بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه رازی
دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش نظری

# عنوان پایان نامه

# پخش غیر عادی

استاد راهنما:

دکتر کیومرث منصوری

نگارش:

فرانک قصیری دربنده

شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه رازی

دانشکده علوم

گروه فیزیک

**پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش نظری**

**نام دانشجو :**

**فرانک قصیری دربنده**

## تحت عنوان

# پخش غیر عادی

در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱- استاد راهنما | دکتر کیومرث منصوری | با مرتبه ی علمی | استادیار | | امضاء |
| ۲ - استاد داور داخل گروه | دکتر اردشیر رابعی | با مرتبه ی علمی | استادیار | | امضاء |
| ۳- استاد داور خارج از گروه | دکتر شهریار سلیمی | با مرتبه ی علمی | استادیار | | امضاء |

# تقدیر وتشکر


**خداوند بزرگ را شکر گذارم که بدون الطاف و عنایات او به پایان رساندن این مرحله برایم غیر ممکن بود.**

**از استاد گرامی جناب آقای دکتر منصوری تشکر می کنم.**

**از پدرو مادر عزیزم که تمام زندگی خود را وقف موفقیت فرزندانشان کردند و بدون تلاشها ودلگرمی ها و صبوری های آنها امکان رسیدن به این مرحله از زندگی برایم امکانپذیر نبود کمال تشکر و قدر دانی را دارم.**

**از برادر و خواهرانم که با همدلی وهم فکری و پشتیبانی خود زمینه تکمیل این پایان نامه را فراهم کردند سپا سگذارم.**

**و همچنین از تمام دوستانی که با راهنمایی های خود مرا یاری نمودند صمیمانه تشکر می کنم.**

## تقدیم به

## پدر ومادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجود شان که در این سرد ترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سر گردانی و ترس در پناهشان به محبت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

# چکیده

هدف این پایان نامه آشنایی با مفاهیم اصلی پخش عادی و غیر عادی است. از حالت های ساده شروع کرده و به خوبی آنها را بررسی می کنیم و ابزارهای ریاضی شناخته شده و روابط بین آنها را مشخص می کنیم.

نشان می دهیم که چگونه حرکت براو نی در ارتباط با یک مدل حرکت تصادفی درک می شود . در واقع حرکت براو نی یک نمونه اولیه از پخش عادی است و تحلیل و بررسی آن ابزاری را ایجاد می کند که امروزه برای مدل سازی بسیاری از پدیده ها مورد استفاده قرار می گیرد.

همچنین مدل های مختلفی را برای پخش عادی بیان می کنیم. در سال های اخیر پخش غیر عادی بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. وسیله مناسب برای مدل سازی این پدیده حرکت تصادفی زمان پیوسته ، معادلات دیفرانسیلی تصادفی و معادلات پخش کسری است که در حال حاضر موضوعات پر کاربردی برای تحقیق می باشند. در ادامه به پخش غیر عادی می پردازیم و با معرفی حرکت تصادفی زمان پیوسته (CTRW) به صورت یک مدل پخش غیر عادی ادامه می دهیم. حرکت تصادفی زمان پیوسته(CTRW) به طور موفقیت آمیزی برای مدل سازی پدیده های مختلف پخش غیر عادی , شامل ابر پخش وزیر پخش ,در حوزه های فیزیک ، شیمی ،نجوم و .......... به کار رفته است. بر روی ارتباط(CTRW) و معادلات پخش کسری بحث می کنیم . فرمول بندی فضا- زمانی کسری پخش غیر عادی در یک فضای دو بعدی را معرفی می کنیم. این پایان نامه با بیان چندین کاربرد پخش غیر عادی پایان می یابد.

## فهرست مطالب

**عنوان**

**صفحه**

# فصل اول

## حرکت تصادفی

# فصل اول

# حرکت تصادفی

## ۱-۱ مقدمه

حرکت تصادفی ممکن است حرکت براو نی یک ذره غوطه ور در یک سیال،انتشار گرما،پراکندگی یک قطره رنگ در یک لیوان آب ساکن و انواع دیگر انتقال های زیستی باشد.

