بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی تعمیم یافته در فضاهای متری مرتب

استاد راهنما

دکتر علیرضا امینی هرندی

استاد مشاور

دکتر نها افتخاری

پژوهشگر

اعظم شجاعی

تیر ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادي حاصله از نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوري هاي ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه شهرکرد است.

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب های بزرگشان، که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،

و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،

این مجموعه را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم.

اولین چکه ناودان بلند یک احساس را در قالب کلامی از جنس تنفس با غنچه‌های معصوم یاس، به روی حجم سپید یک برگه می‌ریزم و آن را به لهجه‌های همه‌ی پروانه صفتهای این گیتی بی انتها به آستان نیلوفری دلهای زلال هدیه می‌کنم:

ای یزدان پاک تو را سپاس می‌گویم،

که به حکمت بی‌انتهایت مرا یاری کردی،

و به رحمتت نعمتهایت را بر من تمام کردی،

خانواده‌ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی‌ام کنند و استادانی سر راهم نهادی تا دانش و علمشان را بی‌ریا در اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می‌دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این پایان‌نامه مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب قدردانی وسپاس خود را از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر علیرضا امینی هرندی و استاد مشاور سرکار خانم دکتر نها افتخاری ابراز می‌نمایم. همچنین از استاد گرانقدر، دکتر حمید شایان‌پور و سرکار خانم دکتر مریم شمس که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، قدردانی می‌نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

اعظم شجاعی

تیر ۱۳۹۲

چکیده

درسال‌های اخیر، نتایجی از قضایای نقطه ثابت بسیاری در فضاهای متری جزئاً مرتب به دست آمده است. نخستین قضیه در این جهت متعلق به ران [1] و رویرینگز [2] در سال ۲۰۰۴ است که آن‌ها کاربردهایی از آن را در معادلات ماتریسی ارائه دادند. پس از آن لوپز [3] و نیتو [4] در سال ۲۰۰۵ نتیجه ران و رویرینگز را گسترش دادند و آن را برای اثبات وجود جواب یکتا برای یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی متناوب به کار بردند.

فرض کنید X یک مجموعه و $T : X \to X$ یک تابع باشد. هدف نظریه‌ی نقطه ثابت تعیین شرایطی روی X و یا تابع T است به طوری که وجود یک نقطه‌ی ثابت برای T تضمین شود.

بررسی وجود نقطه ثابت در بسیاری از مسائل کاربردی مانند قضایای وجودی در معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، نظریه‌ی کنترل، نابرابری‌های تغییراتی و ... دارای کاربردهای اساسی می‌باشد.

ما چندین قضیه‌ی نقطه ثابت در فضاهای متری جزئاً مرتب بیان می‌کنیم، سپس کاربرد این قضایا در نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و مسأله‌ی مقدار مرزی متناوب می‌پردازیم.

کلمات کلیدی : نقطه ثابت، مجموعه‌ی جزئاً مرتب، فضای متری، نقطه ثابت دوتایی، فضای متری کامل، اصل انقباضی باناخ، نقطه ثابت مشترک.

1. Ran
2. Reurings
3. Rodriguez lopez
4. Nieto

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنید X یک مجموعه و $T : X \to X$ یک تابع باشد. هدف نظریه‌ی نقطه ثابت تعیین شرایطی روی X و یا تابع T است به طوری که وجود یک نقطه‌ی ثابت برای T تضمین شود.
بررسی وجود نقطه ثابت در بسیاری از مسائل کاربردی مانند قضایای وجودی در معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، نظریه‌ی کنترل، نابرابری‌های تغییراتی و ... دارای کاربردهای اساسی می‌باشد.
این پایان‌نامه شامل پنج فصل است که در فصل اول برخی از تعریف‌ها و قضیه‌های مربوط به نقطه ثابت را که برای بیان مطالب فصل‌های بعدی مورد نیاز است، می‌آوریم و در ادامه اصل انقباضی باناخ، را بیان می‌کنیم. قضیه نقطه ثابت باناخ نقطه‌ی شروع نظریه نقطه ثابت متری است.
این قضیه بیان می کند که اگر (X, d) یک فضای متری کامل و $T : X \to X$ یک نگاشتی باشد به قسمی که

