دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

نگاشت های جداکننده درجبرهای باناخ

استاد راهنما

دکتر فرید بهروزی

دانشجو

معصومه شکوه نیا

شهریور ۱۳۸۹

چکیده

در این پژوهش ، ما به معرفی و بررسی خواص نگاشت های حافظ مجزایی روی جبرهای باناخ $C(X, E)$ می پردازیم . فرم کلی ، شرایط پیوستگی خودکار و شرایط حافظ مجزایی دو طرفه شدن این نگاشت ها در فصل های جداگانه ای مورد بررسی قرار گرفته اند .

کلید واژه : نگاشت حافظ مجزایی ، نگاشت حافظ مجزایی دو طرفه ، حافظ جداسازی ، پیوستگی خودکار، معکوس نگاشت حافظ مجزایی ، عملگر ترکیبی موزون ، فشرده سازی ، فشرده حقیقی .

فهرست مندرجات

مقدمه

بررسی خواص جبری یا هندسی فضاهای باناخ یا فضاهای توپولوژیک (جبری) ، یکی از مسائلی است که بسیار مورد توجه محققین بوده است . از جمله مسائل مورد توجه در این زمینه ، این است که خواص جبری و توپولوژیک یک فضای باناخ خاص چه تاثیری بر یکدیگر دارند . از دیگر مسائل مطرح شده ، بدست آوردن فرم کلی نگاشت هائی است که حافظ یک خاصیت جبری یا هندسی هستند . برای مثال پیدا کردن فرم کلی و خواص ایزومتری ها (حافظ فاصله) ، نگاشت های حافظ معکوس پذیری ، نگاشت های حافظ شعاع طیفی ، نگاشت های حافظ طیف و ... ، در طی سال های متمادی ، مورد بررسی قرار گرفته اند . هدف اصلی این پژوهش بررسی بین خواص توپولوژیک و خواص جبری روی جبر باناخ $C(X, E)$ ، شامل همه توابع پیوسته از فضای توپولوژیک X به فضای نرم دار E است . یک نگاشت حافظ مجزایی در واقع نگاشتی است که حافظ پوچ ساز است . ما در این پژوهش می خواهیم بررسی کنیم که نگاشتی که حافظ این خاصیت جبری است ، به چه فرمی است و چه خواص توپولوژیکی دارد .

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد و به ترتیب زیر تنظیم شده است:

در فصل اول تعاریف و قضایایی مقدماتی از فضاهای توپولوژیک و بحث فشرده سازی مطرح گردیده که در فصول آتی مورد استفاده قرار گرفته است. تعدادی از قضایا و لم‌های این فصل همراه با اثبات ـ بحث فشرده سازی ـ و تعدادی بدون اثبات گنجانده شده است . در گرداوری این فصل از منابع [۱۷] ، [۲۱] ، [۲۲] و [۲۳] استفاده شده است .

فصل دوم که بر گرفته از مقالات [۱۶] و [۴] است ، با معرفی نگاشت های حافظ مجزایی، نگاشت های حافظ مجزایی دو طرفه و عملگر های ترکیبی موزون آغاز شده است .

سپس در بخش بعدی ، فرم کلی نگاشت های حافظ مجزایی دو طرفه روی $C(X,E)$ مورد بررسی قرار گرفته اند و نشان داده شده که هر نگاشت خطی حافظ مجزایی دو طرفه یک عملگر ترکیبی موزون است و بر عکس هر عملگر ترکیبی موزون ، یک نگاشت حافظ مجزایی است . لازم به ذکر است که در بخش دوم این فصل فرض ما بر این است که X و Y دو فضای هاسدورف فشرده و E و F دو فضای باناخ هستند . چند لم و قضیه نیز در این باره بیان و اثبات گردیده است . در ادامه فرم کلی نگاشت های حافظ مجزایی دو طرفه تحت شرایطی دیگرمورد بررسی قرار گرفته و فرض بر این است که X و Y دو فضای توپولوژیک کاملاً منظم وفشرده ی حقیقی و E و F فضاهایی نرم دار باشند .

فصل سوم برگرفته از مقالات [۴] و [۱۱] است . هدف اصلی این فصل بررسی شرایطی است که تحت آنها یک نگاشت حافظ مجزایی دو طرفه ، به طور خودکار پیوسته شود. در بخش اول فرض این است که E با بعد متناهی است و در بخش دوم فرض خواهیم کرد که E با بعد نامتناهی باشد. هم چنین X و Y را دو فضای توپولوژیک کاملاً منظم وفشرده ی حقیقی در نظر می گیریم .