لاکریتیوس [۱] رومی با مطالعه اجسام طبیعی جزییات شگفت انگیزی از حرکت ذرات در هوا را مشاهده کرد. حرکت نا منظم ذرات زغال در سطح الکل در سال ۱۷۸۵ توضیح داده شد.اما حرکت براو نی با کشف گیاه شناس رابرت براون [۲] در۱۸۲۷ ایجاد شد . براون مشاهده کرد که ذرات گرده حرکتهای عجیبی را در مایعات نشان می دهند و تکرار آزمایش با ذرات گردو خاک نشان داد که حرکت عجیب ذرات گرده از حرکت نامنظم ذرات مایع ایجاد می شود .

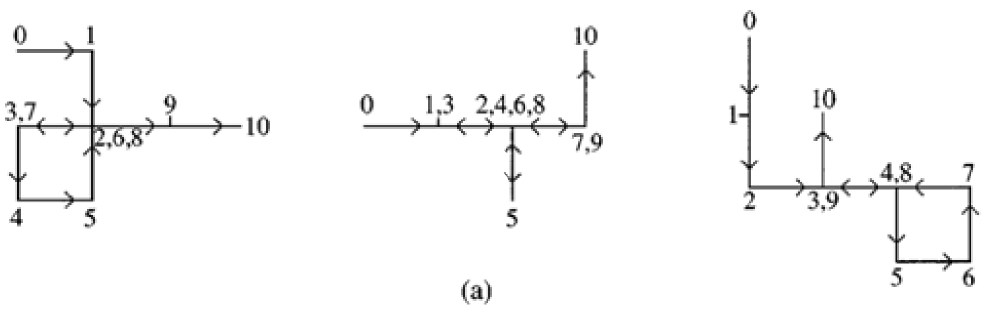
در سال ۱۹۰۵ آلبرت اینشتین [۳] تحقیقات مستقل خود را با نگاه فیزیکی بر ریاضیات حاکم بر حرکت براونی و شکلهای بطور غیر مستقیم تایید شده وجود اتم و مولکول (در آن زمان طبیعت اتمی ماده یک عقیده بحث انگیز بود) آغاز کرد.در ادامه خواهیم دید که طرح اصلی ریاضی حرکت براونی یک ابزار ریاضی مفید برای تحلیل بسیاری از پدیده های طبیعی است .

[۱] Lucretius
[۲] Robert Brown
[۳] Albert Eintein

آزمایش های زیادی به وسیله اینشتین و ماریان [٤] دنبال شد و نشان داده شد که مولکول های آب به صورت تصادفی حرکت می کنند . یک ذره کوچک معلق در سیال تعدادی ضربه های تصادفی از نیرو های تصادفی با جهت گیری هایی در زمان کوتاه را نشان می دهد . نتیجه این حرکت منحصر به فرد و بی قاعده که به صورت میکروسکوپیکی و به وسیله اثر متقابل اجزا با محیط و یا هر جز با اجزای دیگر ایجاد می شود پخش می باشد. می توان گفت از حرکت براونی هم معنی با پخش استفاده می شود[۱] .
پس از مشاهده های براون از حرکت نامنظم و این نکته که چگونه حرکت تصادفی ذرات معلق در یک سیال رامی- توان تفسیر کرد مرحله بعد قرار دادن هر دوی اینها در یک مدل ریاضی است.
در واقع یک مدل مناسب برای حرکت براونی با حرکتهای تصادفی ایجاد می شود. تئوری حرکت تصادفی در علوم ترمودینامیک ، بلور شناسی ،نجوم ،زیست شناسی و حتی در اقتصاد( در مدلهای نوسان بازار) مفید است.

## ۱-۲ حرکت تصادفی ساده

یک حرکت تصادفی یک فرآیند تصادفی تعیین شده در نقاط شبکه است که به طور معمول متغییر زمان به صورت گسسته در نظر گرفته می شود. در هر بخش زمان متحرک گام هایی را از مکان ابتدایی به یکی دیگر از مکان های شبکه با یک طرح تصادفی طی می کند که این طرح به حرکت قبلی وابسته نیست.
در ساده ترین نمایش حرکت تصادفی ،حرکت در یک شبکه d بعدی با فاصله گذاری شبکه ای مساوی در نظر گرفته می شود که در هر گام زمان ،متحرک پرشی کوچک به نزدیکترین مکان های مجاور خود با احتمال های یکسان انجام می دهد. چند حرکت تصادفی ساده در یک شبکه دو بعدی d= ۲ در شکل زیر نشان داده شده است