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X \quad k \in [0, 1)$$

، آن‌گاه T دارای نقطه ثابت منحصربفرد خواهد بود.
تاکنون تعمیم‌های بسیاری از قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ به دست آمده است. در فصل دوم، قضایای نقطه ثابت را می‌آوریم. در سال‌های اخیر قضایای نقطه ثابت بسیاری در فضاهای متری جزئاً مرتب کامل، اثبات شده است و همچنین نتایج زیادی در رابطه با فضای متری جزئاً مرتب کامل بیان شده است.
در فصل سوم، قضایای نقطه ثابت انطباق و نقطه ثابت مشترک را برای نگاشت‌های (α, ψ) - انقباضی ضعیف در فضاهای متری مرتب کامل ثابت می‌کنیم. نتایج و برخی از کاربردهای آن‌ها را بیان می‌کنیم.
در فصل چهارم، تعمیم دیگری از اصل انقباضی باناخ را در فضای متری جزئاً مرتب کامل می‌آوریم.
یکی از کاربردهای آن، وجود جواب و یکتایی آن، برای حل معادله‌ی مرزی متناوب می‌باشد.
در فصل پنجم، قضایای نقطه ثابت دوتایی را برای نگاشت‌های انقباضی غیر خطی در فضای متری جزئاً مرتب ثابت می‌کنیم. یکتایی نقطه ثابت دوتایی را برای این نوع نگاشت‌ها ثابت می‌کنیم. این پایان‌نامه از مقالات [۱،۹،۱۰،۱۱] برگرفته شده است.

فهرست نمادها

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

در این فصل به یاد آوری تعاریف و قضایای مقدماتی که پیش نیازی برای فصل‌های بعدی است می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. یک مجموعه‌ی غیرتهی X همراه با یک رابطه‌ی $\leq$ روی X که دارای خواص انعکاسی، تعدی و پادتقارنی باشد را یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. $T(x)$ را تابع صعودی گوییم، اگر برای هر $x, y \in X$ ، $x \leq y$ ، آن‌گاه $T(x) \leq T(y)$ و $T(x)$ را تابع نزولی گوییم، اگر برای هر $x, y \in X$ ، $x \leq y$ ، آن‌گاه $T(y) \leq T(x)$.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه‌ی X را یک فضای متری گوییم هر گاه به هر دو نقطه‌ی p, q از X عدد حقیقی $d(p, q)$ به نام فاصله از p تا q مربوط باشد به طوری که:

الف) $d(p, q) \geq 0, d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$؛

ب) $d(p, q) = d(q, p)$؛

پ) برای هر $r \in X$ ، $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

تعریف ۴.۱.۱. الف) دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای متری X را همگرا می‌گوییم، هرگاه $p \in X$ با خاصیت زیر موجود باشد، به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح مثبتی چون N باشد به طوری که، $n \geq N$ نامساوی $d(x_n, p) < \varepsilon$ را ایجاب کند.

(ب) $\{x_n\}$ را یک دنباله‌ی کشی نامیم هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : m > n > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

تعریف ۵.۱.۱. یک فضای متری که هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد را فضای متری کامل گوییم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهایی متری باشند، نگاشت $f : E \subset X \to Y$ و $p \in E$ را در نظر بگیرید f را در p پیوسته گوییم، هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به قسمی که به ازای تمام نقاط $x \in E$ که $d_X(x,p) < \delta$ داشته باشیم

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

علامت‌های d_X و d_Y به ترتیب اشاره به متر در X و Y دارد.

