بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای محمدرسول حمیدی رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۱۹ تحت عنوان: «درباره همساز بودن میدان‌های برداری یکه» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته   است که در سال   در دانشکده   دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر   ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب محمدرسول حمیدی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: محمدرسول حمیدی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۱/۱/۲۸

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب محمدرسول حمیری دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۱۳۹۱/۱/۲۸

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

درباره همساز بودن میدان‌های برداری یکه

نگارنده :

محمد رسول حمیدی

استاد راهنما :

دکتر عباس حیدری

بهمن ۱۳۹۰

تشکر و قدردانی

سپاس پروردگار یکتا را سزاست. اکنون که به خواست او کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است. بر خود لازم می‌دانم تا از راهنمایی‌های استاد گران‌سنگ، جناب آقای دکتر عباس حیدری سپاس‌گزاری کنم.

چکیده :

نشان داده می‌شود که میدان برداری شار ژئودزیکی بر کلاف کروی مماس یک خمینه‌ی همگن دونقطه‌ای، یک میدان برداری یکه‌ی همسازِ کمین و یک نگاشت همساز است. همچنین برای میدان‌های برداری شبیه آن، نتیجه‌هایی مشابه در $TM \setminus M$ و کلاف کروی مماس یک فضای کیلر با خمیدگی برشی تمام‌ریخت ثابت، به دست می‌آید. پس از آن همساز بودن یک میدان برداری یکه، به عنوان یک نگاشت از (M,g) به $\left(T_1M,\tilde{G}\right)$، که $\tilde{G}$ یک متریک g -طبیعی ریمانی بر T_1M است، بررسی می‌شود. در پایان از نتیجه‌ها به دست آمده برای تعیین مشخصه‌ی میدان‌های برداری یکه‌ی کیلینگ و ویژگی‌های میدان‌های برداری ریب همساز بر خمینه‌های با متریک ساسایا، بهره برده می‌شود.

این پایان‌نامه به تشریح مطالب مرجع‌های [AbCaPe1, BoVa] می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی : میدان‌های برداری همساز و کمین، کلاف کروی مماس، متریک‌های g -طبیعی، فضاهای همگن دو نقطه‌ای.

فهرست

پیش‌گفتار

اگر (M,g) یک خمینه‌ی ریمانی فشرده، $\mathfrak{X}(M)$ مجموعه‌ی میدان‌های برداری هموار بر M و g_s متریک ساساکی بر کلاف مماس M باشد، آنگاه هر $V \in \mathfrak{X}(M)$ یک نگاشت هموار از (M,g) به (TM,g_s) تعریف می‌کند. در [N] و [I] به صورت جدا از هم به بررسی شرایطی که در آن $V \in \mathfrak{X}(M)$ به عنوان یک نگاشت از (M,g) به (TM,g_s) همساز باشد، پرداخته شده است. در [G] به بررسی شرایط نقطه‌ی بحرانی تابعک انرژی، $E:\mathfrak{X}(M) \to \mathbf{R}$ پرداخته شده، که در آن $E(V)$، برای هر $V \in \mathfrak{X}(M)$ با توجه به متریک ساساکی به دست آمده است.

فرض کنید $\mathfrak{X}^1(M)$، مجموعه‌ی میدان‌های برداری یکه بر M و T_1M کلاف کروی مماس M و g_s متریک ساساکی بر T_1M باشد. در [HaYi] میدان‌های برداری یکه‌ای که یک نگاشت همساز از (M,g) به (T_1M,g_s) را تعریف می‌کنند، مشخص شده است. همساز بودن میدان‌های برداری یکه در حالتی که کلاف کروی مماس دارای متریک چیگر- کرومل است، در [BeLoWo] مطالعه شده است.

در مطالعه‌ی کلاف مماس، متریک ساساکی بیش از هر متریک دیگر به کار رفته است. در واقع متریک ساساکی یک عضو از یک دسته‌ی گسترده از متریک‌های بر کلاف مماس بر M است که متریک‌های g-طبیعی نامیده می‌شوند. در [AbCaPe2] انرژی $V \in \mathfrak{X}(M)$، به عنوان انرژی نگاشت $V:(M,g)\to(TM,G)$، آمده

است که G یک متریک g-طبیعی ریمانی دلخواه بر M است. با بهره‌گیری از شرط‌های نقطه‌ی بحرانی تابعک انرژی و میدان پریشیدگی، مطالعه‌هایی درباره‌ی میدان‌های برداری ریب انجام شده است.

