دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم-گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض-گرایش جبر

عنوان:

گراف اشتراکی زیرمدول‌های یک مدول

استاد راهنما:

دکتر شعبان قلندرزاده

نگارش:

سمانه پورحیدر سنگدهی

۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و علم را به بهترین اعمال برسان.

تقدیم به

همسر و فرزند عزیزم

سپاسگزاری

سپاس خدای مهربان را که اندیشه‌ام داد.

حمد و ستایش بی‌قیاس خدای را سزاست که از الطاف خود در انسان دمید و او را اشرف مخلوقات خود قرار داد.

با درود به روح پر فتوح پدرم ...

به مصداق « من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق»

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر قلندرزاده که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند،

از مادر بزرگوارم به خاطر همه تلاش‌های محبت‌آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده است،

از همسر مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری برایم فراهم نمود تا با حمایت‌های همه جانبه ایشان در محیطی مطلوب دوره تحصیلی و پایان‌نامه درسی‌ام را به نحو احسن به اتمام برسانم،

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

در سرتاسر این پایان‌نامه که از دو قسمت اصلی تشکیل شده است R حلقه‌ای یکدار و M یک Rـمدول چپ می‌باشد. بعلاوه در این پایان‌نامه زیرمدول چپ سره غیر صفر M را به اختصار زیرمدول غیر بدیهی M می‌گوییم. در قسمت اول از این پایان‌نامه با بهره گرفتن از مقاله‌ای در زمینه گراف اشتراکی زیرمدول‌های یک مدول، $(G(M))$ به مطالعه و بررسی ارتباط میان خواص Rـمدول M و برخی ویژگی‌های گراف اشتراکی وابسته به آن از قبیل: همبندی، قطر و کمر گراف، عدد خوشه‌ای، عدد رنگی و ...می‌پردازیم .

لازم بذکر است که مجموعه رئوس گراف فوق همه زیرمدول‌های غیربدیهی متمایز مدول M می‌باشد و دو رأس متمایز N و K در گراف اشتراکی با هم مجاورند اگر و تنها اگر $N \cap K \neq (\circ)$.

در قسمت دوم پایان‌نامه (فصل یافته‌های جدید) گراف دیگری به نام گراف هم ماکسیمال به مدول M نظیر کرده و آن را با نماد $\ell(M)$ نمایش می‌دهیم، گراف هم ماکسیمال نیز گرافی ساده است و مجموعه رئوس این گراف هم زیرمدول‌های غیرصفر سره Rـمدول M می‌باشد، با این تفاوت که در گراف فوق دو رأس متمایز N و K مجاورند اگر و تنها اگر $N + K = M$.

در قسمت یافته‌های جدید نیز مشابه قسمت اول هدف تحقیق و جستجو در ارتباط بین

ویژگی‌های مدول M و ساختار گراف هم ماکسیمال وابسته به آن است.

کلمات کلیدی:

گراف اشتراکی، عدد خوشه‌ای، عدد رنگی، گراف هم ماکسیمال، زیرمدول مینیمال، زیرمدول ماکسیمال

فهرست مطالب

فهرست نمادها و نشانه‌ها

$Soc(M)$	جمع زیرمدول‌های مینیمال M
$l_R(M)$	طول مدول M
$K[x,y]$	حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K با دو متغیر x,y
$M_۲(F)$	ماتریس‌های ۲ × ۲ روی میدان نامتناهی F
$\lvert Max(M)\rvert$	تعداد زیرمدول‌های ماکسیمال مدول M
$Kerf$	هسته همریختی f
$G(M)$	گراف اشتراکی زیرمدول‌های M
$\ell(M)$	گراف هم ماکسیمال زیرمدول‌های M
$G(R)$	گراف اشتراکی ایده‌آل‌های چپ حلقه R
$\lvert G\rvert$	تعداد رئوس گراف G
$deg(V)$	درجه رأس v
$d(x,y)$	فاصله دو رأس x,y
$diam(G)$	قطر گراف G
$girth(G)$	کمر گراف G
$\omega(G)$	عدد خوشه‌ای گراف G
$\chi(G)$	عدد رنگی گراف G
$\alpha(G)$	عدد استقلالی گراف G