فصل چهارم برگرفته از مقالات [۱۶] و [۷] است . هدف ما در این فصل بررسی شرایطی است که تحت آنها معکوس یک نگاشت دوسوئی حافظ مجزایی ، لزوماً حافظ مجزایی می شود. این فصل مشتمل بر دو بخش است. ابتدا با یک مثال نشان می دهیم که در حالت کلی معکوس یک نگاشت حافظ مجزایی ، لزوماً حافظ مجزایی نیست.در بخش اول رابطه ی بین حافظ مجزایی و حافظ محمل بودن را بررسی می کنیم. در بخش دوم پس از بیان و اثبات چندین لم مقدماتی ، دو مشخصه سازی درباره ی حافظ مجزایی دو طرفه بودن را ارائه می دهیم. در این بخش نشان خواهیم داد برای یک نگاشت خطی دوسوئی حافظ مجزایی $T : C(X) \to C(Y)$ ، اگر Y همبند یا X از بعد صفر و یا Y شبه فشرده باشد آنگاه T حافظ مجزایی دو طرفه است. کلیه‌ی دستاوردهای ناشی از این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهراء (س) است .

معصومه شکوه نیا
دانشگاه الزهراء (س)

فصل ۱

پیش نیاز

در سرتاسر این پایان نامه از تعاریف و مفاهیم مهم توپولوژیکی استفاده شده که در کتاب های رایج توپولوژی عمومی کمتر به چشم می خورد . تعاریف و قضایای زیر بر گرفته از مراجع [۱۷] و [۲۱] می باشد .

۱.۱ فضاهای موضعاً فشرده

تعریف ۱.۱.۱ فضای توپولوژیک X را موضعاً فشرده می نامند هرگاه برای هر $x \in X$ یک همسایگی از x مانند V موجود باشد که $\overline{V}$ فشرده باشد .

مثال ۱

(1) هر فضای فشرده ، به وضوح موضعاً فشرده است .

(2) خط حقیقی $\mathbb{R}$ موضعاً فشرده است . نقطه ی $x \in \mathbb{R}$ متعلق به بازه ای چون $V = (a, b)$ است که $\overline{V} = [a, b]$ فشرده است .

(3) فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مثال هایی از فضاهایی هستند که موضعاً فشرده اند ولی فشرده نیستند .

(4) فضای $\mathbb{Q}$ به عنوان زیر فضای $\mathbb{R}$ موضعاً فشرده نیست . همسایگی های $\mathbb{Q}$ به صورت $V = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ هستند که $\overline{V}^{\mathbb{Q}} = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. به وضوح $\overline{V}^{\mathbb{Q}}$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست پس فشرده نیست .

قضیه ۲.۱.۱ هر زیر مجموعه ی بسته از یک فضای موضعاً فشرده ، خود موضعاً فشرده است .

قضیه ۳.۱.۱ حاصل ضرب هر گردایه از فضاهای موضعاً فشرده ، موضعاً فشرده است .

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد ، و Y را زیر فضایی از X در نظر می گیریم . اگر Y در X بسته یا باز باشد آنگاه Y موضعاً فشرده است .

۲.۱ فضاهای کاملاً منظم

تعریف ۱.۲.۱ فضای X را کاملاً منظم نامیم در صورتی که مجموعه های تک عضوی در X بسته باشند و به ازای هر نقطه ای مانند $x_\circ$ و هر مجموعه ی بسته ای مانند A که شامل $x_\circ$ نباشد ، تابعی پیوسته مانند $f : X \to [0, 1]$ موجود باشد به طوری که $f(x_\circ) = 1$ و $f(A) = \{0\}$.

قضیه ۲.۲.۱ هر زیر فضای یک فضای کاملاً منظم ، فضایی کاملاً منظم است .

قضیه ۳.۲.۱ هر حاصل ضرب از فضاهای کاملاً منظم ، فضایی کاملاً منظم است .

قضیه۱.۲.۴ [۲۱] در فضایی مانند X احکام زیر معادل اند:

(a) فضای X کاملاً منظم است .