**شکل(۱-۱) حرکت های تصادفی دو بعدی[۲]**

[٤] Marian

بعد از n گام جا به جایی خالص به صورت زیر است

$$r(n) = \sum_{i=1}^{n} e_i \quad (1-2-1)$$

که $e_i$ بردار یکه ای به نزدیکترین مکان مجاور است و i گام حرکت را نشان می دهد. به دلیل این که داریم $\langle e_i \rangle = 0$ میانگین جا به جایی به صورت زیر است

$$\langle r(n) \rangle = 0 \quad (2-2-1)$$

از طرف دیگر چون گامها غیر وابسته اند داریم $\langle e_i . e_j \rangle = \delta_{ij}$

میانگین مربعی جابه جایی نیز به صورت زیر به دست می آید

$$\langle r^2(n) \rangle = \left\langle \left( \sum_{i=1}^{n} e_i \right)^2 \right\rangle = n + 2 \sum_{i>j}^{n} < e_i . e_j >= n \quad (3-2-1)$$

با تعمیم بیشتر اگر فاصله های شبکه ای را a و هر گام زمان را برابر $\tau$ قرار دهیم که $t = n\tau$ در آن صورت خواهیم داشت

$$r^2(t) = na^2 = \frac{ta^2}{\tau} = (2d)Dt \quad (4-2-1)$$

که $D = \frac{a^2}{(2d)\tau}$ ضریب پخش است که در پخش عادی مهم است .توجه داریم که سرعت متحرک با زمان به صورت زیر رابطه دارد

$$v \approx \frac{\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}{t} \approx \frac{[(2d)D]^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}{t} \approx \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

میانگین مربعی جابه جایی را می توان به وسیله چگالی احتمال $p(r,t)$ محاسبه کرد. $p(r,t)$ احتمال آن است که متحرک بعد از زمان t به مکان r منتقل شده باشد

$$< r^2(t) > = \int r^2 p(r,t) d^d r \quad (5-2-1)$$

در یک بعد $p(x,t)$ را می توان به سادگی محاسبه کرد[2] .

فرض می کنیم که پرش ها به سمت راست با احتمال p و به سمت چپ با احتمال $1-p$ اتفاق می افتد. اگر متحرک در مدت زمان m در سمت راست و در مدت زمان $t-m$ در سمت چپ حرکت کند جا به جایی آن به صورت $x = m-(t-m) = 2m-t$ خواهد بود. احتمال برای این حالت به وسیله بسط دو جمله ای زیر به دست می آید:

$$p(m,t) = \binom{t}{m} p^m (1-p)^{t-m} \qquad (۱-۲-۶)$$

که با قرار دادن $p=\frac{1}{2}$ و استفاده از تقریب استرلینگ $t! \approx (2\pi t)^{\frac{1}{2}}(\frac{t}{e})^t$ و برای $x \langle\langle t$ خواهیم داشت

$$p(x,t)dx \approx \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx \qquad (۱-۲-۷)$$

### ۱-۲-۱ چگالی های احتمال و رفتار تابع های مشخصه

ممکن است در بسیاری از حالت های عمومی مشتقات $p_n(r)$ (چگالی احتمال در نقطه r بعد از n گام) مورد نظر باشد . حرکتی را که در $R^d$ ( فضای پیوسته) اتفاق می افتد در نظر می گیریم و گام هایی را که با چگالی احتمال $p(r')$ ایجاد می شود در نظر می گیریم و فرض می کنیم که متحرک از مبدا شروع به حرکت می کند . با در نظر گرفتن حرکت تصادفی ساده در حالت خاص داریم

$$p(r') = (\frac{1}{2d}) \sum_i \delta(r' - ae_i) \qquad (۱-۲-۸)$$

$$F_n(k) = \int p_n(r) e^{ik.r} d^d r \qquad (۱-۲-۹)$$

که تابع $F_n(k)$ تابع مشخصه چگالی احتمال نامیده می شودو در واقع تبدیل فوریه p است و به طور مشابه تابع مشخصه چگالی احتمال گام به صورت زیر است

$$\lambda(k) = \int p(r') e^{ik.r'} d^d r' \qquad (۱-۲-۱۰)$$

که به صورت تابع ساختاری گام شناخته می شود . چون گامها غیر وابسته اند این تابع از خاصیت مارکوف [5]