پیشگفتار

جستجو و روشن ساختن جزئیات جبری گراف‌های اشتراکی وابسته به ساختارهای جبری (گروه، حلقه و مدول) و بالعکس یعنی پیش‌بینی خواص ساختار جبری با توجه به گراف وابسته به آن سال‌ها مورد توجه ریاضیدانان بوده است. به عنوان مثال بوساک[۱] در سال ۱۹۶۴ موضوع گراف نیم گروه‌ها [۴] را مطرح کرد. همچنین پولاک [۲] در ۱۹۶۹در زمینه گراف زیرگروه‌های یک گروه متناهی [۶] به تحقیق و جستجو پرداخت و با ادامه تحقیق و مطالعه در همین راستا در سال ۱۹۷۵، زلینکا [۳] گراف اشتراکی گروه آبلی متناهی [۱۴] را تعریف نمود. در این اواخر نیز در سال ۲۰۰۹ موضوع گراف اشتراکی ایده‌آل‌های یک حلقه [۵] توسط سن [۴] و قش [5] و ...مطرح شد. در همین راستا در این پایان‌نامه به مطالعه و بررسی گراف اشتراکی زیرمدول‌های یک مدول می‌پردازیم.

لذا فصل اول این تحقیق شامل مطالبی از جبر جابجایی و نظریه جبری گراف است که در فصول بعدی از آن استفاده خواهیم کرد. در فصل دوم پس از شناخت مدول‌هایی که گراف اشتراکی زیرمدول‌های آن همبند است قطر و کمر گراف اشتراکی را محاسبه می‌کنیم. در

[۱] Bosak
[۲] Pollak
[۳] Zelinka
[۴] Sen
[5] Ghosh

فصل سوم به تحقیق در مورد رابطه عدد رنگی و عدد خوشه‌ای گراف اشتراکی و خواص مدول M می‌پردازیم.

سرانجام در فصل چهارم (فصل یافته‌های جدید)، ابتدا گراف هم ماکسیمال زیرمدول‌های یک مدول را تعریف کرده و سپس به تحقیق و جستجو درباره روابط میان مدول M و گراف هم ماکسیمال وابسته به آن می‌پردازیم.

فصل ۱
پیش نیازها

در این فصل تعاریف و مفاهیمی از جبر جابه‌جایی و نظریه جبری گراف را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب پایان‌نامه دارند، یادآور می‌شویم. توجه کنید که در سرتاسر این پایان‌نامه R حلقه‌ای یکدار و M، Rـمدول چپ یکانی است. همچنین عبارت Rـمدول همواره بر یک Rـمدول چپ دلالت می‌کند و منظور از زیرمدول غیر بدیهی از M یک زیرمدول چپ سره غیر صفر از Rـمدول M است. گراف اشتراکی مدول M گرافی ساده است که آن را با نماد $G(M)$ نمایش می‌دهیم، رئوس گراف اشتراکی همه زیرمدول‌های غیر بدیهی M می‌باشند و دو رأس متمایز با هم مجاورند اگر و تنها اگر اشتراک غیر صفر داشته باشند. برای حلقه R، $G(R)$ همان گراف اشتراکی ایده‌آل‌های چپ R می‌باشد، پیداست که حلقه R به عنوان یک Rـمدول چپ روی خودش در نظر گرفته می‌شود.

۱.۱ مفاهیم و قضایایی از جبر جابه‌جایی

تعریف ۱ـ۱ـ۱. Rـمدول غیر صفر M را ساده گویند، هرگاه زیرمدول غیربدیهی نداشته باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۲. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت زیرمدول N از M را ماکسیمال گویند، هرگاه N نسبت به رابطه مشمولیت عضو ماکسیمال مجموعه زیرمدول‌های سره M باشد.

به عبارت دیگر زیرمدول N از M ماکسیمال است اگر و تنها اگر

۱. $N \subset M$

۲. زیرمدولی چون K از M وجود نداشته باشد چنانکه $N \subset K \subset M$

تعریف ۱ـ۱ـ۳. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت زیرمدول N از M را مینیمال گویند، هرگاه $N \neq (0)$ و برای زیرمدول P از M اگر $P \subseteq N$ آنگاه $P = (0)$ یا $P = N$.