(b) فضای X با زیر فضایی از یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده همئومورف است .

قضیه۱.۲.۵ هر فضای هاسدورف موضعاً فشرده ، فضایی کاملاً منظم است .

قضیه۱.۲.۶ هر زیر فضای یک فضای هاسدورف فشرده ، کاملاً منظم است .

قضیه۱.۲.۷ [۲۱] اگر X کاملاً منظم باشد آنگاه X را می توان به ازای Jای در $[0,1]^J$ نشاند .

۱.۳ فشرده سازی

فشرده سازی عبارت است از راهکاری که به کمک آن می توان به توسیعی فشرده از یک فضای توپولوژیک دست یافت.

تعریف۱.۳.۱ [۲۱] فرض می کنیم فضای توپولوژیک غیر فشرده ی X مفروض باشد. در این صورت عنصری خارج از مجموعه ی X را انتخاب و به آن می افزائیم . این عنصر را معمولاً با نماد ∞ نشان می دهند. قرار می دهیم $Y = X \cup \{\infty\}$. حال با تعریف گردایه ای از انواع مجموعه های ذیل ، به عنوان مجموعه های باز در Y ، در آن توپولوژی ای می سازیم :

(1) مجموعه ی U ، که در آن U یکی از زیرمجموعه های باز X است ،

(2) مجموعه ی $Y - C$ ، که در آن C یکی از زیر مجموعه های بسته و فشرده ی X است .

فضای Y را فشرده شده ی تک نقطه ای X گوئیم.

لم ۲.۳.۱ [۲۱] گردایه ی تعریف شده در تعریف ۱.۳.۱ یک توپولوژی روی Y است .

اثبات: مجموعه ی تهی ، مجموعه ای از نوع ۱ است ، و فضای Y مجموعه ای از نوع ۲ است . بررسی اینکه اشتراک دو مجموعه ی باز ، مجموعه ای باز است متضمن سه حالت زیر است :

(a) $U_1 \cap U_2$ از نوع ۱ است .

(b) $(Y - C_1) \cap (Y - C_2) = Y - (C_{12})$ از نوع ۲ است .

(c) $U_1 \cap (Y - C_1) = U_1 \cap (X - C_1)$ چون C_1 در X بسته است پس این مجموعه از نوع ۱ است .

اجتماع هر گردایه از مجموعه های باز ، باز است :

(a) $\bigcup U_\alpha = U$ از نوع ۱ است .

(b) $\bigcup (Y - C_\beta) = Y - (\bigcap C_\beta) = Y - C$ از نوع ۲ است .

(c) از آنجا که $C - U$ یک زیر مجموعه ی بسته ی C است ، در نتیجه فشرده است ; پس ، مجموعه ی

$$(\bigcup U_\alpha) \cup (\bigcup (Y - C_\beta)) = U \cup (Y - C) = Y - (C - U)$$

از نوع ۲ است . ■

قضیه ۳.۳.۱ [۲۱] فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک غیر فشرده و Y فشرده شده ی تک نقطه ای X باشد . فضای توپولوژیک Y فشرده است .

اثبات: فرض می کنیم گردایه ی $\{G_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز برای مجموعه ی Y باشد . در این صورت $i_\circ \in I$ موجود است که $\infty \in G_{i_\circ}$. با توجه به ساختار توپولوژی Y نتیجه می شود که مجموعه ی بسته و فشرده ی $C_\circ$ در X موجود است که $G_{i_\circ} = Y - C_\circ$. لذا $C_\circ = Y - G_{i_\circ}$. پس $C_\circ \subseteq Y$ و در نتیجه $C_\circ \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. اکنون با توجه به اینکه $C_\circ$ در فضای X فشرده است لذا هر پوشش باز آن دارای یک زیر پوشش باز متناهی است . بنابراین $n \in \mathbb{N}$ هست که $C_\circ \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$. از رابطه ی اخیر می توان نتیجه گرفت

$$C_\circ = Y - G_{i_\circ} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$$

پس

$$Y \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} G_{i_j}$$

لذا فضای Y فشرده است . ■

قضیه ۴.۳.۱ [۲۱] فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک غیر فشرده و Y فشرده شده ی تک نقطه ای X باشد . در این صورت X زیر فضایی از Y است و $\overline{X}=Y$.