تعریف ۷.۱.۱. نگاشت $\psi : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty[$ را نیم پیوسته‌ی بالایی از راست گوییم اگر برای هر دنباله‌ی نزولی $\{r_j\}$ و همگرا به $r \geqslant 0$، داشته باشیم

$$\limsup_{j\to\infty} \psi(r_j) \leq \psi(r).$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty[$ یک تابع دلخواه باشد، اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ مجموعه‌ای بسته باشد، تابع f را نیم پیوسته‌ی پایینی می‌گوییم.

تعریف ۹.۱.۱. منظور از پوشش باز مجموعه E در فضای متری X یعنی گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \cup G_\alpha$. زیر مجموعه‌ی K از فضای متری X را فشرده می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوشش متناهی باشد. یعنی اگر $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی از K باشد، چند اندیس مانند $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. وجود دارد، به طوری که

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup ... \cup G_{\alpha_n}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید K نماینگر یکی از میدان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد و X یک فضای برداری روی K باشد. یک نرم روی X تابعی است مانند $\|.\| : X \to [0, \infty)$ به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in k$ ،

(الف) $\|x\| \geq 0, x = 0 \iff \|x\| = 0$؛

(ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

(پ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

دو تایی $(X, \|.\|)$ را یک فضای برداری نرم‌دار می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای نرم‌داری که نسبت به متر $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد را یک فضای باناخ گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر $(X, \preceq, d)$ یک فضای متری جزئاً مرتب باشد، X را منظم می‌نامیم اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی $\{z_n\}$ صعودی در X ، اگر $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ، آن‌گاه برای هر $z_n \preceq z$ که $n \in \mathbb{N}$.

۲.۱ مقدمه‌ای بر نقطه ثابت

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه و $f : Y \subseteq X \to X$ نگاشتی دلخواه باشد $x \in Y$ را یک نقطه ثابت f گوییم هر گاه، $f(x) = x$.

نقطه ثابت در بسیاری از مسائل کاربردی مانند قضایای وجودی در معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و ... دارای کاربرد اساسی است.

تعریف ۲.۲.۱. اگر (X, d) فضای متری کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد به قسمی که

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \qquad \forall x, y \in X \tag{۱.۱}$$

آن‌گاه T را یک نگاشت $k-$ انقباضی می‌نامیم که $0 \leq k < 1$ عددی ثابت است.

باناخ [1] در سال ۱۹۲۲ [۳] قضیه‌ی نقطه ثابت زیر را اثبات کرد و کاربردی از آن را در حل معادلات انتگرال بیان کرد.

قضیه ۳.۲.۱. *(اصل انقباضی باناخ):فرض کنید (X, d) یک فضای متری کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت $k-$ انقباضی باشد. در این صورت T دارای، نقطه ثابت یکتای x_0 است. به علاوه برای هر $x \in X$ دنباله‌ی تکرار $f^n(x)$ همگرا به x_0 است، یعنی*

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = x_0.$$

براور [2] در سال ۱۹۱۲ قضیه‌ی نقطه ثابت مهم زیر را ثابت کرد.

قضیه ۴.۲.۱. *فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ناتهی محدب، فشرده و $T : X \to X$ پیوسته باشد در این صورت T دارای نقطه ثابت است.*

ملاحظه ۵.۲.۱. *توجه کنید که برتری اصل انقباضی باناخ بر قضیه‌ی نقطه ثابت براور آن است که در فضای متری بیان شده و X دارای محدودیت فشردگی نیست ولی تابع T دارای محدودیت بیشتری است، زیرا انقباضی بودن T ، پیوستگی T را ایجاب می‌کند.*

1. Banach
2. Brouwer

فصل ۲

قضایای نقطه ثابت و کاربرد آن در معادلات انتگرال

۱.۲ قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری جزئاً مرتب

خان [1] و همکارانش [۸] گروه جدیدی از قضایای نقطه ثابت برای خود نگاشت‌های تک مقداری را با کمک تابع کنترل که تابع تغییر فاصله نامیده می‌شود، بیان کردند.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید (X, d) یک فضای متری کامل باشد. $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ را تابع تغییر فاصله می‌نامند اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\psi(t) = 0$ اگر و تنها اگر $t = 0$

۲. ψ پیوسته و به طور یکنوا صعودی باشد.