[5] Markov

که به صورت زیر است پیروی می کند

$$p_{n+1}(r) = \int p_n(r') p(r-r') d^d r \qquad (۱-۲-۱۱)$$

با به کار بردن تبدیلات فوریه خواهیم داشت

$$F_{n+1}(k) = F_n(k)\lambda(k) \qquad (۱-۲-۱۲)$$

که رابطه بازگشتی به صورت زیر است

$$F_n(k) = \lambda(k)^n \qquad (۱-۲-۱۳)$$

چگالی احتمال با استفاده از تبدیلات معکوس به صورت زیر به دست می آید

$$p_n(r) == \frac{1}{(2\pi)d} \int F_n(k) e^{-ik.r} d^d k \qquad (۱-۲-۱۴)$$

فرض می کنیم که تابع احتمال گام دارای میانگین صفر و واریانس متناهی باشدیعنی

$$\int rp(r) d^d r = 0 \qquad \int r^2 p(r) d^d r = a^2 < \infty \qquad (۱-۲-۱۵)$$

در طول زمان پراکندگی $p_n(r)$ به سمت گوسی میل می کند . حال می خواهیم ببینیم که چگونه این موارد در یک حالت خاص و ساده در یک بعد $d = 1$ اتفاق می افتد. ممکن است که ما با متغییر های نرده ای به جای بردار های d بعدی r و k کار کنیم. تابع ساختاری مطابق رابطه های(۱-۲-۱۰) و (۱-۲-۱۵) است و داریم

$$\lambda(k) = 1 - \frac{1}{2} k^2 a^2 + o(k^2) \qquad (۱-۲-۱۶)$$

که تابع مشخصه به صورت زیر است

$$F_n(k) = e^{\frac{-nk^2a^2}{2} + no(k^2)} \qquad (۱-۲-۱۷)$$

برای زمان های طولانی ($n >> 1$)نقش اصلی $F_n(k)$ برای $|k| < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ است و داریم $no(k^2) \approx \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

که می توان از آن صرفنظر کرد . بنابراین

$$p_n(r) = \frac{1}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-nk^۲a^۲}{۲}-ik.r} dk = \frac{1}{\sqrt{۲\pi a^۲ n}} e^{\frac{-r^۲}{(۲a^۲n)}} \quad (۱-۲-۱۸)$$

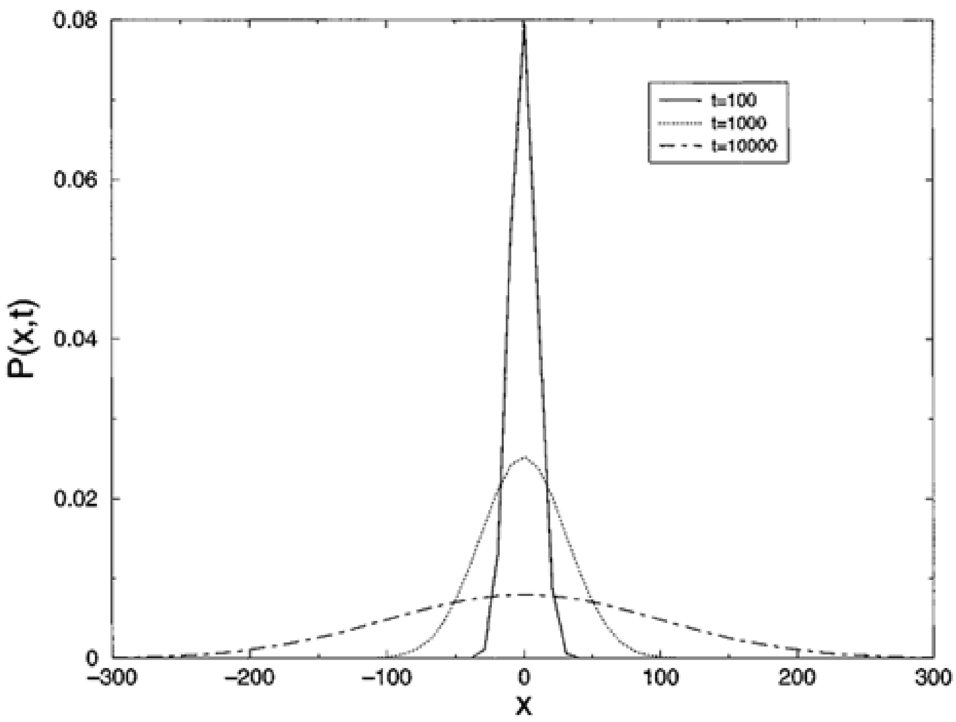
که با توجه به متغییر زمان $t = n\tau$ و رابطه $D = \frac{a^۲}{۲\tau}$ خواهیم داشت $na^۲ = ۲n\tau D = ۲tD$