اثبات: اشتراک هر مجموعه ی باز Y با مجموعه ی X ، مجموعه ای باز در X است . زیرا ، $U\cap X=U$ و $(Y-C)\cap X=X-C$ که هر دو در X بازند . برعکس ، هر مجموعه ی باز X ، مجموعه ای از نوع (1) است و بنابراین در Y باز است . چون X فشرده نیست ، هر مجموعه ی باز به صورت $Y-C$ که شامل نقطه ی ∞ باشد ، X را قطع می کند . بنابراین ، ∞ یک نقطه ی حدی X است . لذا $\overline{X}=Y$. ■

قضیه ۵.۳.۱ [۲۱] فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد که فشرده نیست و Y فشرده شده ی تک نقطه ای X باشد . در این صورت Y فضایی هاسدورف است .

فرض می کنیم x و y دو نقطه ی متمایز Y باشند . اگر هردوی آنها در X واقع باشند ، مجموعه های باز جدا از همی از X مانند U و V وجود دارند که، به ترتیب ، شامل x و y اند . از طرف دیگر ، اگر $x\in X$ و $y=\infty$ ، می توان مجموعه ی فشر ده ای مانند C در X انتخاب کرد که حاوی یک همسایگی x مانند U باشد . در این صورت ، U و $Y-C$ ، به ترتیب ، همسایگی های جدا از همی از x و y در Yاند. ■

مثال ۲ فشرده شده ی تک نقطه ای خط حقیقی $\mathbb{R}$ با دایره هومئومورف است . به همین ترتیب ، فشرده شده ی تک نقطه ای $\mathbb{R}^2$ با کره ی S^2 هومئومورف است . اگر $\mathbb{R}^2$ به عنوان فضای $\mathbb{C}$ از اعداد مختلط در نظر گرفته شود آنگاه $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ را کره ریمانی یا صفحه مختلط گسترده می خوانند .

نتیجه ۶.۳.۱ فضای X با یک زیر مجموعه ی باز یک فضای هاسدورف فشرده هومئومورف است اگر و فقط اگر X هاسدورف و موضعاً فشرده باشد.

اثبات: این حکم از قضیه ۴.۱.۱ و قضایای ۳.۳.۱ و ۵.۳.۱ نتیجه می شود . ■

نتیجه۷.۳.۱ فرض کنیم فضای X با یک زیر مجموعه ی باز یک فضای هاسدورف فشرده هومئومورف است . در این صورت X فضایی کاملاً منظم است .

اثبات: این حکم از قضیه ۵.۲.۱ و نتیجه ٦.۳.۱ به دست می آید. ■

۴.۱ فشرده سازی استون ـ چخ

فشرده ساز تک نقطه ای به تعبیری فشرده شده ی مینیمال X و فشرده شده ی استون ـ چخ به تعبیری فشرده شده ی ماکزیمال X است .

تعریف۱.۴.۱ [۲۱] فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد . فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده ای مانند Y که شامل X بوده و $\overline{X} = Y$ ، را فشرده شده ی X گوئیم .

تعریف۲.۴.۱ [۲۱] دو فشرده شده ی X مانند Y_1 و Y_2 را هم ارز می خوانیم در صورتی که هومئومورفیسمی مانند $h : Y_1 \to Y_2$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x از X ، $h(x) = x$.

مثال۳

(1) اگر X فضایی فشرده باشد ، تنها فشرده شده ی X ، خود X است .

(2) اگر T فضای فشرده ای شامل X باشد ، آنگاه $\overline{X}^T$ یک فشرده شده برای X است .

قضیه۳.۴.۱ [۲۱ ، ۱۷] فضای X دارای فشرده شده ای مانند Y است ، اگر و فقط اگر کاملاً منظم باشد .

