بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه
مرکز آموزش‌های نیمه حضوری

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

پایداری معادله تابعی تلفیقی جمعی و مکعبی در فضاهای شبه باناخ

نگارش

زهرا قرایلو

استاد راهنما

دکتر سعید استادباشی

تابستان ۱۳۸۹

تقدیم به:

همسر عزیزم

مهندس مهدی بیات

و

دختر گلم

((مبینا))

سپاس و قدردانی..

ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتا است و درود بر بهترین آفریده‌ی او محمد (ص) که والاترین شفاعت‌کننده‌ی روز رستاخیز است و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمونند.

«ترجمه فارسی دیباچه مفتاح الحساب»

از جناب آقای دکتر سعید استادباشی، استاد راهنما و از جناب آقایان دکتر سعید شمس و دکتر علی عبادیان که داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند و زحمت مطالعه آن را متحمل شده‌اند، سپاسگزارم.
از همسرم به خاطر حمایت‌های همه جانبه‌اش کمال تشکر و امتنان را دارم.

زهرا قرایلو
۱۳۸۹

دانشگاه ارومیه
مرکز آموزشهای نیمه حضوری

پایان نامه خانم زهرا قرایلو به تاریخ ۸۹/۷/۱۴ شماره ۳۵۱-۳

تحت عنوان پایداری معادله تابعی تلفیقی . . .

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ هجده قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیات داوران: دکتر سمیر استادباشی

۲- استاد راهنمای دوم پایان نامه: —

۳- داور خارجی: دکتر علی عبادیان

۴- داور داخلی: دکتر سمیر شمس

۵- استاد مشاور: —

۶- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب ازانچیلر

چکیده

هدف این پایان‌نامه بررسی موضوعات زیر است:

۱) پیدا کردن جواب کلی معادله

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۲f(۲x)-۴f(x)$$

که تلفیقی از معادلات جمعی و مکعبی می‌باشد و بررسی مساله پایداری هایرز-اولام-راسیاس برای معادله‌ی فوق در فضای شبه باناخ

۲) بررسی مساله پایداری معادله‌ی تابعی

$$\mathcal{F}(x+y)-\mathfrak{g}(x-y)=۲\mathcal{H}(x)\mathcal{K}(y)$$

روی دامنه‌ی گروه آبلی و برد میدان مختلط.

کلمات کلیدی: پایداری هایرز-اولام-راسیاس، نگاشت جمعی، نگاشت مکعبی، فضای شبه باناخ، فضای p-باناخ، معادله‌های تابعی مثلثاتی، پایداری، ابر پایداری

فهرستِ مطالب

مقدمه

بحث پایداری معادلات تابعی اولین بار در سال ۱۹۴۰، توسط اولام[1][۳۷] در یک سخنرانی در دانشگاه ویسکانسین، با طرح مساله زیر در مورد پایداری همریختی‌ها آغاز شد:

مساله اولام: فرض کنیم G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متری با متر $d(.,.)$ و $\epsilon > 0$ مفروض باشد. در این صورت آیا یک $\delta > 0$ موجود است به طوری که گزاره زیر درست باشد؟

اگر یک تابع $h : G_1 \longrightarrow G_2$ در نامساوی زیر صدق کند

$$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta, \quad \forall x, y \in G_1$$

آن گاه یک همریختی $H : G_1 \longrightarrow G_2$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in G_1$،

$$d(h(x), H(x)) < \epsilon.$$

این بدان معنا است که چه موقع همریختی‌ها پایدار هستند یا اینکه اگر یک نگاشت به شکل تقریبی یک همریختی باشد چه موقع یک همریختی نزدیک به آن وجود دارد.

