,\ i = 0, \ldots, n\}.$$

**تعریف ۱.۱.۱۲.** برای هر $R$–مدول $M$، بعد کرول $M$ را با نماد $\dim_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dim_R(M) = sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \text{زنجیری اکید به طول } n \text{ از عناصر } Supp_R(M) \text{ موجود است}\}.$$

**تعریف ۱.۱.۱۳.** فرض کنید $M$ یک $R$–مدول باشد. زنجیر $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ از زیر مدول‌های $M$، که از صفر شروع می‌شود و به $M$ ختم می‌شود یک زنجیر سره از زیر مدول‌های $M$ نامیده می‌شود و $n$، طول زنجیر تعریف می‌شود. اگر به ازای هر $i$، $1 \leq i \leq n$، $R$–مدول‌های خارج قسمتی $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ ساده باشند، زنجیر، سری ترکیبی برای $M$ نامیده می‌شود. توجه کنید که به دلیل ساده بودن $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ها، نمی‌توان زیر مدولی بین $M_{i-1}$ و $M_i$ اضافه کرد و در واقع $M_{i-1}$ در $M_i$ یک زیر مدول ماکسیمال است. می‌توان نشان داد که همه سری‌های ترکیبی برای $M$، طول مساوی دارند. طول مدول $M$، طول یک سری ترکیبی برای $M$ تعریف می‌شود و با $\ell(M)$ نمایش داده می‌شود.

**لم ۱.۱.۱۴.** *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی و $N$ یک $R$– مدول متناهی مولد باشد. آنگاه شرایط زیر معادل‌اند:*

(۱) $dim(N) \leq 0$

(۲) $\ell(N) < \infty$

***برهان.*** بنا به تعریف بعد و طول یک مدول به وضوح برقرار است. □

**تعریف ۱.۱.۱۵.** فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از حلقه‌ی $R$ باشد. بلندی $\mathfrak{p}$ را با $ht\mathfrak{p}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ht\mathfrak{p} = sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists\ \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i \in Spec(R); i = 0, \ldots, n\}.$$

همچنین اگر $I$ ایده‌آل دلخواهی از حلقه‌ی نوتری $R$ باشد، داریم:

$$ht(I) = Min\{ht(\mathfrak{p}) :\ \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

**قضیه ۱.۱.۱۶.** (*تعمیم ایده‌آل اصلی کرول*) *فرض کنید $I$ ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری $R$ باشد بطوریکه $I$ توسط $n$ عضو تولید می‌شود. اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال از $I$ باشد. آنگاه $ht(\mathfrak{p}) \leq n$ .*

***برهان.*** رجوع شود به قضیه ۱۵.۴ مرجع [۱۷]. □

**تعریف ۱.۱.۱۷.** حلقه‌ی موضعی و نوتری $R$ را منظم گوییم، هرگاه ایده‌آل ماکسیمال آن توسط $dimR$ تا عضو تولید شود.

**تعریف ۱.۱.۱۸.** فرض کنیم $M$ یک $R-$مدول باشد. مجموعه‌ی همه مقسوم علیه‌های صفر روی $M$ را با نماد $Zd_R(M)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Zd_R(M) = \{r \in R :\ \exists 0 \neq x \in M,\ rx = 0\}.$$

**تعریف ۱.۱.۱۹.** فرض کنیم $M$ یک $R-$مدول باشد. عنصر $a$ از $R$ را روی $M$ منظم گوییم، هرگاه به ازای هر $0 \neq x \in M$ داشته باشیم $ax \neq 0$. به عبارت دیگر $a \notin Zd_R(M)$.

**تعریف ۱.۱.۲۰.** فرض کنیم $M$ یک $R-$مدول و $a_1, \ldots, a_r$ عناصری از $R$ باشند. $a_1, \ldots, a_r$ یک $M-$رشته‌ی منظم( $M-$رشته ) می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) به ازای هر $2 \leq i \leq r$، $a_i$ روی $\frac{M}{(a_1, \ldots, a_{i-1})M}$ و $a_1$ روی $M$ منظم باشند؛

(ii) $M \neq (a_1, \ldots, a_r)M$.

**تعریف ۲۱.۱.۱.** اگر $a_1, \ldots, a_r$، $M$−رشته‌ی منظم در یک ایده‌آل $I$ از $R$ باشد، آنگاه گوییم $a_1, \ldots, a_r$، $M$−رشته‌ی منظم در $I$ است. همچنین اگر $b \in I$ موجود نباشد بطوریکه $a_1, \ldots, a_r, b$، $M$−رشته‌ی منظم باشد، آنگاه $a_1, \ldots, a_r$ را $M$−رشته‌ی منظم ماکسیمال در $I$ می‌نامیم.

**تعریف ۲۲.۱.۱.** فرض کنیم $R$ حلقه‌ی نوتری، $M$ یک $R$−مدول متناهی مولد و $I$ ایده‌آلی از $R$ باشند به طوریکه $IM \neq M$. در این صورت بنابر قضیه ۱۹.۲.۱ طول تمام $M$−رشته‌های ماکسیمال در $I$ یکسان است و این طول را نمره‌ی $I$ روی $M$ یا عمق $I$ روی $M$ می‌نامیم و آن را با نماد $grade(I, M)$ یا $depth_I(M)$نشان می‌دهیم. اگر $IM = M$، آنگاه تعریف می‌کنیم $grade(I, M) = \infty$ و همچنین $depth_I(0) = \infty$.