اثبات: فرض کنیم X دارای یک فشرده شده مانند Y باشد . در این صورت X درون فضای هاسدورف فشرده ی Y قرار گرفته است . هر فضای فشرده ، موضعاً فشرده است و هر فضای هاسدورف موضعاً فشرده ، کاملاً منظم است . پس Y کاملاً منظم است . از آنجا که هر زیر فضای فضاهای کاملاً منظم ، کاملاً منظم است لذا X کاملاً منظم است . برعکس فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم باشد . به طریق زیر یک فشرده شده برای X بدست می آوریم: نشاننده ای مانند $h : X \to Z$ از X به فضای هاسدورف فشرده ی Z انتخاب می کنیم . فرض کنیم $X_\circ$ نمایش زیر فضای $h(X)$ از Z و $Y_\circ$ نمایش بستار آن در Z باشد . در این صورت $Y_\circ$ یک فضای هاسدورف فشرده است و $\overline{X_\circ} = Y_\circ$. پس $Y_\circ$ یک فشرده شده ی $X_\circ$ است . اکنون ، فضایی حاوی X ، مانند Y ، را طوری می سازیم که زوج (X,Y) با زوج $(X_\circ,Y_\circ)$ هومئومورف باشد . نخست ، مجموعه ای جدا از X ، مانند A ، اختیار می کنیم که تحت نگاشتی مانند $k : A \to Y_\circ - X_\circ$ با مجموعه ی $Y_\circ - X_\circ$ در تناظر دو سوئی باشد . قرار می دهیم $Y = X \cup A$ ، و تناظری دو سوئی مانند $H : Y \to Y_\circ$ را به این صورت تعریف می کنیم که به ازای $x \in X$، $H(x) = h(x)$ و به ازای $a \in A$ ، $H(a) = k(a)$. سپس Y را فضایی توپولوژیک در نظر می گیریم ، به این گونه که مجموعه ی U را در Y باز می نامیم اگر و فقط اگر $H(U)$ در $Y_\circ$ باز باشد . نگاشت H خود به خود همئومورفیسم می شود و فضای X زیر فضایی از Y است ، زیرا تحدید H به زیر مجموعه ی X از Y همان همئومورفیسم h است. فضای Y را فشرده شده ی X القا شده به وسیله ی نشاننده ی h می خوانیم . ■

آن چه در بالا گفتیم به صورت ذیل خلاصه می کنیم :

نتیجه ۱.۴.۴ [۲۱] اگر $h : X \to Z$ نشاننده ای از X به فضای هاسدورف فشرده ی Z باشد آنگاه h فشرده شده ای از X مانند Y را القا می کند و آن دارای این خاصیت است که نشاننده ی h را می توان به نشاننده ای مانند $H : Y \to Z$ گسترش داد .

مثال ۴ به طور کلی ، راههای بسیار گوناگونی برای فشرده سازی فضای X وجود دارد. مثلاً، به فشرده سازی های ذیل از بازه ی باز $X = (0,1)$ توجه کنید :

(1) دایره ی واحد S^1 در $\mathbb{R}^2$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم $h : (0,1) \to S^1$ نگاشت

$$h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

باشد . فشرده شده ی القا شده به وسیله ی نشاننده ی h با فشرده شده ی تک نقطه ای X هم ارز است .

(2) فرض کنیم Y فضای $[0,1]$ باشد . در این صورت ، Y یک فشرده شده ی X است ، که با افزودن یک نقطه در هر یک از دو انتهای $(0,1)$ به دست می آید .

مسئله ی اساسی ای که در مطالعه ی فشرده شده ها پیش می آید به قرار ذیل است : اگر Y یکی از فشرده شده های X باشد ، تحت چه شرایطی می توان تابع حقیقی پیوسته ای مانند f را که بر X تعریف شده است به طور پیوسته به Y گسترش داد ؟ اگر تابع f گسترش پذیر باشد ، باید کراندار باشد ، زیرا گسترش آن باید فضای فشرده ی Y را به $\mathbb{R}$ ببرد که در نتیجه کراندار خواهد بود . اما ، در حالت کلی ، کراندار بودن کافی نیست . مثال ذیل را ملاحظه کنید:

مثال۵ فرض کنیم $X=(0,1)$. فشرده شده ی تک نقطه ای X را که در مثال ۴ قسمت ۱ آوردیم در نظر می گیریم . تابعی پیوسته مانند $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ بر این فشرده شده گسترش پذیر است اگر و فقط اگر حدهای

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

موجود و مساوی باشند . در مورد فشرده شده ی دو نقطه ای که در مثال ۴ قسمت ۲ ملاحظه شد ، تابع f گسترش پذیر است اگر و فقط اگر این دو حد موجود باشند .