یک سال بعد، هایرز[2][۱۴] در حالتی تابع جمعی $f : E \longrightarrow E'$ را در نظر گرفت که در آن E و E' فضاهای باناخ بودند و به سوال اولام جواب داد. مساله اولام و جواب هایرز تا سال ۱۹۷۸ باقی ماند تا اینکه ت. م. راسیاس[3][۳۰] تعمیمی از قضیه هایرز بیان کرد. در سال ۱۹۹۴ گاوروتا[4][۱۱] تعمیم کلی‌تری از قضیه‌ی راسیاس را ارائه داد. در چند دهه‌ی اخیر، بررسی پایداری معادلات تابعی بسیار مورد توجه بوده است. از

[1] Ulam

[2] Hyers

[3] Th. M. Rassias

[4] Găvruta

جمله معادلات تابعی می‌توان معادلات کوشی (جمعی)، مربعی[5]، مکعبی[6]، چارین[7] و نیسن را نام برد. اخیرا ترکیب این معادلات با یکدیگر و بررسی پایداری آنها مورد توجه قرار گرفته است.

این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۲۹] و [۳۶] نوشته شده است. در فصل اول و دوم این پایان‌نامه به معادله تابعی زیر که ترکیبی از معادلات جمعی و مکعبی است می‌پردازیم:

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۲[f(۲x)-۲f(x)]$$

واضح است که نگاشت $f(x)=ax^۳+cx$ یک جواب معادله‌ی تابعی فوق است.

هدف اصلی، پیدا کردن راه حل عمومی و بررسی پایداری هایرز-اولام-راسیاس برای این معادله می‌باشد.

در فصل سوم به بررسی پایداری معادله تابعی

$$\mathcal{F}(x+y)-\mathfrak{g}(x-y)=۲\mathcal{H}(x)\mathcal{K}(y)$$

پرداخته می‌شود که در آن $\mathcal{F}$، $\mathfrak{g}$، $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ توابع غیر صفر از گروه آبلی به توی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می‌باشند.

---

[5]quadratic

[6]cubic

[7]quartic

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱ تعاریف

تعریف ۱.۱ معادله‌ی تابعی عبارت است از معادله‌ای که متغیرهای آن توابع هستند. از این رو برای حل یک معادله تابعی همه‌ی توابعی را جستجو می‌کنیم که ممکن است در معادله صدق کنند.

تعریف ۲.۱ معادله‌ی تابعی

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱ - ۱.۱)$$

را معادله‌ی کوشی (جمعی) گوییم. هر جواب این معادله، نگاشت جمعی است. واضح است که تابع حقیقی $f(x) = cx$ که c عدد حقیقی ثابتی است، یک جواب این معادله می‌باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم $\epsilon > 0$، و E_1 و E_2 فضاهای برداری باشند. در این صورت تابع $f : E_1 \longrightarrow E_2$ را ϵ-جمعی می‌گوییم اگر در نامساوی زیر صدق کند:

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \epsilon; \quad \forall x, y \in E_1. \qquad (۱ - ۲.۱)$$

تعریف ۴.۱ معادله‌ی تابعی

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)+۲f(y) \qquad (۳.۱-۱)$$

را معادله تابعی مربعی می‌نامیم. هر جواب معادله تابعی مربعی، یک تابع مربعی نامیده می‌شود. به وضوح تابع حقیقی $f(x)=cx^۲$، $(c\in\mathbb{R})$ یک جواب برای این معادله می‌باشد.

این معادله از رابطه متوازی‌الاضلاع

$$||x+y||^۲+||x-y||^۲=۲(||x||^۲+||y||^۲)$$

پیروی می‌کند که در هر فضای ضرب داخلی برقرار است.

گزاره ۱.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای حقیقی و $f:X\longrightarrow Y$ یک نگاشت مربعی باشد. در این صورت به ازای هر $x\in X$ و $n\in\mathbb{N}$ داریم:

i) $f(\circ)=\circ$;

ii) $f(-x)=f(x)$;

iii) $f(nx)=n^۲f(x)$;

iv) $f(rx)=r^۲f(x),\quad r\in\mathbb{Q}$.

تعریف ۵.۱ معادله‌ی تابعی

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x) \qquad (۴.۱-۱)$$

معادله تابعی مکعبی نامیده می‌شود. هر جواب این معادله یک تابع مکعبی است. به وضوح تابع حقیقی $f(x)=cx^۳$، $(c\in\mathbb{R})$ یک جواب این معادله می‌باشد.