تعریف ۱ـ۱ـ۴. مجموع همه زیرمدول‌های ساده Rـمدول M را ساکل[۱] مدول M می‌نامند و آن را با نماد $Soc(M)$ نشان می‌دهند، Rـمدول را نیم ساده گویند، هرگاه $Soc(M) = M$.

قضیه ۱ـ۱ـ۵. فرض کنید M یک Rـمدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های

---
[۱] socle

M. در این صورت شرایط زیر معادلند.

۱. $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای مستقل است، یعنی به ازای هر $n \geq 1$، هر عضو از I مثل i_k و هر عضو از M_{i_k} مثل x_{i_k}، از $\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = 0$ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر k، $1 \leq k \leq n$، $x_{i_k} = 0$.

۲. به‌ازای هر عضو از I مثل j، $M_j \cap (\sum_{i\in I\setminus\{j\}} M_i) = 0$.

۳. هر عضو از $\sum_{i\in I} M_i$ نمایشی منحصربه‌فرد برحسب مجموعی متناهی از اعضای M_i ها دارد.

برهان. مرجع [۱۵] را ببینید.

تعریف ۱ـ۱ـ۶. فرض کنید M، یک Rـمدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M. اگر یکی از شرایط معادل در قضیه قبل برای این خانواده فراهم شود، آنگاه مجموع $\sum_{i\in I} M_i$ را مجموع مستقیم نامیده و آن را با $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱ـ۱ـ۷. هرگاه Rـمدول M با حاصلجمع مستقیم هیچ دو زیرمدول سره غیر صفرش برابر نباشد، آن را یک مدول تحویلناپذیر می‌نامند.

تعریف ۱ـ۱ـ۸. Rـمدول چپ M متناهی مولد است، اگر و تنها اگر $a_1, \ldots, a_n \in M$ وجود داشته باشند که برای هر $x \in M$، $r_1, \ldots, r_n \in R$ وجود داشته باشند بطوریکه $x = r_1a_1 + r_2a_2 + \ldots + r_na_n$ در این حالت مجموعه $\{a_1, \ldots, a_n\}$ یک مجموعه مولد

برای M است.

تعریف ۱ـ۱ـ۹. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت زیرمجموعه X از M را روی R مستقل خطی گویند، هرگاه

$$\forall i \in N,\ r_i \in R,\ x_i \in X\ :\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0 \ \Rightarrow\ \forall i \in N,\ r_i = 0$$

همچنین $X \subseteq M$ را یک پایه می‌نامند، هرگاه X روی R مستقل خطی باشد و $RX = M$ (مدول تولید شده توسط X). Rـمدول M را آزاد می‌نامند، هرگاه دارای یک پایه باشد.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۰. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و F، Rـمدولی آزاد. در این صورت تعداد اعضای هر دو پایه از F برابر است. تعداد اعضای پایه F را رتبه F می‌نامند.

برهان. مرجع [۱۵] را ببینید.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۱. Rـمدول M را نوتری گویند اگر در یکی از شرایط زیر که معادلند صدق کند.

۱. هر زنجیره صعودی از زیرمدول‌هایش ایستا باشد.

۲. هر گردایه ناتهی از زیرمدول‌هایش نسبت به رابطه مشمولیت عضو ماکسیمال داشته باشد.

۳. هر زیرمدول M متناهی مولد باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۲. Rـمدول M آرتینی است، هرگاه در یکی از شرایط زیر که معادلند صدق کند.

۱. هر زنجیره نزولی از زیرمدول‌هایش ایستا باشد.

۲. هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M نسبت به رابطه مشمولیت دارای عضو مینیمال باشد.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۳. فرض کنید M، یک Rـمدول باشد و N زیرمدولی از M. در این صورت، M نوتری (آرتینی) است اگر و فقط اگر N و M/N نوتری (آرتینی) باشند.