تعریف۱.۴.۵ [۲۱] فرض کنیم X یک فضای کاملاً منظم و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ گردایه ی همه ی توابع حقیقی کراندار بر X باشد که به وسیله ی مجموعه ی اندیس گذار J ، اندیس گذاری شده است . به ازای هر α از J ، بازه ی بسته ای مانند I_α در R انتخاب می کنیم که حاوی $f_\alpha(X)$ باشد . برای آنکه این انتخاب بدون ابهام باشد ، فرض می کنیم

$$I_\alpha=[glb f_\alpha(X), lub f_\alpha(X)]$$

که glb ، نماد بزرگترین کران پائین و lub ، نماد کوچکترین کران بالای یک مجموعه است . حال ، نگاشت $h:X\to\Pi_{\alpha\in J}I_\alpha$ را با ضابطه ی

$$h(x)=(f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$$

تعریف می کنیم . بنا بر قضیه ی تیخونوف ، $\Pi_{\alpha\in J}I_\alpha$ فشرده است . از آنجا که X کاملاً منظم است ، گردایه ی $\{f_\alpha\}$ در X ، نقاط را از مجموعه های بسته جدا می سازد . پس ، بنا بر قضیه ی نشاندن ۱.۷.۱۷ ، h یک نشاننده است . فشرده شده ای از X را که به وسیله ی h القا می شود فشرده شده ی استون ـ چخ X می نامیم ، و معمولاً آن را با βX نمایش می دهیم .

قضیه ۱.۴.۶ [۲۱] فرض کنیم X کاملاً منظم و βX فشرده شده ی استون ـ چخ آن باشد . در این صورت ، هر تابع حقیقی پیوسته ی کراندار بر X را می توان به طور یکتا به تابع حقیقی پیوسته ای بر βX گسترش داد .

اثبات: فشرده شده ی βX به وسیله ی نشاننده ی $h : X \to \Pi I_\alpha$ ، که در تعریف ۱.۴.۵ معرفی شد ، القا می شود . این به معنی این است که نشاننده ای مانند $H : \beta(X) \to \Pi I_\alpha$ وجود دارد ، به طوری که تحدید آن بر زیر فضای X از βX مساوی h است . به ازای هر تابع حقیقی پیوسته ی کراندار بر X ، βای در J هست به طوری که f_β با آن مساوی است . حال اگر $\pi_\beta : \Pi I_\alpha \to I_\beta$ نگاشت تصویری بروی مختص βام باشد آنگاه نگاشت مرکب $\pi_\beta o H : \beta(X) \to I_\beta$ گسترش مطلوب f_β است . زیرا ، اگر $x \in X$ ، داریم

$$\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha\in J}) = f_\beta(x).$$

یکتایی گسترش نتیجه ای از لم زیر است . ■

لم ۱.۴.۷ [۲۱] فرض کنیم $A \subset X$ ، و $f : A \to Z$ نگاشتی پیوسته از A بتوی فضای هاسدورف Z باشد . در این صورت ، f حداکثر دارای یک گسترش به تابعی پیوسته مانند $g : \overline{A} \to Z$ است .

اثبات: فرض کنیم g و g' از $\overline{A}$ بتوی Z دو گسترش متفاوت f باشند . x را چنان انتخاب می کنیم که $g(x) \neq g'(x)$. فرض کنیم U و U' ، به ترتیب ، همسایگی های جدا از همی برای $g(x)$ و $g'(x)$ باشند . همسایگی V از x را چنان انتخاب می کنیم که $g(V) \subset U$ و $g'(V) \subset U'$. حال V مجموعه ی A را در نقطه ای مانند y قطع می کند ، در نتیجه ،

$g(y) \in U$ و $g^{'}(y) \in U^{'}$. اما چون $y \in A$ ، داریم

$$g^{'}(y) = f(y) \quad , \quad g(y) = f(y).$$

و این با فرض ، که U و $U^{'}$ جدا از هم اند متناقض است . ■

اینک قضیه ای ثابت می کنیم بدین مضمون که فشرده شده ی استون ـ چخ اساساً یکتاست ، و به وسیله ی خاصیت گسترشی خود مشخص می شود .

قضیه ۸.۴.۱ [۲۱] فرض کنیم X کاملاً منظم باشد . Y_1 و Y_2 را دو فشرده شده ی X می گیریم که دارای خاصیت گسترشی مذکور در قضیه ی ۶.۴.۱ باشند . در این صورت هومئومورفیسمی مانند ϕ از Y_1 بروی Y_2 وجود دارد به طوری که به ازای هر x از X ، $\phi(x) = x$.