تعریف ۶.۱ معادله تابعی ε پایدار است هر گاه تابع g که به طور تقریبی در معادله ε صدق می‌کند به یک جواب دقیق معادله مذکور نزدیک باشد. به بیان دیگر

برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta \geq ۰$ای وجود داشته باشد به طوری که اگر

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \delta \quad (x, y \in G)$$

آن گاه جواب g از معادله‌ی (۱ − ۱.۱) موجود باشد که برای هر $x \in G$ داشته باشیم:

$$||f(x) - g(x)|| \leq \epsilon.$$

تعریف ۷.۱ یک معادله تابعی ابرپایدار نامیده می‌شود اگر هر جواب تقریبی، در واقع یک جواب باشد.

۲ تاریخچه مختصری از سیر مطالعات و پژوهش

مفهوم پایداری برای یک معادله تابعی هنگامی رخ می‌دهد که ما معادله تابعی را با یک نامساوی جایگزین کنیم.

سوال پایداری این است که جواب‌های نامعادله‌ی به دست آمده چقدر با جواب‌های معادله تابعی مفروض اختلاف دارد؟

۲−۱ معادله تابعی کوشی

معادله تابعی کوشی

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

یکی از مشهورترین معادلات تابعی است. هر جواب این معادله نگاشت جمعی نامیده می‌شود و به وضوح تابع حقیقی $f(x) = cx$ که c عدد حقیقی ثابتی است یک جواب این معادله می‌باشد.

تعریف ۱.۲ جبر مختلط یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$است که در آن یک ضرب تعریف شده است که در روابط

۱) $x(yz) = (xy)z$;

۲) $x(y+z) = xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz$;

۳) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$;

به ازای هر x، y و z در A و هر اسکالر α صدق می‌کند.

هر گاه علاوه بر این A یک فضای باناخ نسبت به نرم صادق در نامساوی ضربی

۴) $||xy|| \leq ||x|| ||y|| \quad (x \in A, \ y \in A)$

بوده و A شامل عنصر یکه e باشد به طوری که

۵) $xe = ex \quad (x \in A)$ و

۶) $||e|| = ۱$

آن گاه A یک جبر باناخ می‌باشد.

تعریف ۲.۲ فرض کنیم A جبر باناخ و X فضای باناخ باشد. در این صورت X را یک Aـمدول چپ باناخ گوییم هر گاه X یک Aـمدول چپ باشد و به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$||a.x|| \leq ||a|| ||x||. \qquad (۵.۲ - ۱)$$

به همین ترتیب X را یک Aـمدول راست باناخ گوییم هر گاه X یک Aـمدول راست باشد و به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$||x.a|| \leq ||x||||a||. \qquad (۶.۲-۱)$$

X را یک باناخ Aـمدول گوییم هر گاه X یک Aـمدول باشد و در شرایط (۱—۵.۲) و (۱—۶.۲) صادق باشد.

مثال ۱.۲ فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک Aـمدول باناخ و $x_\circ \in X$ ثابت باشد در این صورت نگاشت $f : A \longrightarrow X$ با ضابطه $f(a) = ax_\circ - x_\circ a$ جمعی است.

اولین جواب به مساله اولام توسط هایرز[۱۴] در سال ۱۹۴۱ ارائه شد. در واقع هایرز قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

قضیه ۱.۲ (دی. اچ. هایرز)[۱۴] فرض کنیم E_1 یک فضای برداری نرم‌دار و E_2 یک فضای باناخ باشد. همچنین فرض کنیم $\epsilon > 0$ چنان موجود باشد که تابع $f : E_1 \longrightarrow E_2$ برای هر $x, y \in E_1$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \epsilon.$$

در این صورت نگاشت جمعی منحصر به فرد $T : E_1 \longrightarrow E_2$ با ضابطه‌ی

$$T(x) := \lim_{n \longrightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x), \quad \forall x \in E_1$$

چنان موجود است که برای هر $x \in E_1$، اگر $f(tx)$ پیوسته باشد، آن گاه T خطی است. همچنین اگر f در یک نقطه از E_1 پیوسته باشد آن گاه T در تمام E_1 پیوسته خواهد بود.