در این صورت رابطه (۱-۲-۱۸) به صورت زیر نوشته می شود

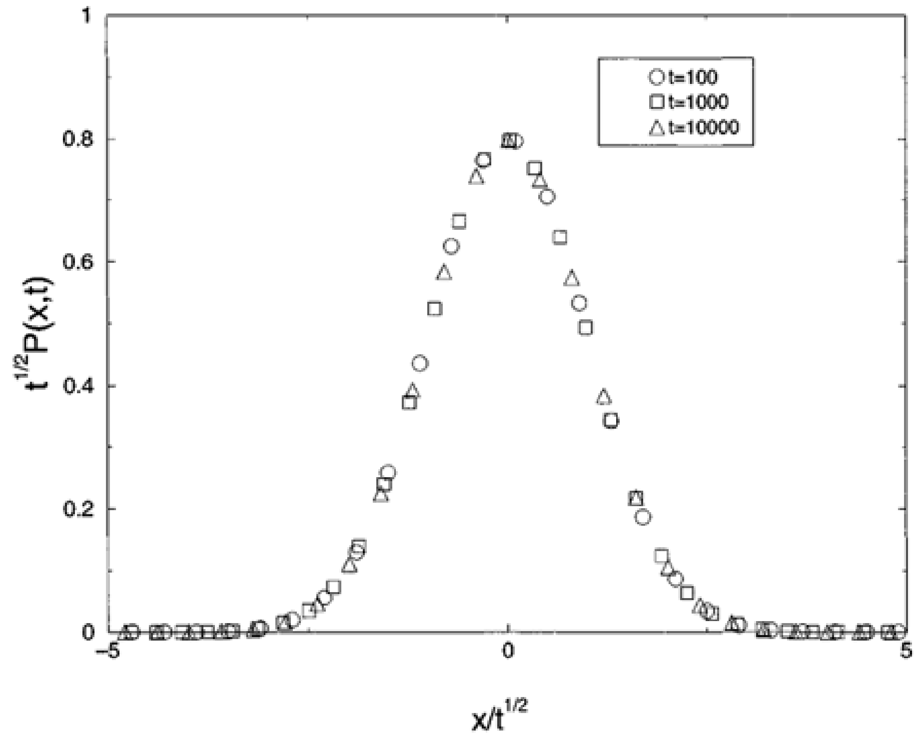
$$p(r,t) = \frac{1}{\sqrt{۴\pi Dt}} e^{\frac{-r^۲}{(۴Dt)}} \quad (۱-۲-۱۹)$$

چگالی احتمال در بعد d نیز به همین صورت است تنها تفاوت آن در این است که فاکتور نرمالیزه کردن به صورت $(۴\pi Dt)^{\frac{-d}{۲}}$ است .

شکل (۱-۲) منحنی $p(r,t)$ را بر حسب r برای حرکت های یک بعدی با مقادیر متفاوت t نشان می دهد. اگر شکل را به صورت $t^{\frac{۱}{۲}}p(r,t)$ بر حسب $\frac{r}{t^{\frac{۱}{۲}}}$ رسم کنیم، شکل (۱-۳) ، این منحنی های متفاوت یک شکل کلی را نشان می دهند . این که به جای همه منحنی ها یک منحنی را قرار دهیم با توجه به رابطه بین فاصله با زمان که به صورت $r \propto t^{\alpha} (\alpha = \frac{۱}{۲})$ است امکان پذیر می باشد.