**تعریف ۲۳.۱.۱.** فرض کنیم $M$ یک $R$−مدول و $a_1, \ldots, a_r$ عناصری از $R$ باشند. $a_1, \ldots, a_r$ را یک $M$−رشته‌ی ضعیف می‌نامیم هرگاه $x_1 \notin Z_R(M)$ ( یا $x_1$، عضو $M$−منظم باشد ) یا به ازای هر $2 \leq i \leq r$ ، $x_i \notin Z_R(\frac{M}{(a_1, \ldots, a_{i-1})M})$.

**تعریف ۲۴.۱.۱.** فرض کنیم $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی $R$ باشد. گوییم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه $R$ است هرگاه:

(i) $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل سره $R$ باشد؛

(ii) به ازای هر $x, y \in R$ اگر $xy \in \mathfrak{q}$، آنگاه $x \in \mathfrak{q}$ یا $\exists n \in \mathbb{N}$ بطوریکه $y^n \in \mathfrak{q}$.

**تعریف ۲۵.۱.۱.** فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه از حلقه‌ی $R$ باشد. در اینصورت $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$ یک ایده‌آل اول است و $\mathfrak{q}$ را یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$−اولیه می‌گوییم.

**تعریف ۲۶.۱.۱.** فرض کنیم $I$ ایده‌آلی سره از حلقه‌ی $R$ باشد. در این صورت $I$ را تجزیه‌پذیر می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل‌های اولیه‌ای مانند $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ موجود باشند بطوریکه

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i.$$

این تجزیه را مینیمال می‌نامیم هرگاه:

(i) برای هر $1 \leq i < j \leq n$، $\mathfrak{p}_i = \sqrt{(0 :_R \mathfrak{q}_i)} \neq \mathfrak{p}_j = \sqrt{(0 :_R \mathfrak{q}_j)}$؛

(ii) برای هر $j = 1, \ldots, n$، $\mathfrak{q}_j \not\supseteq \bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} \mathfrak{q}_i$.

مجموعه ایده‌آل‌های اول $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ را که طبق قضیه‌ی ۵.۴ مرجع [۳]، مستقل از تجزیه‌ی $I$ هستند، با نماد $ass_R(I)$ نشان می‌دهیم و آن را مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به $I$ می‌نامیم. همچنین عناصر مینیمال مجموعه‌ی $ass_R(I)$ را با نماد $Min(I)$ یا $Min\ ass_R(I)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲۷.۱.۱.** فرض کنیم که $I$ ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری $R$ باشد. در این صورت $htI$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$htI = \inf\{ht\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in V(I)\} = \inf\{ht\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Min\ ass(I)\}.$$

**تعریف ۲۸.۱.۱.** فرض کنیم $R$ حلقه‌ی نوتری و $M$ یک $R$-مدول باشد. در این صورت ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را یک ایده‌آل اول وابسته به $M$ می‌نامیم، هرگاه $0 \neq \mathfrak{m} \in M$ ی موجود باشد بطوریکه، $\mathfrak{p} = Ann_R(\mathfrak{m}) = (0 :_R \mathfrak{m})$. مجموعه‌ی این نوع ایده‌آل‌ها را با نماد $Ass_R(M)$ نشان می‌دهیم. هر عضو مینیمال مجموعه‌ی $Ass_R(M)$ را ایزوله[۱] یا منفرد و هر عضو غیر مینیمال آن را نامنفرد یا توسعه یافته[۲] گوییم.

**قضیه ۲۹.۱.۱.** *فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی نوتری و $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از $R$-مدول‌ها و $R$-هومومورفیسم‌ها باشد. در این صورت*

$$Ass_R(L) \subseteq Ass_R(M) \subseteq Ass_R(L) \cup Ass_R(N).$$

***برهان.*** رجوع شود به قضیه ۶.۳ مرجع [۱]. □

---

[۱] isolated

[۲] extended

**قضیه ۳۰.۱.۱.** *فرض کنید $R$ حلقه‌ی نوتری و $M$ یک $R-$مدول باشد. در این صورت*

$$Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$$

*و اعضای مینیمال $Supp_R(M)$ با اعضای مینیمال $Ass_R(M)$ یکسان هستند.*

***برهان.*** رجوع شود به قضیه ۳۹.۹ مرجع [۱۷]. □

**لم ۳۱.۱.۱.** *فرض کنید $R$ حلقه‌ی نوتری و $M$ یک $R-$مدول باشد. در این صورت $M \neq ۰$ اگر و فقط اگر $Ass_R(M) \neq \phi$.*