خان و همکارانش [۸] گسترش زیر از اصل انقباضی باناخ را اثبات کردند.

قضیه ۲.۱.۲. *فرض کنید (X, d) یک فضای متری کامل، ψ یک تابع تغییر فاصله و $T : X \to X$ نگاشتی باشد به قسمی که برای هر $x, y \in X$ ،*

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq k\psi(d(x, y)),$$

که در آن $0 < k < 1$. آن‌گاه T نقطه ثابت یکتا خواهد داشت.

با جایگذاری $\psi(t) = t$ در قضیه‌ی ۲.۱.۲ اصل انقباضی باناخ به دست می‌آید. آلبر [2] و جوری [3] [۲] نگاشت‌های انقباضی ضعیف را در فضای هیلبرت معرفی کردند.

1. Khan
2. Alber
3. Guerre

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $T:X\to X$ یک نگاشت باشد. T را انقباضی ضعیف می‌نامیم اگر که برای هر $x,y\in X$ ،

$$d(Tx,Ty)\leq d(x,y)-\phi(d(x,y)),$$

که $\phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ یک تابع تغییر فاصله است.

روادس [1] [۱۴] تعمیم دیگری از اصل انقباضی باناخ را ثابت کرد، که آن را در زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۲. *فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T:X\to X$ یک نگاشت انقباضی ضعیف باشد، آن‌گاه T نقطه ثابت یکتا دارد.*

آلبر [2] و همکارانش [۲] شرط زیر را بر φ اضافه کردند، $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=+\infty$ ، اما روادس بدون اضافه کردن این شرط قضیه‌ی ۴.۱.۲ را به دست آورد. اگر $\phi(t)=(1-k)t$ را جایگذاری کنیم، برای $0<k<1$ ، آن‌گاه اصل انقباضی باناخ را نتیجه می‌دهد. دوتا [3] و چودری [4] [۵] تعمیم کلی‌تری از قضایای ۲.۱.۲ و ۴.۱.۲ مطرح کردند که در زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنیم (X,d) یک فضای متری کامل و $T:X\to X$ نگاشتی باشد به قسمی که برای هر $x,y\in X$ ،*

$$d(Tx,Ty)\leq\psi(d(x,y))-\varphi(d(x,y)),$$

در آن φ و ψ توابع تغییر فاصله هستند. آن‌گاه T دارای نقطه ثابت یکتا است.

همچنین ژانگ [5] و سونگ [6] [۱۵] نتیجه‌ی کلی‌تری از قضیه‌ی ۵.۱.۲ را مطرح کردند، که در زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۱.۲. *فرض کنید (X,d) یک فضای متری کامل و $T,S:X\to X$ نگاشت‌هایی باشند، برای هر $x,y\in X$*

$$d(Tx,Sy)\leq\Theta(x,y)-\phi(\Theta(x,y)),$$

که در آن $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ تابع نیم پیوسته‌ی پایینی با $\phi(t)>0$ برای $t>0$ و $\phi(0)=0$ ،

$$\Theta(x,y)=max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Sy),\frac{1}{2}[d(y,Tx)+d(x,Sy)]\}.$$

آن‌گاه، یک نقطه‌ی $z\in X$ وجود دارد که

$$z=Tz=Sz.$$

1. Rhoades
2. Alber
3. Dutta
4. Choudhury
5. Zhang
6. Song

در سال‌های اخیر نتایج زیادی مربوط به قضایای نقطه ثابت در فضای متری کامل دارای ترتیب جزئی بیان شده است.