این پایان‌نامه به تشریح مطالب مرجع‌های [AbCaPe$_1$, BoVa] می‌پردازد و ساختار آن چنین است:

در فصل اول پیش‌نیازها آورده شده است. فصل دوم این پایان‌نامه به بررسی همساز و کمین بودن چند میدان برداری ویژه بر کلاف کروی مماس، در حالتی که کلاف کروی مماس دارای متریک ساساکی است، می‌پردازد.

در فصل پایانی شرط‌هایی را که در آن یک میدان برداری یکه مانند V، به عنوان یک نگاشت از (M,g) به $(T_1M,\tilde{G})$ همساز است که $\tilde{G}$ یک متریک g-طبیعی ریمانی دلخواه بر M است، آورده شده و به کاربردهایی از آن در میدان‌های برداری کیلینگ و میدان‌های برداری ریب در یک خمینه‌ی سایا پرداخته شده است.

فصل اول

پیش‌نیازها

در این فصل پیش‌نیازها داده می‌شود.

۱.۱. ترفیع‌های عمودی و افقی

هرگاه (M,g) یک خمینه‌ی ریمانی n-بعدی و ∇ هموستار لوی-چویتای آن باشد در هر نقطه‌ی $(x,u)\in TM$ فضای مماس بر TM با توجه به ∇، به صورت حاصل‌جمع مستقیم زیرفضاهای عمودی و افقی قابل تجزیه است

$$T_{(x,u)}TM = H_{(x,u)} \oplus V_{(x,u)}\,.$$

برای هر $X \in T_xM$، بردار یکتای $X^h \in H_{(x,u)}$ که آن را ترفیع افقی X به $(x,u)\in TM$ می‌نامند وجود دارد چنان که $\pi_* X^h = X$، $\pi : TM \to M$ همان افکنش طبیعی کلاف مماس بر M است. ترفیع عمودی $X \in T_xM$ به $(x,u)\in TM$ بردار یکتای $X^v \in V_{(x,u)}$ است که برای هر نگاشت هموار f بر M، $X^v(df) = X(f)$، که در این‌جا ۱-فرم df بر M به صورت یک نگاشت بر TM که $df(x,u) = u(f)$، در نظر گرفته شده است. نگاشت $X \to X^h$ یک یک‌ریختی بین T_xM و $H_{(x,u)}$ است و به همین ترتیب نگاشت $X \to X^v$ یک یک‌ریختی بین T_xM و $V_{(x,u)}$ است. پس برای هر $(x,u)\in TM$، $T_{(x,u)}TM$ به طور کامل

توسط T_xM تعیین می‌شود. ترفیع‌های افقی و عمودی میدان‌های برداری M بر TM به صورت مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. [AbCaPe$_1$]. هرگاه (M,g) یک خمینه‌ی ریمانی و ∇ هموستار لوی-چویتای آن باشد تانسور خمیدگی ریمانی، R به صورت $R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$ تعریف می‌شود که X، Y و Z میدان‌های برداری دلخواه بر M هستند.

تعریف ۲.۱.۱. [BoVa]. هرگاه T یک تانسور مرتبه‌ی $(1,s)$ و $X^1,...,X^{s-1}$ میدان‌های برداری دلخواه بر M باشند، منظور از ترفیع عمودی $T(X^1,...,u,...,X^{s-1})$، یک میدان برداری بر TM است که چنین تعریف می-شود

$$T(X^1,...,u,...,X^{s-1})^v_{(x,w)}=\left(T(X^1{}_x,...,w,...,X^{s-1}{}_x)\right)^v.$$

ترفیع افقی $T(X^1,...,u,...,X^{s-1})$، $T(X^1,...,u,...,X^{s-1})^h$ به روش مشابه تعریف می‌شود.