***برهان.*** رجوع شود به قضیه ۳۵.۹ مرجع [۱۷]. □

**قضیه ۳۲.۱.۱.** *فرض کنید $R$ حلقه‌ای نوتری و $M$ یک $R-$مدول متناهی مولد و ناصفر باشد. در این صورت یک زنجیر صعودی از زیر مدول‌های $M$ مانند:*

$$۰ = M_۰ \subset M_۱ \subset \ldots \subset M_n = M$$

*وجود دارد به طوری که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-۱} \cong R/\mathfrak{p}_i$ که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.*

***برهان.*** چون $M$ یک $R-$مدول غیر صفر با تولید متناهی است، پس $Ass_R(M) \neq \varnothing$. فرض کنید $\mathfrak{p}_۱ \in Ass_R(M)$. بنابر این زیر مدولی مانند $M_۱$ از $M$ موجود است که $R/\mathfrak{p}_۱ \cong M_۱$. اگر $M = M_۱$، آنگاه حکم تمام است. فرض کنید $M \neq M_۱$. پس $Ass_R(\frac{M}{M_۱}) \neq \varnothing$. فرض کنید $\mathfrak{p}_۲ \in Ass_R(\frac{M}{M_۱})$. بنابراین زیر مدولی مانند $M_۲$ از $M$ شامل $M_۱$ وجود دارد به طوری که $R/\mathfrak{p}_۲ \cong M_۲/M_۱$. لذا با ادامه‌ی این روند زنجیر صعودی

$$۰ = M_۰ \subset M_۱ \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots$$

را داریم. چون $M$ یک $R-$مدول نوتری است، پس زنجیر فوق ایستاست. یعنی عدد صحیح و مثبتی مانند $n$ وجود دارد به طوری که $۰ = M_۰ \subset M_۱ \subset \ldots \subset M_n = M$. □

**قضیه ۳۳.۱.۱.** *فرض کنید $R$ حلقه‌ای نوتری و $M$ یک $R-$ مدول تولید شده‌ی متناهی و ناصفر باشد. در این صورت $Ass_R(M)$ یک مجموعه‌ی متناهی است.*

***برهان.*** چون $M$ یک $R-$مدول غیر صفر با تولید متناهی است، بنابه قضیه‌ی ۳۲.۱.۱، یک زنجیر صعودی از زیر مدول‌های $M$ مانند

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

وجود دارد به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$. از طرفی به ازای هر $1 \leq i \leq n$ دنباله‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1} \longrightarrow 0$$

را داریم. اگر $i = 1$، آنگاه $M_1 \cong R/\mathfrak{p}_1$. لذا $Ass_R(M_1) = Ass_R(R/\mathfrak{p}_1) = \{\mathfrak{p}_1\}$.
فرض کنید $i = 2$. بنابراین $M_2/M_1 \cong R/\mathfrak{p}_2$. لذا $Ass_R(M_2/M_1) = Ass_R(R/\mathfrak{p}_2) = \{\mathfrak{p}_2\}$. حال با توجه به دنباله‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$$

و بنا به قضیه‌ی ۳۰.۱.۱،

$$Ass_R(M_2) \subseteq Ass_R(M_1) \cup Ass_R(M_2/M_1) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$$

لذا با ادامه‌ی این روند نتیجه می‌شود که $Ass_R(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ یک مجموعه‌ی متناهی است.
□

**لم ۳۴.۱.۱.** *فرض کنیم $R$ حلقه‌ی نوتری و $M$ یک $R-$ مدول باشد. در این صورت*

$$Zd_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(M)} \mathfrak{p}.$$

***برهان.*** رجوع شود به ۳۶.۹ مرجع [۱۷]. □

**قضیه ۳۵.۱.۱.** *فرض کنید $R$ حلقه‌ای نوتری و $M$ یک $R-$ مدول تولید شده‌ی متناهی و ناصفر باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:*

(*i*) $dim(M) = 0$؛

(*ii*) $Supp_R(M) \subseteq Max(R)$ ؛

(*iii*) $Ass_R(M) \subseteq Max(R)$؛

(*iv*) $\ell(M) < \infty.$

**برهان.** رجوع شود به گزاره‌ی ۱.۶.۹ و مقدمه ۵.۳.۲ مرجع [۱۴]. □

**لم ۳۶.۱.۱.** *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی و $I$ ایده‌آل سره‌ای از $R$ باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

(*i*) $R-$مدول $\frac{R}{I}$ با طول متناهی است؛

(*ii*) $Var(I) = \{\mathfrak{m}\}$؛

(*iii*) $ass(I) = \{\mathfrak{m}\}$؛

(*iv*) $I$ ایده‌آلی $\mathfrak{m}-$اولیه است؛

(*v*) عددی چون $h \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $I \supseteq \mathfrak{m}^h$؛

(*vi*) $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$.

**برهان.** رجوع شود به صفحه ۱۷.۱۵ مرجع [۱۷]. □

**تعریف ۳۷.۱.۱.** فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی با بعد $d$ باشد. منظور از یک دستگاه پارامتری برای $R$ عبارت است از یک مجموعه‌ی $d$ عضوی از عناصر $\mathfrak{m}$ که یک ایده‌آل $\mathfrak{m}-$اولیه تولید می‌کند.