برهان. مرجع [۱۵] راببینید.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۴. فرض کنید M، Rـمدول باشد. زنجیر

$$0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$$

از زیرمدول‌های M را که از صفر شروع می‌شود و به M ختم می‌شود، زنجیر سره از زیرمدول‌های M نامیده و n را طول زنجیر تعریف می‌کنند. اگر به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، Rـمدول‌های خارج‌قسمتی M_i/M_{i-1} ساده باشند، زنجیر را سری ترکیبی‌ای برای M می‌نامند.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۵. فرض کنید K زیرمدولی از Rـمدول M است و فرض کنید که حداقل یک سری ترکیبی از M به K وجود دارد. پس هر زنجیره اکیداً کاهشی

$$M = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_t = K$$

را با تظریف می‌توان به یک سری ترکیبی تبدیل کرد. اگر

$$M = E_{\circ} \supset E_{۱} \supset E_{۲} \supset \ldots \supset E_t = K$$

سری ترکیبی دیگری از M به K باشد، واضح است که هر دو سری ترکیبی از M به K با هم معادلند به عبارت دیگر تعداد جملات یکسان دارند و تناظری یک به یک میان گردایه‌های فاکتورهای ترکیبی $\{F_{i+۱}/F_i\}$ و $\{E_{i+۱}/E_i\}$ وجود دارد، بطوریکه مدول‌های خارج قسمتی متناظر با هم یکریختند.

برهان. مرجع [۱۰] را ببینید.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۶. طول سری ترکیبی M را طول مدول M می‌نامند و آن را با نماد $l(M)$ نمایش می‌دهند. اگر Rـمدول M دارای هیچ سری ترکیبی نباشد $l(M) = +\infty$.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۷. فرض کنید M، Rـمدول باشد. در این صورت، M با طول متناهی است اگر و فقط اگر هم نوتری باشد و هم آرتینی.

برهان. مرجع [۱۵] را ببینید.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۸. فرض کنید $M_{\circ}, \ldots, M_n$ $(n \geq ۲)$ Rـمدول‌هایی دلخواه باشند. در این صورت دنباله

$$\mathbf{M_{\circ}} \xrightarrow{\phi_۱} \mathbf{M_۱} \xrightarrow{\phi_۲} \mathbf{M_۲} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbf{M_{n-۱}} \xrightarrow{\phi_n} \mathbf{M_n}$$

را، که دنباله‌ای از Rـهمریختی‌های $\phi_۱, \ldots, \phi_n$ است، دنباله دقیق می‌نامند هرگاه برای هر $۲ \leq i \leq n$، $\mathrm{Im}\phi_{i-۱} = \mathrm{Ker}\phi_i$.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۹. فرض کنید $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ دنباله‌ای دقیق از Rـمدول‌ها باشد. آنگاه $l_R(M) = l_R(M') + l_R(M'')$

برهان. مرجع [۸] را ببینید.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۰. زیرمدول N از M زائد است، اگر زیرمدول سره K از M وجود نداشته باشد، بطوریکه $N + K = M$. بطور معادل اگر $N + K = M$ نتیجه بگیریم، $K = M$. این مفهوم با نماد $N \ll M$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۱. زیرمدول N از M را مکمل گویند، هرگاه زیرمدول دیگری چون L از M موجود باشد، بطوریکه N نسبت به خاصیت $N + L = M$ مینیمال باشد.

M یک Msـمدول است، هرگاه هر زیرمدول ماکسیمال آن مکمل باشد.

قضیه ۱ـ۱ـ۲۲. زیرمدول N از M مکمل است اگر و تنها اگر $N+L = M$ و $N\cap L \ll N$.

برهان. فرض کنید N مکمل زیرمدول L از M باشد. برای $K \leq N$ فرض کنید که $N = K + (N \cap L)$، پس

$$N = K + (N \cap L) = N \cap (K + L)$$

در نتیجه $N \leq L + K$ و بنابراین

$$M = N + L = L + K$$

و با توجه به مینیمال بودن N در رابطه $N + L = M$ نتیجه می‌گیریم که $K = N$، بعبارت دیگر $N \cap L \ll N$.