خمینه‌ی ریمانی (M,g) را در نظر بگیرید برای تعریف ضرب داخلی g_s در $T_{(x,w)}TM$ کافی است g_s را بر بردارهای افقی و عمودی تعریف کنیم

$$\begin{cases} g_s(X^v,Y^v)=g_s(X^h,Y^h)=g(X,Y) \\ g_s(X^h,Y^v)=0 \end{cases}$$

به این ترتیب می‌توان g_s را در هر نقطه از TTM تعریف کرد. نشان داده می‌شود که g_s در TTM هموار است بنابراین یک متریک ریمانی بر TM است. برای این کار نمایش موضعی g_s را به دست می‌آوریم. اگر (U,x) یک نقشه‌ی M باشد آنگاه $\left((\frac{\partial}{\partial x^1})^h,...,(\frac{\partial}{\partial x^n})^h,(\frac{\partial}{\partial x^1})^v,...,(\frac{\partial}{\partial x^n})^v\right)$ یک کنج موضعی برای TM بر TU است. اگر قرار دهیم $\delta u^i=u^j\Gamma^i_{kj}dx^k+du^i$، (که Γ^i_{kj}ها علائم کریستوفل هموستار لوی-چویتای ∇ هستند) می‌توان دید که $(dx^1,...,dx^n,\delta u^1,...,\delta u^n)$ دوگان این کنج موضعی است. آنگاه داریم

$$g_s=g_{ij}dx^i\otimes dx^j+g_{ij}\delta u^i\otimes\delta u^j,$$

که g_{ij} مؤلفه‌های متریک g هستند.

تعریف۱.۱.۳. [BoVa]. متریک *ریمانی* g_s بر TM را متریک ساساکی[1] بر کلاف مماس بر M نامند. (در این جا متریک ساساکی را با $\tilde{g}$ نیز نمایش می‌دهیم)

[1] Sasaki metric

فصل دوم

همساز بودن میدان‌های برداری یکه با توجه به متریک ساساکی

در آغاز هموستار لوی-چویتا و تانسور خمیدگی ریمانی (TM, g_s) را به دست می‌آوریم، پس از آن کلاف کروی مماس را به عنوان یک زیرخمینه‌ی ریمانی از (TM, g_s) معرفی کرده، هموستار لوی-چویتا و تانسور خمیدگی ریمانی آن را نیز به دست می‌آوریم. در ادامه شرط‌هایی را که در آن یک میدان برداری یکه به عنوان یک نگاشت از (M, g) به (T_1M, g_s) همساز و یا کمین است، بیان می‌کنیم و با بهره‌گیری از آن به بررسی همساز یا کمین بودن چند میدان برداری یکه‌ی ویژه بر کلاف کروی مماس می‌پردازیم. سپس تعریف کلاف کروی مماس با شعاع دلخواه را به عنوان یک گسترش از کلاف کروی مماس یکه بیان می‌کنیم و برخی نتیجه‌ها به دست آمده برای (T_1M, g_s) را به کلاف کروی مماس با شعاع دلخواه گسترش می‌دهیم. در بخش ۶.۲ همساز و کمین بودن چند میدان برداری خاص بر کلاف کروی مماس یک فضای کیلر بررسی شده است. در پایان همساز و یا کمین بودن چند میدان برداری یکه را بر $TM \setminus M$ بررسی می‌کنیم.

۱.۲. هموستار لوی-چویتا و تانسور خمیدگی ریمانی (TM,g_s)

هموستار لوی-چویتای (TM,g_s)

هموستار لوی-چویتای (TM,g_s) را با $\tilde{\nabla}$ نمایش می‌دهیم. ابتدا نمادهای کریستوفل (TM,g_s)، $\tilde{\Gamma}$ را به دست می‌آوریم و با بهره‌گیری از آن $\tilde{\nabla}$ را به دست آورده می‌شود. برای این کار ابتدا کروشه‌ی میدان‌های برداری عمودی و افقی را به دست می‌آوریم.

قرارداد. قرار دهید

$$D_i := \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial x^i})^h, & i=1,\ldots,n \\ (\frac{\partial}{\partial x^i})^v, & j=n+1,\ldots,2n \end{cases}, \qquad \theta^i := \begin{cases} d\overline{x}^i & i=1,\ldots,n \\ \delta u^i & i=n+1,\ldots,2n \end{cases}.$$

و فرض کنید $\alpha,\beta,\ldots$ و $A,B,\ldots$، مقدارهای $\{1,2,\ldots,2n\}$ و $i,j,\ldots$ مقدارهای $\{1,2,\ldots,n\}$ را بگیرد و $\overline{i} := i+n$ و

$$.\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}, \quad \partial_{\overline{i}} = \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad dx^i = d\overline{x}^i, \quad dx^{\overline{i}} = du^i \qquad i=1,\ldots,n$$