ما در اینجا با نگاشت‌های تک مقداری شروع می‌کنیم. در زیر تعمیمی از قضیه‌ی اصل انقباضی باناخ، در قضیه‌ی ۴.۱.۲ توسط هارجنی [1] و صدرنگانی [2] [۶] آمده است.

قضیه ۷.۱.۲. *فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب و (X,d) یک فضای متری کامل باشد. اگر $T:X\to X$ یک نگاشت صعودی باشد به قسمی که برای هر $y\le x$ ،*

$$\varphi(d(Tx,Ty))\le\varphi(\Theta(x,y))-\phi(\Theta(x,y))\quad \forall y\preceq x, \tag{۱.۲}$$

که

$$\Theta(x,y)=ad(x,y)+bd(x,Tx)+cd(y,Ty)+e[d(y,Tx)+d(x,Ty)], \tag{۲.۲}$$

و φ و ϕ توابعی از $[0,\infty)$ به $[0,\infty)$ باشند به طوری که φ پیوسته و صعودی و ϕ نیم پیوسته‌ی پایینی باشد و $\varphi(t)=0=\phi(t)$ اگر و تنها اگر $t=0$. به علاوه a,b,c,e اعداد نامنفی باشند که $a+b+c+2e\le 1$ همچنین، فرض کنیم $x_0\in X$ وجود داشته باشد چنان که $x_0\preceq Tx_0$ اگر T پیوسته باشد، یا X منظم باشد آن‌گاه، T نقطه ثابت دارد.

برهان. اگر $Tx_0=x_0$ باشد، آن‌گاه x_0 همان نقطه ثابت T است و اثبات کامل است. فرض می‌کنیم $Tx_0\neq x_0$ چون $x_0\preceq Tx_0$ و T صعودی است،

$$x_0\preceq Tx_0\preceq T^2x_0\preceq\cdots\preceq T^nx_0\le\cdots. \tag{۳.۲}$$

برای هر $n\ge 0$ ، تعریف کنید $x_n=T^nx_0$ و $x_{n+1}=Tx_n$. اگر فرض کنیم $n_0\in\{1,2,\dots\}$ ی وجود داشته باشد به قسمی که $\Theta(x_{n_0},x_{n_0-1})=0$ آن‌گاه طبق تعریف Θ ، داریم $d(x_{n_0},x_{n_0-1})=0$ پس $x_{n_0-1}=x_{n_0}=Tx_{n_0-1}$. پس T دارای نقطه ثابت است و اثبات کامل است. لذا فرض می‌کنیم برای هر $n\in\mathbb{N}$ ،

$$\Theta(x_n,x_{n-1})>0. \tag{۴.۲}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_{n+1},x_n)=0$. از (۲.۲) ، برای هر $n\ge 1$ داریم

$$\begin{aligned}\Theta(x_n,x_{n-1})=&ad(x_n,x_{n-1})+bd(x_n,Tx_n)+cd(x_{n-1},Tx_{n-1})\\&+e[d(x_{n-1},Tx_n)+d(x_n,Tx_{n-1})]\\=&(a+c)d(x_n,x_{n-1})+bd(x_n,x_{n+1})+ed(x_{n-1},x_{n+1})\\\le&(a+c)d(x_n,x_{n-1})+bd(x_n,x_{n+1})+ed(x_{n-1},x_n)+ed(x_n,x_{n+1})\\\le&(a+c+e)d(x_n,x_{n-1})+(b+e)d(x_n,x_{n+1}).\end{aligned} \tag{۵.۲}$$

1. Harjani
2. Sadarangani

حال ادعا می‌کنیم

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}). \tag{۶.۲}$$

برای هر $n \geq 1$ فرض کنیم چنین نباشد، بنابر این n_0 ی وجود دارد که

$$d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) > d(x_{n_0}, x_{n_0-1}), \tag{۷.۲}$$