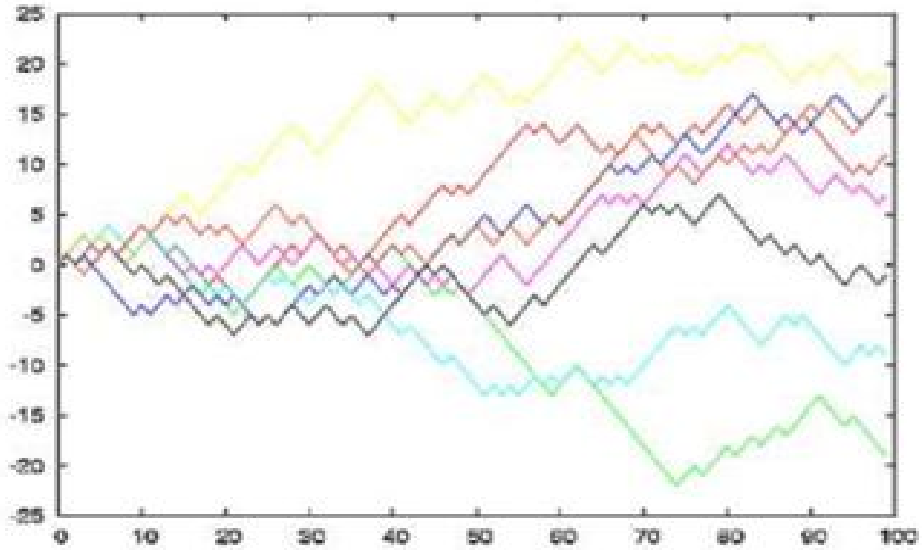

**شکل(۱-۲) تابع توزیع احتمال یک حرکت تصادفی ساده[۲]**




شکل(۱-۳) منحنی های متفاوت به یک منحنی کلی تبدیل می شود در صورتی که x به $\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}$ تبدیل شود[۲]

## ۱-۳ حرکت براونی تفسیر شده همچون یک حرکت تصادفی کلاسیکی

برای ایجاد پایه های فرآیند تصادفی ایجاد شده در حرکت براونی با یک مثال ساده شروع می کنیم




شکل(۱-٤) حرکت تصادفی در یک بعد در راستای محور عمودی به صورت تابعی از زمان در راستای محور افقی[۱]

ما یک حرکت تصادفی در یک بعد را مشاهده می کنیم. فرض می کنیم گامهای ذرات $\Delta \mathbf{z}$ تصادفی بوده و در دو طرف راست و چپ یکسان هستند طول ثابت $\ell$ را دارند. مکان $z_N$ یک ذره که با $z_0 = 0$ شروع می شود بعد از $\mathbf{N}$ مرحله به صورت زیر است

$$z_N = \Delta z_N + \Delta z_{N-1} + \ldots + \Delta z_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i \tag{۱-۳-۱}$$

بنابراین مربع جا به جایی برابر است با

$$z_N^2 = (\sum_{j=1}^{N} \Delta z_j)(\sum_{k=1}^{N} \Delta z_k) = \sum_{j,k=1}^{N} \Delta z_j \Delta z_k = \sum_{j=1,k=j}^{N} \Delta z_j^2 + \sum_{j,k=1 j\neq k}^{N} \Delta z_j \Delta z_k = N\ell^2 + \sum_{j,k=1 j\neq k}^{N} \Delta z_j \Delta z_k \tag{۱-۳-۲}$$

با میانگین گیری بر روی تعداد زیادی ذره میانگین مربعی جا به جایی به صورت زیر است

$$\left\langle z_N^2 \right\rangle = N\ell^2 + \left\langle \sum_{j,k=1, j\neq k}^{N} \Delta z_j \Delta z_k \right\rangle \tag{۱-۳-۳}$$