با علامت‌گذاری بالا داریم $\theta^\alpha = A^\alpha_A dx^A$ و $D_\alpha = A^A_\alpha \partial_A$ در آنگاه

$$\left[D_\alpha, D_\beta\right] = D_\alpha(A^A_\beta \partial_A) - D_\beta(A^A_\alpha \partial_A).$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} & D_\alpha = A^A_\alpha \partial_A \\ \Rightarrow\ & \theta^\alpha D_\alpha = \sum_{A,A'} A^\alpha_{A'} dx^{A'} A^A_\alpha \partial_A = \sum_A A^\alpha_A A^A_\alpha = 1 \\ \Rightarrow\ & \partial_A = \sum_\alpha A^\alpha_A D_\alpha \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A^A_\beta D_\alpha \partial_A - A^A_\alpha D_\beta \partial_A &= A^A_\beta A^B_\alpha \partial_B \partial_A - A^A_\alpha A^B_\beta \partial_B \partial_A \\ &= A^B_\alpha A^A_\beta \left[\partial_A, \partial_B\right] = 0. \end{aligned}$$

زیرا (∂_A) پایه‌ای به دست آمده از نقشه‌ی خمینه‌ای (TU,dx) است و بنابراین $[\partial_A,\partial_B]=0$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\left[D_\alpha,D_\beta\right]&=(D_\alpha(A_\beta^A)-D_\beta(A_\alpha^A))\partial_A\\&=((D_\alpha(A_\beta^A)-D_\beta(A_\alpha^A))A_A^\gamma)D_\gamma\,.\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $\Omega_{\alpha\beta}^\gamma=(D_\alpha(A_\beta^A)-D_\beta(A_\alpha^A))A_A^\gamma$. آنگاه $\left[D_\alpha,D_\beta\right]=\Omega_{\alpha\beta}^\gamma D_\gamma$.

با محاسبه‌ی سر راست می‌توان دید که

$$\Omega_{ji}^{\bar h}=R_{jik}^h u^k,$$

$$\Omega_{j\bar i}^{\bar h}=\Gamma_{ji}^h,$$

$$\Omega_{\bar j i}^{\bar h}=-\Gamma_{ji}^h,$$

$$\Omega_{\bar j\bar i}^{\bar h}=\Omega_{ji}^h=\Omega_{j\bar i}^h=\Omega_{\bar j i}^h=\Omega_{\bar j\bar i}^h=0.$$

به محاسبه‌ی $\tilde\Gamma$ باز می‌گردیم، از رابطه‌ی کزول داریم

$$\begin{aligned}2\left\langle\tilde\nabla_{D_\alpha}D_\beta,D_\gamma\right\rangle&=D_\alpha\left\langle D_\beta,D_\gamma\right\rangle+D_\beta\left\langle D_\alpha,D_\gamma\right\rangle-D_\gamma\left\langle D_\alpha,D_\beta\right\rangle\\&\quad-\left\langle D_\alpha,\left[D_\beta,D_\gamma\right]\right\rangle-\left\langle D_\beta,\left[D_\alpha,D_\gamma\right]\right\rangle+\left\langle D_\gamma,\left[D_\beta,D_\alpha\right]\right\rangle\\&=\tilde\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda\tilde g_{\lambda\gamma}\,.\end{aligned}$$

با فرض این که $\left(\tilde g^{\lambda\gamma}\right)$ وارون ماتریس $\left(\tilde g_{\lambda\gamma}\right)$ است، داریم

$$\tilde\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda=\frac{1}{2}\sum_\eta\tilde g^{\eta\lambda}\left(D_\alpha(\tilde g_{\beta\eta})+D_\beta(\tilde g_{\alpha\eta})-D_\eta(\tilde g_{\alpha\beta})-\left\langle D_\alpha,\left[D_\beta,D_\eta\right]\right\rangle-\left\langle D_\beta,\left[D_\alpha,D_\eta\right]\right\rangle+\left\langle D_\eta,\left[D_\beta,D_\alpha\right]\right\rangle\right)$$