و چون $x_{n_0} \preceq x_{n_0+1}$ و با استفاده از (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned}
\varphi(d(x_{n_0+1}, x_{n_0})) =& \varphi(d(Tx_{n_0}, Tx_{n_0-1})) \\
\leq& \varphi(\Theta(x_{n_0}, x_{n_0-1})) - \phi(\Theta(x_{n_0}, x_{n_0-1})) \\
\leq& \varphi((a+c+e)d(x_{n_0}, x_{n_0-1}) + (b+e)d(x_{n_0}, x_{n_0+1})) \\
&- \phi(\Theta((x_{n_0}, x_{n_0-1})) \\
\leq& \varphi((a+b+c+2e)d(x_{n_0}, x_{n_0+1})) - \phi(\Theta(x_{n_0}, x_{n_0-1})) \\
\leq& \varphi(d(x_{n_0}, x_{n_0+1})) - \phi(\Theta(x_{n_0}, x_{n_0-1})).
\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

پس $\phi(\Theta(x_{n_0}, x_{n_0-1})) = 0$ و بنابراین خاصیت $(\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0)$ داریم $\Theta(x_{n_0}, x_{n_0-1}) = 0$ و متناقض با فرض (۴.۲) است، بنابراین (۶.۲) درست می‌باشد. لذا دنباله‌ی $\{d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\}$ نزولی و نامنفی است، در نتیجه یک $\rho \geq 0$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = \rho.$$

نشان می‌دهیم که $\rho = 0$ برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\rho > 0$ بنابراین با قرار دادن $x = x_n, y = x_{n-1}$ در (۲.۲) داریم

$$ad(x_n, x_{n-1}) \leq \Theta(x_n, x_{n-1}),$$

از طرفین نامساوی فوق، حد می‌گیریم و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} ad(x_n, x_{n-1}) \leq& \limsup_{n\to\infty} \Theta(x_n, x_{n-1}) \\
=& \limsup_{n\to\infty} [(a+c)d(x_n, x_{n-1}) + bd(x_n, x_{n+1}) + ed(x_{n+1}, x_{n-1})] \\
\leq& \limsup_{n\to\infty} [(a+c+e)d(x_n, x_{n-1}) + (b+e)d(x_n, x_{n+1})].
\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

بنابراین

$$0 < a\rho \leq \limsup \Theta(x_n, x_{n-1}) \leq (a+b+c+2e)\rho \leq \rho, \tag{۱۰.۲}$$

و یک $\rho_1 > 0$ وجود دارد که حد یک زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ که

$$\lim_{k\to\infty} \Theta(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) = \rho_1 \leq \rho,$$

و بنابر نیم پیوسته‌ی ϕ داریم

$$\phi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(x_n),$$

$$\phi(\rho_1) \leq \liminf_{k\to\infty} \phi(\Theta(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})), \tag{۱۱.۲}$$

از (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} \varphi(d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)})) =& \varphi(d(Tx_{n(k)}, Tx_{n(k)-1})) \\ &\leq \varphi(\Theta(x_{n(k)}, x_{n(k)-1})) - \phi(\Theta(x_{n(k)}, x_{n(k)-1})), \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

و بنابر پیوستگی φ داریم

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(\Theta(x_{n(k)+1}, x_{n(k)})) = \varphi(\rho_1),$$

از طرفین نامساوی (۱۲.۲) حد بالا می‌گیریم

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) \leq& \varphi(\rho_1) - \liminf_{k\to\infty} \phi(\Theta(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})) \\ \leq& \varphi(\rho_1) - \phi(\rho_1) \\ \leq& \varphi(\rho) - \phi(\rho_1). \end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

و این نتیجه می‌دهد که $\phi(\rho_1) = 0$ و طبق خاصیت ϕ داریم $\rho_1 = 0$ و این تناقض است، چون ما فرض کرده بودیم $\rho_1 > 0$ ، بنابراین داریم $\rho = 0$. حال، نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کشی است. فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ کشی نباشد، لذا یک $\epsilon > 0$ و زیر دنباله‌های $\{x_{n(k)}\}$ و $\{x_{m(k)}\}$ از $\{x_n\}$ با $n(k) > m(k) > k$ وجود دارند به طوری که

$$d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) > \epsilon, \tag{۱۴.۲}$$