اثبات: مرحله ی ۱.نخست ، حکم ذیل را ثابت می کنیم : فرض کنیم Y فشرده شده ای از X و دارای خاصیت گسترشی مذکور در قضیه ی ۶.۴.۱ باشد . اگر Z یک فضای هاسدورف فشرده ی دلخواه باشد و $g : X \to Z$ تابع پیوسته ی دلخواهی باشد آنگاه g را می توان به تابع پیوسته ای مانند k که Y را بتوی Z می نگارد گسترش داد . برای اثبات این حکم ، ملاحظه کنید که Z کاملاً منظم است ، در نتیجه ، به ازای Jای ، آن را می توان در $[0,1]^J$ نشاند . بنابراین ، می توان فرض کرد که $Z \subset [0,1]^J$. اکنون ، نگاشت

$$g : X \to Z \subset [0,1]^J \subset \mathbb{R}^J$$

را در نظر می گیریم . هر تابع مولفه ای نگاشت g ، مانند g_α ، تابعی است حقیقی و کراندار و پیوسته بر X ; بنا بر فرض ، g_α را می توان به نگاشت پیوسته ای مانند k_α از Y بتوی $\mathbb{R}$ گسترش داد . نگاشت $k : Y \to \mathbb{R}^J$ را با ضابطه ی $k(y) = (k_\alpha(y))_{\alpha \in J}$ تعریف می کنیم . k پیوسته است ، زیرا $\mathbb{R}^J$ دارای توپولوژی حاصل ضربی است . مدعی هستیم که k در واقع Y را بتوی زیرفضای Z می نگارد . زیرا $g(X)$ زیر مجموعه ی Z است ، و $k(X) = g(X)$. چون Z در $\mathbb{R}^J$ بسته است ، لذا نتیجه می شود که $\overline{k(X)} \subset Z$. بنا بر پیوستگی k

$$k(Y) = k(\overline{X}) \subset \overline{k(X)}.$$

پس ، k نگاشتی است که Y را بتوی Z می نگارد .

مرحله ی ۲. اینک به اثبات قضیه می پردازیم . نگاشت احتوا ی $j_2 : X \to Y_2$ را در نظر می گیریم ، که نگاشتی است پیوسته از X بتوی فضای هاسدورف فشرده ی Y_2 . چون Y_1 دارای خاصیت گسترشی است ، بنا بر مرحله ی ۱ ، می توان j_2 را به نگاشتی پیوسته مانند $f_2 : Y_1 \to Y_2$ گسترش داد . هم چنین ، می توان نگاشت احتوای $j_1 : X \to Y_1$ را به نگاشتی پیوسته مانند $f_1 : Y_2 \to Y_1$ گسترش داد زیرا Y_2 دارای خاصیت گسترشی و Y_1 هاسدورف فشرده است .

تابع مرکب $f_1 o f_2 : Y_2 \to Y_2$ واجد این خاصیت است که به ازای هر x از X ، داریم $f_1(f_2(x)) = x$. بنابراین ، $f_1 o f_2$ گسترشی پیوسته است از نگاشت همانی $i_X : X \to X$. اما نگاشت همانی Y_1 نیز گسترشی پیوسته از i_X است . بنا بر یکتایی گسترش (لم ۷.۴.۱) ، $f_1 o f_2$ باید مساوی نگاشت همانی Y_1 باشد . هم چنین ، $f_2 o f_1$ باید برابر نگاشت همانی Y_2 باشد . بنا براین ، f_1 و f_2 هومئومورفیسم هستند . ■

قضیه ۹.۴.۱ [۱۷] فضای X ، همبند است اگر و فقط اگر فشرده شده ی آن ، βX ، همبند باشد.

۵.۱ فشرده ی حقیقی

تعریف ۱.۵.۱ [۱۷] فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم و $\mathbb{R}^*$ ، فشرده شده ی تک نقطه ای $\mathbb{R}$ باشد . هر تابع $f \in C(X)$ را می توان به صورت یک نگاشت پیوسته از X بتوی $\mathbb{R}^*$ در نظر گرفت . در این صورت توسیع f از X به βX ، را $\beta f : \beta X \to \mathbb{R}^*$ در نظر می گیریم . مجموعه ی تمام نقاطی از βX مانند p که برای هر $f \in C(X)$ ، $\beta f(p) \neq \infty$ ، را فشرده شده حقیقی X نامیم و با νX نمایش می دهیم .