با توجه به شکل بلوکی

$$\left(\tilde g_{\lambda\gamma}\right)=\begin{pmatrix}g_{ji}&0\\0&g_{ji}\end{pmatrix},\qquad\left(\tilde g^{\lambda\gamma}\right)=\begin{pmatrix}g^{ji}&0\\0&g^{ji}\end{pmatrix}.$$

داریم

$$\tilde\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{a\le n}\tilde g^{ka}\left\{\frac{\partial}{\partial\overline{x}^i}(\tilde g_{ja})+\frac{\partial}{\partial\overline{x}^j}(\tilde g_{ia})-\frac{\partial}{\partial\overline{x}^a}(\tilde g_{ji})\right\}=\Gamma_{ij}^k\,.$$

به همین ترتیب

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}} = \frac{1}{2}\sum_{a\rangle n} \tilde{g}^{\bar{k}a}\left\{0+0+0+0+0+\left\langle D_{a,}\Omega_{ji}^{\bar{h}} D_{\bar{h}}\right\rangle\right\} = \frac{1}{2}\sum_{a\rangle n} \tilde{g}^{\bar{k}a}\Omega_{ji}^{\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{h}a} = \frac{1}{2}\Omega_{ji}^{\bar{k}} = -\frac{1}{2}R_{ijh}^{k}u^{h} .$$

و به طور مشابه می‌توان دید

$$\tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{h} = -\frac{1}{2}R_{jki}^{h}u^{k},$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = \tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = 0,$$

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{h} = -\frac{1}{2}R_{ikj}^{h}u^{\bar{k}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ij}^{k},$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k},$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}.$$

در ادامه با بهره‌گیری از $\tilde{\Gamma}$ به محاسبه‌ی $\tilde{\nabla}$ می‌پردازیم

$$\tilde{\nabla}_{D_{\bar{i}}} D_{\bar{j}} = \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\alpha} D_{\alpha} = 0 \text{ ,}$$

از سوی دیگر با توجه به این که برای میدان برداری $X \in \mathfrak{X}(M)$ و $f \in C^{\infty}(M)$ داریم

$$X^{v}(fo\pi)$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{\nabla}_{X^{v}} Y^{v} = 0$$

برای هر $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

داریم $\tilde{\nabla}_{D_{\bar{j}}} D_{i} = \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\alpha} D_{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{h} D_{h} + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\bar{h}} D_{\bar{h}} = -\frac{1}{2}R_{ikj}^{h}u^{k}D_{h}$. بنابراین برای $X = X^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}$ و $Y = Y^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}$ در $\mathfrak{X}(M)$ داریم

$$\tilde{\nabla}_{X^{v}} Y^{h} = X^{j} D_{\bar{j}}(Y^{i}) D_{i} + \frac{1}{2}X^{j}Y^{i}R_{kij}^{h}u^{k}D_{h} = \frac{1}{2}(R_{uY}X)^{h} .$$

به همین ترتیب و با محاسبه‌های همانند می‌توان دید که هموستار لوی-چویتای (TM, g_{s}) چنین است

$$\tilde{\nabla}_{X^{h}} Y^{v} = (\nabla_{X} Y)^{v} + \frac{1}{2}\big(R(u,Y)X\big)^{h},$$

$$\tilde{\nabla}_{X^{v}} Y^{v} = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h = (\nabla_X Y)^h - (R_{XY} u)^v,$$
$$\tilde{\nabla}_{X^v} Y^h = \frac{1}{2}\left(R(u,Y)X\right)^h.$$

تانسور خمیدگی ریمانی (TM, g_s)

اکنون با داشتن $\tilde{\nabla}$ می‌توان دید که تانسور خمیدگی ریمانی $\tilde{R}$ برای (TM, g_s) چنین است