علاوه بر این برای هر عدد طبیعی k می‌توانیم $m(k)$ و $n(k)$ را طوری انتخاب کنیم که کوچکترین اعداد صحیحی باشند که در رابطه‌ی (۱۴.۲) صدق می‌کند، پس

$$d(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}) < \epsilon. \tag{۱۵.۲}$$

با رابطه‌ی مثلثی داریم

$$\begin{aligned} \epsilon \leq& d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \\ \leq& d(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}). \end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

آن‌گاه، طبق (۱۴.۲) ، (۱۵.۲) داریم

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon. \tag{۱۷.۲}$$

و بنابر رابطه‌ی مثلثی داریم

$$\mid d(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}) - d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \mid < d(x_{m(k)-1}, x_{(m(k)}).$$

با استفاده از (۱۷.۲) داریم

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}) = \epsilon. \tag{۱۸.۲}$$

و طبق تعریف Θ در (۲.۲) ، داریم:

$$\begin{aligned} ad(x_{n(k)},x_{m(k)-1}) \leq&\Theta(x_{n(k)},x_{m(k)-1})\\ =&ad(x_{n(k)},x_{m(k)-1})+bd(x_{n(k)},Tx_{n(k)})+cd(x_{m(k)-1},Tx_{m(k)-1})\\ &+e(x_{m(k)-1},Tx_{n(k)})+d(x_{n(k)},Tx_{m(k)-1})\,]\\ =&ad(x_{n(k)},x_{m(k)-1})+bd(x_{n(k)},x_{n(k)+1})+cd(x_{m(k)-1},x_{m(k)})\\ &+e[d(x_{m(k)-1},x_{n(k)+1})+d(x_{n(k)},x_{m(k)})\\ \leq&ad(x_{n(k)},x_{m(k)-1})+bd(x_{n(k)},x_{n(k)+1})+cd(x_{m(k)-1},x_{m(k)})\\ &+e[d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})+d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})+d(x_{n(k)},x_{m(k)}), \end{aligned} \tag{۱۹.۲}$$

از طرفین نامساوی فوق حد بالا می‌گیریم، بنابر (۱۷.۲) و (۱۸.۲) داریم

$$0<a\epsilon\leq\limsup_{k\to\infty}\Theta(x_{n(k)},x_{m(k)-1})\leq(a+2e)\epsilon\leq\epsilon. \tag{۲۰.۲}$$

می‌دانیم، حد هر زیر دنباله از حد زبرین آن کمتر یا مساوی است. فرض می‌کنیم $\epsilon_1>0$ وجود داشته باشد، زیر دنباله‌ی $\{x_{k(p)}\}$ وجود دارد که

$$\lim_{p\to\infty}\Theta(x_{n(k(p))},x_{m(k(p))})=\epsilon_1\leq\epsilon, \tag{۲۱.۲}$$

و بنابر نیم‌پیوستگی پایینی ϕ داریم

$$\phi(\epsilon_1)\leq\liminf_{k\to\infty}\phi(\Theta(x_{n(k)},x_{m(k)-1})). \tag{۲۲.۲}$$

با توجه به پیوستگی φ از (۱.۲) ، داریم

$$\begin{aligned} \varphi(\epsilon)=&\limsup_{p\to\infty}\varphi(d(x_{n(k(p))},x_{m(k(p))}))\\ \leq&\limsup_{p\to\infty}\varphi(d(x_{n(k(p))},x_{m(k(p))-1})+d(x_{m(k(p))},x_{m(k(p))-1}))\\ \leq&\limsup_{p\to\infty}[\varphi(\Theta(x_{n(k(p))},x_{m(k(p))-1})-\phi(\Theta(x_{n(k(p))},x_{m(k(p))-1}))]\\ =&\varphi(\epsilon_1)-\liminf_{p\to\infty}\phi(\Theta(x_{n(k(p))},x_{m(k(p))-1}))\\ \leq&\varphi(\epsilon_1)-\phi(\epsilon_1)\\ \leq&\varphi(\epsilon)-\phi(\epsilon_1). \end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