برای قضیه فوق در اصطلاح می‌گوییم معادله‌ی تابعی جمعی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ دارای پایداری هایرز-اولام روی (E_1, E_2) است. در قضیه هایرز تابع جمعی $T : E_1 \longrightarrow E_2$ مستقیما از تابع داده شده f

ساخته می‌شود. به این روند اثبات در پایداری معادلات تابعی، روش مستقیم گفته می‌شود که ابزاری قدرتمند برای مطالعه‌ی پایداری چندین معادله‌ی تابعی می‌باشد. به ویژه برای ساختن جواب یک معادله‌ی تابعی اغلب از این روش استفاده می‌شود.

پس از ارائه‌ی جواب هایرز مفهوم پایداری هایرز-اولام برای پایداری معادلات تابعی به وجود آمد. در سال ۱۹۵۰ آئوکی[1] وجود عملگر جمعی منحصر به فرد را ثابت کرد و همچنین ادعا کرد که وجود نگاشت خطی منحصر به فرد امکان‌پذیر نیست. زیرا او شرط پیوستگی را قرار نداده بود. آئوکی[۱] قضیه زیر را ثابت کرد:

قضیه ۲.۲ (تی. آئوکی) فرض کنیم E_1 و E_2 فضاهای باناخ باشند. همچنین فرض کنیم $\theta_0 \geq 0$ و $0 \leq p < 1$ چنان موجود باشند که تابع $f : E_1 \longrightarrow E_2$ برای هر $x, y \in E_1$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \theta_0(||x||^p + ||y||^p).$$

در این صورت تابع جمعی منحصر به فرد $T : E_1 \longrightarrow E_2$ چنان موجود است که برای هر $x \in E_1$ داریم:

$$||f(x) - T(x)|| < \theta||x||^p.$$

تعمیمی از قضیه هایرز به وسیله‌ی ت. م. راسیاس[۳۰] در سال ۱۹۷۸ داده شد.

این کار در نظریه‌ی پایداری معادلات تابعی تاثیر به سزایی داشت و سبب تعریف مفهوم جدیدی به نام «پایداری هایرز-اولام-راسیاس» شد. ت. م. راسیاس[۳۰] قضیه‌ی زیر را با استفاده از روش مستقیم ثابت نمود که در آن تفاضل کوشی همانند قضیه‌ی آئوکی می‌تواند بی‌کران باشد.

قضیه ۳.۲ (ت. م. راسیاس) فرض کنیم E_1 و E_2 فضاهای باناخ باشند. همچنین فرض کنیم $\theta \geq 0$ و $0 \leq p < 1$ چنان موجود باشند که تابع $f : E_1 \longrightarrow E_2$ برای هر $x, y \in E_1$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \theta(||x||^p + ||y||^p).$$

[1] Aoki

در این صورت

$$T(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{۱}{۲^n} f(۲^n x)$$

برای هر x از $E_۱$ موجود است و نگاشت $T : E_۱ \longrightarrow E_۲$ یک نگاشت جمعی منحصر به فردی است که برای هر x از $E_۱$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$||f(x) - T(x)|| \leq \frac{۲\theta}{۲-۲^p} ||x||^p.$$

به علاوه اگر $f(tx)$ در t برای هر عدد ثابت $x \in E_۱$ پیوسته باشد، آن گاه T خطی است.

در سال ۱۹۸۲ جی. ام. راسیاس[۳۱] با پیروی از روش ت. م. راسیاس قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

قضیه ۴.۲ (جی. ام. راسیاس) فرض کنیم $\epsilon > ۰$، E فضای نرم‌دار و F فضای نرم‌دار کامل باشد و $p, q \in \mathbb{R}$ به طوری که $r := p + q \neq ۱$. اگر $f : E \longrightarrow F$ نگاشتی باشد که به ازای هر $x, y \in E$،

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq ||x||^p ||y||^p$$

آن گاه نگاشت خطی منحصر به فردی مانند $A : E \longrightarrow F$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in E$،

$$||f(x) - A(x)|| \leq \frac{\epsilon}{|۲^r - ۲|} ||x||^r.$$

به علاوه، اگر برای هر $x \in E$ نگاشت $f(tx) \longrightarrow t$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، آن گاه نگاشت $A : E \longrightarrow F$، $\mathbb{R}$ـ خطی است.