$$\tilde{R}_{X^vY^v} Z^h = (R_{XY}Z)^h + \frac{1}{4}\left\{\left[R_{uX}, R_{uY}\right]Z\right\},$$
$$\tilde{R}_{X^vY^v} Z^v = 0,$$
$$\tilde{R}_{X^hY^v} Z^v = -\frac{1}{2}(R_{YZ}X)^h - \frac{1}{4}(R_{uY}R_{uZ}X)^h,$$
$$\tilde{R}_{X^hY^v} Z^h = \frac{1}{2}(R_{XZ}Y)^v - \frac{1}{4}(R(X, R(u,Y)Z)u)^v + \frac{1}{2}((\nabla_X R)(u,Y)Z)^h,$$
$$\tilde{R}_{X^hY^h} Z^v = (R_{XY}Z)^v + \frac{1}{4}(R(Y, R(u,Z)X)u - R(X, R(u,Z)Y)u)^v + \frac{1}{2}(\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X)^h,$$
$$\tilde{R}_{X^hY^h} Z^h = (R_{XY}Z)^h + \frac{1}{2}(R(u, R(X,Y)u)Z)^h - \frac{1}{4}(R(u, R(Y,Z)u)X - R(u, R(X,Z)u)Y + \frac{1}{2}(\nabla_X R)(X,Y)u)^v.$$

به عنوان مثال برابری اول و دوم، $\tilde{R}_{X^vY^v} Z^v = 0$ و $\tilde{R}_{X^vY^v} Z^h = (R_{XY}Z)^h + \frac{1}{4}\left\{\left[R_{uX}, R_{uY}\right]Z\right\}$ را ثابت می‌کنیم برابری‌های دیگر به صورت مشابه اثبات می‌شوند. برای این کار داریم

$$\tilde{R}_{X^vY^v} Z^v = \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v} Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v} Z^v - \tilde{\nabla}_{\left[X^v, Y^v\right]} Z^v.$$

برای محاسبه‌ی آخرین عبارت در رابطه‌ی بالا به چند یادآوری نیاز است.

یادآوری . اگر $f \in C^\infty(M)$ آنگاه df را می‌توان در $C^\infty(TM)$ نظر گرفت، که اگر (U, x) یک نقشه‌ی M باشد؛ نمایش موضعی df چنین است

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} u^i.$$

گزاره ۱.۱.۲. [YaIs; P. 5] . اگر $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ میدان‌های برداری در TM باشند که $\tilde{X}(df) = \tilde{Y}(df)$ برای هر $f \in C^\infty(M)$ آنگاه $\tilde{X} = \tilde{Y}$.

گزاره ۲.۱.۲. [YaIs; P. 7]. برای هر $X,Y\in \mathfrak{X}(M)$، $\left[X^v,Y^v\right]=0$.

بنابراین $\tilde{\nabla}_{\left[X^v,Y^v\right]}Z^v=0$ و در نتیجه

$$\tilde{R}_{X^vY^v}Z^v=0. \qquad \square$$

و به همین ترتیب

$$\tilde{R}_{X^vY^v}Z^h=\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h-\tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^h-\tilde{\nabla}_{\left[X^v,Y^v\right]}Z^h=\frac{1}{2}\left(\tilde{\nabla}_{X^v}(R_{uY}Z)^h-\tilde{\nabla}_{Y^v}(R_{uX}Z)^h\right)$$

و از سوی دیگر

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X^v}(R_{uY}Z)^h &=\tilde{\nabla}_{X^v}(u^iY^jZ^kR^h_{ijk}(\partial_h)^h)\\ &=X^iY^jZ^kR^h_{ijk}(\partial_h)^h+\frac{1}{2}u^iY^jZ^kR^h_{ijk}(\tilde{\nabla}_{X^v}(\partial_h)^h)\\ &=X^iY^jZ^kR^h_{ijk}(\partial_h)^h+\frac{1}{2}u^iY^jZ^kR^h_{ijk}(R_{uX}\partial_h)^h\\ &=(R_{XY}Z)^h+\frac{1}{2}(R_{uX}(R_{uY}Z))^h.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{R}_{X^vY^v}Z^h=(R_{XY}Z)^h+\frac{1}{4}\{[R_{uX},R_{uY}]Z\}. \qquad \square$$

۲.۲. کلاف کروی مماس

تعریف ۱.۲.۲. [BoVa]. برای خمینه ریمانی (M,g) کلاف کروی مماس، T_1M عبارت است از

$$T_1M=\{(x,w)\in TM : g_x(w,w)=1\}.$$

تعریف ۲.۲.۲. فرم درجه دوم q بر TM، $q:TM\to\mathbf{R}$ چنین $q(x,w)=g_x(w,w)$ تعریف می‌شود. از نمایش موضعی q یعنی $q=g_{ij}u^iu^j$ پیدا است که q در $C^\infty(TM)$ جای می‌گیرد.

محاسبه‌ی موضعی *grad(q)*