و چون φ صعودی است و $\epsilon_1\leq\epsilon$ نامساوی اخیر را داریم که به تناقض می‌رسیم، در نتیجه $\{x_n\}$ کشی است. بنابر کامل بودن فضای X یک $z\in X$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to\infty}x_n=z.$$

اگر T پیوسته باشد، آن‌گاه $Tz=z$. اگر X منظم باشد، آن‌گاه $x_n\preceq z$ برای هر n ، بنابراین اگر در (۲.۲) قرار دهیم $y=x_n$ و $x=z$ ، آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned} \Theta(z,x_n)=&ad(z,x_n)+bd(z,Tz)+cd(x_n,Tx_n)+e[d(x_n,Tz)+d(z,Tx_n)]\\ =&ad(z,x_n)+bd(z,Tz)+cd(x_n,x_{n+1})+e[d(x_n,Tz)+d(z,x_{n+1})]. \end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

و با حد گرفتن از طرفین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \Theta(z, x_n) = (b+e)d(z, Tz),$$

با توجه به رابطه‌ی (۱.۲) و نتایج بدست آمده داریم

$$\begin{aligned} \varphi(d(Tz,z)) &= \limsup_{n\to\infty} \varphi(d(Tz, x_{n+1})) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \varphi(d(Tz, Tx_n)) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} [\varphi(\Theta(z, x_n)) - \phi(\Theta(z, x_n))] \\ &\leq \varphi((b+e)d(Tz,z)) - \phi((b+e)d(Tz,z)) \\ &\leq \varphi(d(Tz,z)) - \phi((b+e)d(Tz,z)). \end{aligned} \tag{۲۵.۲}$$

و بنابر ویژگی ϕ، داریم $Tz = z$. $\square$

نتیجه‌ی زیر از قضیه‌ی ۷.۱.۲ با قرار دادن $\varphi(t) = t$ بدست می‌آید.

نتیجه ۸.۱.۲. *فرض کنیم $(X, \preceq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. فرض کنیم یک متر d روی X وجود داشته باشد، به طوری که (X, d) یک فضای متری کامل و T نگاشت صعودی باشد به قسمی که برای هر $x \preceq y$*

$$d(Tx, Ty) \leq \Theta(x, y) - \phi(\Theta(x, y)),$$

که در آن

$$\Theta(x, y) = ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty) + e[d(y, Tx) + d(x, Ty)],$$

که $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ، تابع ϕ نیم پیوسته‌ی پایینی است به طوری که $\phi(t) = 0 \iff t = 0$. و a, b, c, e اعداد نامنفی هستند که $a + b + c + 2e \leq 1$ همچنین، فرض کنید یک $x_0 \in X$ که $x_0 \preceq Tx_0$. اگر T پیوسته باشد، یا X منظم باشد آن‌گاه، T نقطه ثابت دارد.

مثال ۹.۱.۲. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و X با رابطه زیر در نظر می‌گیریم،

$$x \preceq y \iff (x = y) \quad \text{یا} \quad (x, y \in [0, 1] \quad \text{با} \quad x \leq y).$$

رابطه‌ی $\preceq$ جزئاً مرتب و d متر اقلیدسی بر X است. نگاشت زیر را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید

$$Tx = \begin{cases} 2x - \frac{3}{2} & x > 1 \\ \frac{x}{4} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم شرایط قضیه ۷.۱.۲ با $\varphi(t) = t$ و $\phi(t) = \frac{t}{2}$ برقرار است. اگر $x, y \notin [0, 1]$ آن‌گاه $x \preceq y \iff x = y$.