وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

ناپایداری پرینتر

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

نسا عبداله‌زاده

استاد راهنما: دکتر مهدی حبیبی

استاد مشاور: دکتر مانیا ملکی

خرداد ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر مهربانم.

قدردانی و تشکر

از خدای مهربانم برای همه‌ی نعمت‌های بی‌پایانش به خصوص بودن در کنار خانواده‌ی عزیزم که همواره پشتیبان من بودند، متشکرم.

از استاد راهنمای عزیزم دکتر مهدی حبیبی برای تمام راهنمایی‌ها و زحمات بی‌دریغشان، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از استاد مشاور عزیزم دکتر مانیا ملکی برای کمک‌هایشان در پیش‌برد این پایان نامه متشکرم. از دوستان خوبم در آزمایشگاه سیالات پیچیده آقای حسین ناصری، محمدحسن خاتمی، سیدحسین حسینی، آرمان جوادی، جواد نجفی و خانم آذین و همچنین دوستان خوبم آقای فرشاد بخشندگان مقدم، ابراهیم احسانفر، مهدی خسرویان و خانم مریم سلطانلو که در طی این چند سال در کنارشان بودم، نهایت تشکر را دارم. امیدوارم همواره موفق باشند.

در نهایت از پروفسور ثبوتی بنیانگذار مرکز تحصیلات تکمیلی برای فراهم کردن چنین محیط علمی و فرهنگی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی رفتار فیلم نازک و وشکسان سیال حول استوانه‌ی افقی چرخان که به ناپایداری پرینتر معروف است، می‌پردازیم. این فیلم نازک در سطح خارجی یک استوانه‌ی چرخان که تا ارتفاع مشخصی در سیال غوطه‌ور است، در سرعت‌های زاویه‌ای پایین تشکیل شده است. با افزایش سرعت زاویه‌ای استوانه، فیلم سیال ناپایدار شده، یکنواختی خود را از دست می‌دهد و در یک سرعت زاویه‌ای بحرانی (ω_c) حلقه‌هایی از سیال حول استوانه تشکیل می‌شوند. مشاهدات نشان می‌دهد که تعداد و ضخامت این حلقه‌ها به سرعت زاویه‌ای استوانه بستگی دارد، به طوری که با افزایش سرعت زاویه‌ای استوانه تعداد حلقه‌ها افزایش یافته و پهنای آنها کاهش می‌یابد. برای تحلیل تئوری این مسئله اثر نیروهای مهم را در نظر گرفته، بزرگی آنها را با هم مقایسه می‌کنیم. سپس با استفاده از روش مقیاس‌بندی، رابطه‌ای برای پهنای حلقه‌ها بدست آورده، درستی این رابطه را با داده‌ها و نتایج تجربی بدست آمده از آزمایش، تحقیق می‌کنیم.

فهرست

۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

پیشگفتار

بررسی رفتار و حرکت سیالات که هدف اصلی دینامیک سیالات است، همواره برای دانشمندان حائز اهمیت بوده است. سیالات به دلیل آن که نمی‌توانند تنش برشی را که بر آنها اعمال می‌شود، تحمل کنند، جاری می‌شوند و با توجه به این که در چه سیستمی قرار دارند و چه نیروهایی از طرف سیستم بر آنها وارد می‌شود، شکل‌گیری‌ها و طرح‌های مختلفی از خود نشان می‌دهند. این شکل‌گیری‌ها ممکن است، پایدار و یا ناپایدار باشند که در مسائل مربوط به ناپایداری سیالات مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در ناپایدارهای مربوط به سیالات معمولاً دو یا چند نیرو وجود دارند که با هم رقابت می‌کنند، با مقایسه‌ی بزرگی این نیروها می‌توان معیار و آستانه‌ای برای شروع ناپایداری یافت[۱۱]. انواع مختلف ناپایداری در سیالات وجود دارد، مانند ناپایداری ریلی — تیلور، ناپایداری تیلور— کوئت و ناپایداری پرینتر.

در ناپایداری پرینتر معمولاً یک یا دو استوانه‌ی افقی چرخان در تماس با سیال وشکسان است. چرخش استوانه باعث ناپایداری سیال و ایجاد طرح‌های مختلفی از سیال در سیستم می‌شود. به علت آن که در ماشین‌های چاپ نیز سیال در تماس با استوانه‌ی چرخان است، ناپایداری سیال در سیستم‌هایی که شامل استوانه‌ی چرخان هستند، به عنوان ناپایداری پرینتر معرفی می‌شوند. در فصل دوم دو نمونه از سیستم‌هایی را که به عنوان ناپایداری پرینتر معرفی شده‌اند، بیان می‌کنیم.

سیستم مورد آزمایش ما شامل یک استوانه‌ی افقی چرخان است که در ارتفاع اندک و مشخصی از یک سیال وشکسان قرار گرفته است. در سرعت‌های زاویه‌ای کم فیلم نازک و یکنواختی از سیال در سطح خارجی استوانه تشکیل می‌شود. با افزایش سرعت زاویه‌ای استوانه فیلم سیال ناپایدار شده، یکنواختی خود را از دست می‌دهد و در یک سرعت زاویه‌ای بحرانی (ω_c) حلقه‌هایی از سیال حول استوانه تشکیل می‌شوند، در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود، سیستم ناپایدار شده است.