برعکس، فرض کنید زیرمدول K از N وجود دارد بطوریکه $M = L + K$.

$$N = N \cap M = N \cap (K + L) = K + (N \cap L)$$

و چون $N \cap L \ll N$، پس $N = K$. به عبارت دیگر N نسبت به خاصیت $N + L = M$ مینیمال است.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۳. Rـمدول M را یکنواخت گویند، هرگاه هر جفت از زیرمدول‌های غیر صفر M اشتراک غیر بدیهی داشته باشند.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۴. E، Rـمدولی انژکتیو است، هرگاه به ازای هر نمودار از Rـهمریختی‌ها و Rـمدول‌ها مثل

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{M} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{N} \\ & \mathbf{E} & \end{tikzcd}$$

که سطر آن دقیق باشد، Rـهمریختی‌ای مثل $\phi : N \to E$ موجود است که نمودار را جابه‌جایی می‌کند:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{M} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{N} \arrow[dl, "\phi"] \\ & \mathbf{E} & \end{tikzcd}$$

تعریف ۱ـ۱ـ۲۵. فرض کنید N، یک Rـمدول باشد و M توسیعی از آن. M توسیع اساسی N است هرگاه به‌ازای هر زیرمدول غیر صفر مثل K از M، $N \cap K \neq (0)$.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۶. فرض کنید M، Rـمدول باشد. Rـمدولی مثل E را توسیع اساسی

ماکسیمال M می‌نامند اگر E توسیع اساسی M باشد و اگر $M \leq E \lneqq K$، آن‌گاه K توسیع اساسی M نباشد. همچنین، Rـمدول انژکتیوی مثل E را توسیع انژکتیو مینیمال M گویند اگر E توسیع M باشد و اگر $M \leq K \lneqq E$، آن‌گاه K انژکتیو نباشد.

قضیه ۱ـ۱ـ۲۷. فرض کنید M، Rـمدول باشد و E توسیعی از M. در این صورت شرایط زیر معادلند.

۱. E توسیع اساسی انژکتیو M است.

۲. E توسیع اساسی ماکسیمال M است.

۳. E توسیع انژکتیو مینیمال M است.

برهان. مرجع [۱۵] را ببینید.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۸. فرض کنید M، Rـمدول باشد. هر Rـمدول را که در یکی از شرایط معادل قضیه قبل صدق کند، پوشش انژکتیو M می‌نامند.

قضیه ۱ـ۱ـ۲۹. هر Rـمدول مثل M پوشش انژکتیو دارد و هر دو پوشش انژکتیو M یکریخت هستند.

برهان. مرجع [۱۵] را ببینید.

توجه کنید که بنا بر قضیه قبل، هر Rـمدول مثل M، پوششی انژکتیو دارد که در حد یکریختی منحصر به‌فرد است. این پوشش انژکتیو منحصر به‌فرد M را با $E(M)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۱ـ۱ـ۳۰. برای یک Rـمدول انژکتیو شرایط زیر معادلند.

۱. M تحویلناپذیر است.

۲. $M \neq 0$ و $M = E(M')$ برای هر زیرمدول $M' \subseteq M$.

۳. M یکنواخت است.

برهان. مرجع [۹] را ببینید.

قضیه ۱ـ۱ـ۳۱. فرض کنید M و N دو Rـمدول باشند و $\phi : M \to N$ نیز یک Rـهمومورفیسم پوشا. در این صورت، تناظری دوسویی بین زیرمدول‌هایی از M که شامل $\mathrm{Ker}\phi$ هستند با زیرمدول‌های N موجود است. اگر $\mathscr{A}$ مجموعه تمام زیرمدول‌هایی از M باشد که شامل $\mathrm{Ker}\phi$ هستند و $\mathscr{B}$ مجموعه تمام زیرمدول‌های N، آنگاه تابع $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ با ضابطه $f(K) = \phi(K)$ این تناظر دوسویی را برقرار می‌سازد.

برهان. مرجع [۱۵] را ببینید.

قضیه ۱ـ۱ـ۳۲. فرض کنید M، Rـمدولی غیر صفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند.

۱. M، Rـمدولی ساده است.

۲. M دوری است و هرعضو غیر صفرش مولدی از آن است.

۳. ایده‌آل چپ ماکسیمالی از R مثل m موجود است که $M \cong R/m$.