نکته ۱.۱ به وضوح $X \subseteq \nu X \subseteq \beta X$.

تعریف۱.۵.۲ [۱۷] فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم ، و νX فشرده شده ی حقیقی X باشد . اگر $\nu X = X$ ، فضای X را فشرده حقیقی گویند .

تعریف۱.۵.۳ [۱۷] فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم ، βX فشرده شده ی استون ـ چخ آن و νX فشرده شده ی حقیقی X باشد . اگر $\nu X = \beta X$ ، فضای X را شبه فشرده گویند .

مثال٦ تمام مجموعه های فشرده ، فشرده ی حقیقی اند . زیرا در این صورت ، $\beta X = X$ و برای هر $f \in C(X)$ ، $\beta f = f$. فشرده بودن X نتیجه می دهد که f کراندار است .

قضیه۱.۵.۴ [۱۷] هر زیر فضای بسته از فضاهای فشرده ی حقیقی ، فشرده ی حقیقی است .

قضیه۱.۵.۵ [۱۷] هر حاصل ضرب فضاهای فشرده‌ی حقیقی ، فشرده ی حقیقی است .

قضیه۱.۵.٦ [۱۷] اگر X با Y همئومورفیسم باشد ، آنگاه νX با νY همئومورفیسم است.

نتیجه۱.۵.۷ فضای X شبه فشرده است اگر و فقط اگر νX فشرده باشد .

قضیه۱.۵.۸ [۱۷] یک فضا همبند است اگر و فقط اگر فشرده شده حقیقی آن همبند باشد.

۶.۱ شبکه برداری

تعریف ۱.۶.۱ گیریم L یک خانواده از تابع های حقیقی است که روی یک مجموعه‌ی X تعریف شده اند. L یک شبکه برداری است هرگاه به ازای هر $f, g \in L$ ، توابع $\alpha f + \beta g$ ، $f \vee g$ و $f \wedge g$ ، به L تعلق داشته باشند که

$$f \vee g = \max(f, g)$$

و

$$f \wedge g = \min(f, g).$$

گزاره ۲.۶.۱ با توجه به برابری های

$$f \wedge g = f + g - (f \vee g)$$

و

$$f \vee g = (f - g) \vee 0 + g$$

دیده می شود که فضای برداری L از توابع ، هنگامی یک شبکه برداری است که برای هر h متعلق به L تابع $h \vee 0$ به L متعلق باشد. بنابراین فضای برداری از تابع ها، اگر نسبت به عمل

$$f \to f^{+} = f \vee 0$$

بسته باشد ، یک شبکه برداری است .

گزاره۱.٦.۳ چون $|f| = f^+ + (-f)^+$ پس هر شبکه برداری قدر مطلق هر تابع متعلق به خود را در بر دارد. برعکس اگر L یک فضای برداری باشد به گونه ای که برای هر f متعلق به L ، تابع $|f|$ نیز به L متعلق باشد آنگاه L یک شبکه برداری است زیرا

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|).$$

۷.۱ چند تعریف و قضیه ی مهم

تعریف۱.۷.۱ [۲۱] هر فضای کاملاً منظم مانند X که در اصل T_1 صدق کند ، یعنی به ازای هر دو نقطه متمایز a و b از X ، هر کدام یک همسایگی دارد که شامل دیگری نیست ، را فضای تیخنوف گویند .

تعریف۲.۷.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و E یک فضای نرم دار باشد. مجموعه ی همه‌ی توابع پیوسته از X به E را با $C(X, E)$ نشان می دهیم.

تعریف۳.۷.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و E یک فضای نرم دار باشد. مجموعه ی تمام توابع پیوسته ی کراندار از X به توی E را با$C_b(X, E)$ نشان می دهیم .

تعریف۴.۷.۱ فرض کنید E و F فضاهایی نرم دار و $x \in E$. نیم نرم P_x را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$P_x(T) = \|Tx\| \quad (T \in B(E, F))$$

به توپولوژی تولید شده توسط این نیم نرم هاروی $B(E, F)$ ، توپولوژی عملگر قوی گویند .