هر گام در سمت راست و چپ یکسان است بنابراین جابجایی $\Delta z_i$ یک متغییر تصادفی با میانگین صفر است. حاصل $\Delta z_j \Delta z_k$ نیز یک متغییر تصادفی است و از آنجایی که فرض کردیم $\Delta \mathbf{z_k}$ و $\Delta z_j$ بهم وابسته نیستند مقدار میانگین حاصل ضرب آنها صفر است. مقدار چشم داشتی حالتهای $j, k$ غیر مساوی در معادله (۱-۳-۳) نیز صفر می باشد بنابراین

$$\left\langle z^2 \right\rangle = N\ell^2 \tag{۱-۳-٤}$$

و جذر میانگین مربعی جابه جایی بعد از $N$ مرحله در طول ثابت $\ell$ به صورت زیرخواهد بود

$$R = \sqrt{\left\langle z_N^2 \right\rangle} = \sqrt{N}\ell \tag{۱-۳-۵}$$

به این روش می توان تعداد گامهایی را که یک فوتون از هسته خورشید تا رسیدن به سطح زمین طی می کند تخمین زد. با توجه به معادله (۱-۳-۵) یعنی $N = (\frac{R}{\ell})^2$ دانستن شعاع خورشید که تقریبا $10^{10}$cm است و مشخصه گامها (که با محاسبه چگالی داخلی خورشید تقریبا ۱cm است) نتیجه می گیریم که فوتون $10^{20}$ گام را قبل از خارج شدن از سطح خورشید طی کند. در نتیجه سوالهایی مشابه به این که اگر هسته خورشید تولید انرژی را متوقف کند چقدر طول خواهد کشید که ما این تغییر را احساس کنیم می توان پاسخ داد.

میانگین $\ell$ را نیز می توان با یک مدل ساده حدس زد اگر یک ذره در گاز با سرعت متوسط $\langle v\rangle$ حرکت کند و مسافت طی شده بین دو برخورد متوالی $\ell=\langle v\rangle\tau$ است که $\tau$ زمان برخورد است. اگر ذرات شعاع $a$ را داشته باشند و مسافت $L$ را در یک گاز با چگالی $n$ طی کنند پس $۴\pi a^{۲}Ln$ برخورد انجام می شود( تعداد ذرات در حجم $4\pi a^{2}L$ است). میانگین مسیر طی شده نیز با توجه به رابطه $۴\pi a^{۲}\ell n=۱$ تعیین می شود که $\ell$ مسافت طی شده ای است که در طول آن یک برخورد رخ می دهد

$$\ell=\frac{۱}{۴\pi a^{۲}n} \qquad (۱-۳-٦)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که تعداد گام هایی که یک ذره در یک گاز در زمان $t$ طی می کند به صورت $N=\frac{t}{\tau}$ است و با توجه به رابطه(۱-۳-٤) و رابطه $\ell=\langle v\rangle\tau$ میانگین مربعی جا به جایی به صورت زیر به دست می آید

$$\langle z^{۲}\rangle=N\ell^{۲}=(\frac{t}{\tau})(\langle v\rangle\tau)\ell=\langle v\rangle\ell t \qquad (۱-۳-۷)$$

اگر فرض کنیم که حرکت تصادفی در ۳ بعد اتفاق می افتد و گاز در حالت تعادل و همسانگرد باشد داریم

$$\langle x^{۲}\rangle=\langle y^{۲}\rangle=\langle z^{۲}\rangle=\frac{\langle r^{۲}\rangle}{۳}$$

و میانگین مربعی جا به جایی در ۳ بعد به صورت زیر است

$$\langle r^{۲}\rangle=۳\langle v\rangle\ell t=Dt \qquad (۱-۳-۸)$$

که $D=۳\langle v\rangle\ell$ است و ضریب پخش نامیده می شود و پارامتری مفید در مشخص کردن پخش در حالت عادی است [۱].نکته مهم در این رابطه توجه کردن به رابطه خطی بین $\langle r^{۲}\rangle$ و زمان $t$ است.

### ۱-۳-۱ فرم توصیفی حرکت تصادفی کلاسیکی

مکان یک ذره را در یک ،دو وسه بعد مشاهده کردیم و فرض کردیم که تغییر مکان در گام های مکرر و تصادفی $\Delta r$ ایجاد می شود. همچنین زمان $\Delta t$ که بین دو گام پی در پی ایجاد می شود را ثابت فرض کردیم زمان در واقع یک نقش ساختگی را ایفا می کند و در حقیقت یک شمارنده ساده است . مکان $\vec{r}_n$ یک ذره بعد از $n$ گام که در زمان $t_n=n\Delta t$ طی شده است را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\vec{r}_n=\Delta\vec{r}_n+\Delta\vec{r}_{n-۱}+\Delta\vec{r}_{n-۲}+\ldots\ldots\ldots+\Delta\vec{r}_۱+\vec{r}_0 \qquad (۱-۳-۹)$$