در سال ۱۹۹۰ ت. م. راسیاس[۳۲] اثبات این قضیه را برای حالت $p < ۰$ ارائه داد و این پرسش را مطرح کرد که "آیا این قضیه برای حالت $p \geq ۱$ برقرار است؟

در سال ۱۹۹۱ گاجدا[۲][۱۲] ثابت کرد که قضیه‌ی ت. م. راسیاس برای حالت $p > ۱$ نیز برقرار است. گاجدا همچنین با مثال نقض زیر برای حالت $p = ۱$ مشخص نمود. عدد ۱ تنها مقدار بحرانی برای p در قضیه‌ی ت. م. راسیاس است.

[2] Gajda

مثال ۲.۲ (گاجدا) برای یک عدد ثابت $\theta > ۰$، تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) := \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\Phi(۲^n x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

که در آن تابع $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر است:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۶}\theta & ; x \in (-\infty, -۱], \\ \frac{۱}{۶}\theta x & ; x \in (-۱, ۱), \\ \frac{۱}{۶}\theta & ; x \in [۱, \infty). \end{cases}$$

تابع f برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \theta(|x| + |y|).$$

اما هیچ عدد $\delta \in [۰, \infty)$ و هیچ تابع جمعی $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود ندارد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$|f(x) - T(x)| \leq \delta|x|.$$

در سال ۱۹۹۲ ت. م. راسیاس و شمرل[3] [۳۳] نیز برای حالت $p = ۱$ مثال نقض ساده‌ی زیر را ارائه نمودند.

مثال ۳.۲ (ت. م. راسیاس و پی. شمرل) تابع حقیقی مقدار پیوسته تعریف شده با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} x \log_۲(x+۱) & ; x \geq ۰, \\ x \log_۲ |x-۱| & ; x < ۰. \end{cases}$$

با $\theta = ۱$ در نامساوی

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \theta(||x||^p + ||y||^p)$$

صدق کند، اما برای هر عدد حقیقی c داریم

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{|f(x) - cx|}{|x|} = \infty.$$

---

[3] *Šemrel*

در دو دهه‌ی اخیر شرط تفاضل کوشی در قضیه ت. م. راسیاس توسط تعدادی از ریاضیدانان ضعیف شده است.

همچنین قضیه‌ی راسیاس برای هر $p \neq ۱$ توسط تعدادی از ریاضیدانان دیگر نیز تعمیم داده شده است. در سال ۱۹۹۴ گاوروتا کران تفاضل کوشی را به صورت تابع کنترلی $\Phi(x,y)$ در نظر گرفت[۱۱] که سبب تعریف مفهوم پایداری هایرز-اولام-راسیاس تعمیم یافته و تعمیم نتایج به دست آمده توسط ت. م. راسیاس و جی. م. راسیاس گشت. قضیه‌ی گاوروتا به صورت زیر است:

قضیه ۵.۲ (پی. گاوروتا) فرض کنیم G یک گروه آبلی، E یک فضای باناخ و $\varphi : G \times G \longrightarrow [۰,\infty)$ تابعی باشد که برای هر $x, y \in G$ در شرط زیر صدق کند:

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=۰}^{\infty} ۲^{-k-۱}\varphi(۲^k x, ۲^k y) < \infty.$$

اگر یک نگاشت جمعی $f : G \longrightarrow E$ برای هر $x, y \in G$ در نامساوی زیر صدق کند

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \varphi(x,y)$$

آن گاه نگاشت جمعی یکتای $T : G \longrightarrow E$ چنان موجود است که برای هر $x \in G$ داریم:

$$||f(x) - T(x)|| \leq \Phi(x,x).$$

به علاوه اگر $f(tx)$ در t برای هر عدد ثابت $x \in G$ پیوسته باشد آن گاه T خطی است.

۲-۲ معادله تابعی مربعی[۴]

معادله‌ی تابعی مربعی به صورت

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y)$$

[4] quadratic