که $\vec{r}_0$ مکان ابتدایی است و $\Delta\vec{r}_i$ گام i ام است . مکان $\vec{r}_n$ به خوبی با فواصل کوچک $\Delta\vec{r}_i$ که همگی متغییرهای تصادفی هستند مشخص می شود . برای حل کامل مساله مجبور هستیم توزیع احتمال $q_{\Delta\vec{r}}(\Delta\vec{r})$ را برای فواصل کوچک $\Delta\vec{r}_i$ تعیین کنیم که حاصل آن احتمال برای ذراتی است که گام مشخص $\Delta\vec{r}_i$ را می‌سازند (با طول و جهت داده شده ) . نوشتن $q_{\Delta\vec{r}}(\Delta\vec{r})$ به این روش این فرض را ایجاد می کند که همه فواصل کوچک همان توزیع احتمال را دارند و این فواصل کوچک به یکدیگر وابسته نیستند(مقدار $\Delta\vec{r}_i$ داده شده به طور کامل از مقادیر مراحل قبلی داده شده $\Delta\vec{r}_{i-1}$ مستقل است ). تعمیم به گام های پخش وابسته به زمان و یا وابستگی گام ها به یکدیگر امکان پذیر است [۱] .

با توجه به این که $\vec{r}_n$ یک متغییر تصادفی است راه حلی که برای حرکت تصادفی به دنبال آن هستیم در فرم توزیع احتمال $p(\vec{r},t_n)$ می باشدکه حاصل احتمال وجود یک ذره در موقعیت $\vec{r}$ و در زمان $t = t_n = n\Delta t$است . اگر به میانگین مربعی جا به جایی علاقمند هستیم می توانیم فقط با مربع کردن رابطه (۱-۳-۹) و به همان روش رابطه (۱-۳-۲) برای $r_0 = 0$ بنویسیم

$$< \vec{r}_n^{\,۲} >= \sum_{j=۱, j=k}^{n} < \Delta\vec{r}_j^{\,۲} > + \sum_{j,k=۱ j\neq k}^{n} < \Delta\vec{r}_j . \Delta\vec{r}_k > \qquad (۱۰-۳-۱)$$

عبارت اول در سمت راست فقط جمع روی واریانس $\sigma^{۲}_{\Delta\vec{r}_j}$ و $q_{\Delta\vec{r}}(\Delta\vec{r})$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$\sigma^{۲}_{\Delta r} =< \Delta\vec{r}_j^{\,۲} >= \int \Delta\vec{r}^{\,۲} q_{\Delta\vec{r}}(\Delta\vec{r}) d\Delta\vec{r}$$

اگر میانگین $q_{\Delta\vec{r}}(\Delta\vec{r})$ صفر باشد و رابطه دوم در سمت راست کوواریانس $(\Delta\vec{r}_j, \Delta\vec{r}_k)$ گام های حرکت تصادفی است که این مقدار نیز در صورتی که گام های ذرات به یکدیگر وابسته نباشند صفر است.

در این صورت می توانیم رابطه (۱-۳-۱۰) را به صورت زیر بنویسیم

$$\left\langle \vec{r}_n^{\,۲} \right\rangle = \sum_{j=۱ (j=k)}^{N} \sigma^{۲}{}_{\Delta\vec{r}_j} + \sum_{j,k=۱ j\neq k}^{N} \mathrm{cov}(\Delta\vec{r}_j, \Delta\vec{r}_k) \qquad (۱۱-۳-۱)$$

بنابر این خاصیت حرکت تصادفی را که در بخش ۱-۳ مشاهده کردیم می توان بر اساس رابطه(۱-۳-۱۱)درک کرد. با ایجاد حالت خاصی که در آن کو واریانس صفر و واریانس برابر $\sigma^{۲}_{\Delta\vec{r}_j} = \ell^{۲}$ است (که از طول ثابت گام ایجاد می شود) ما به میانگین مربعی جا به جایی در رابطه (۱-۳-٤)می رسیم.