برای تحلیل تئوری رفتار یک فیلم نازک سیال حول استوانه‌ی افقی چرخان، اثر نیروهای مهم در این مسئله را در نظر گرفته، بزرگی آنها را با هم مقایسه می‌کنیم. سپس با استفاده از روش مقیاس‌بندی، رابطه‌ای برای پهنای حلقه‌ها بدست آورده، درستی این رابطه را با داده‌ها و نتایج تجربی بدست آمده از آزمایش، تحقیق می‌کنیم.

از مهم‌ترین انگیزه‌های مطالعه رفتار فیلم نازک سیال در سطح خارجی استوانه‌ی افقی می‌توان به دلایل زیر اشاره کرد.

۱) در ماشین‌هایی که برای ساخت کاغذ به کار می‌رود، غلتک‌هایی وجود دارند که در تماس با خمیر کاغذ هستند و سرعت چرخش آنها بر خمیر کاغذ تأثیر می‌گذارد.

۲) در صنعت نساجی برای رنگ کردن پارچه‌ها و یا صفحات پلاستیکی از غلتک‌های رنگ استفاده می‌شود. اگر سرعت زاویه‌ای غلتک رنگ خیلی کم باشد، رنگ به پایین جاری خواهد شد و اگر غلتک با سرعت زاویه‌ای زیاد بچرخد، رنگ به بیرون پرت خواهد شد.

۳) میله‌های چرخان که در موتور ماشین‌ها بکار می‌روند، به لایه‌ای از سیال برای روغنکاری که به آنها روان کننده گفته می‌شود، نیاز دارند. ضخامت این لایه‌ی روان کننده می‌تواند تحت تأثیر سرعت چرخش میله قرار گیرد.

۴) این مسئله همچنین کابردهایی که در صنعت شیشه‌سازی، شکلات سازی و صنایع بهداشتی دارد [۲۰].

فصل اول

مروری بر مفاهیم اولیه‌ی سیالات

۱.۱ مقدمه

سیالات [۱] کاربردهای فراوانی در زندگی روزمره دارند، بنابراین بررسی رفتار و حرکت سیالات که هدف اصلی دینامیک سیالات [۲] است، برای دانشمندان حائز اهمیت است. تفاوت اصلی سیالات با جامدات در این است که جامد تحت تنش‌های برشی متحمل تغییر شکل‌های برگشت‌پذیر می‌شود. ولی سیال نمی‌تواند تنش برشی را که بر آن اعمال می‌شود، تحمل کند و در پاسخ به این تنش برشی جاری می‌شود. مقاومت سیال را در برابر جاری شدن با وشکسانی [۳] مشخص می‌کنند. سیالاتی که وشکسانی زیادی دارند مانند عسل و قیر به سختی جاری می‌شوند[۱].

در مطالعه‌ی سیالات مقیاس زمانی که سیال مورد بررسی قرار می‌گیرد، خیلی مهم است. یک سیال ممکن است در یک مقیاس زمانی که مورد مطالعه قرار می‌گیرد، مانند جامد عمل کند و در مقیاس زمانی دیگر مانند سیال

[۱] Fluids
[۲] Fluid Dynamics
[۳] Viscosity

رفتار کرده، جاری شود. برای هر سیال یک زمان واهلش[۴] (τ) تعریف می‌شود که رفتار جامدگونه[۵] و مایع‌گونه‌ی[۶] سیال را از هم جدا می‌کند. برای مثال اگر به سیال در زمانی کمتر از زمان واهلش تنش اعمال شود مانند جامد رفتار می کند و اگر زمان اعمال تنش بیشتر از τ باشد مانند مایع جاری می‌شود. معمولاً زمان واهلش برای مواد از 10^{-12} تا 10^{-10} ثانیه تغییر می‌کند.

سیالات به دو نوع سیال نیوتنی[۷] و سیال غیرنیوتنی[۸] تقسیم بندی می‌شوند. تشخیص سیال نیوتنی از سیال غیرنیوتنی با اندازه‌گیری وشکسانی حین شارش و رئومتری امکان‌پذیر است[۱,۲].

۲.۱ دینامیک سیالات

یکی از راههای توصیف حرکت یک سیال این است که آن را به عنصرهای حجمی بینهایت کوچک تقسیم می‌کنند. این عنصر، ذره‌ی سیال[۹] نامیده می‌شود که شامل تعداد زیادی مولکول است و اندازه‌ی آن در مقایسه با اندازه‌ی کل سیستم بسیار کوچک است ($l \ll a \ll L$)، در اینجا a, L و l به ترتیب بیانگر اندازه‌ی سیستم، اندازه‌ی ذره‌ی سیال و اندازه‌ی یک مولکول سیال است[۲].

برای بررسی حرکت سیال دو دیدگاه لاگرانژی و اویلری وجود دارد. در دیدگاه لاگرانژی به هر ذره‌ی سیال مختصات (x, y, z) را نسبت داده و آنها را به صورت توابعی از زمان مشخص می‌کنند. مختصات (x, y, z) مربوط به لحظه‌ی t ذره‌ای که در t_0 در (x_0, y_0, z_0) بوده است، می‌توان توسط تابع‌های $x(x_0, y_0, z_0, t_0, t), y(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ و $z(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ که سیال را توصیف می‌کنند، تعیین کرد. در دیدگاه اویلری به چگونگی گذشته‌ی هر ذره‌ی سیال توجهی نمی‌شود، در عوض چگالی و سرعت لحظه‌ای سیال را در هر نقطه از فضا مشخص می‌کنند. در واقع حرکت سیال را با مشخص کردن چگالی $\rho(x, y, z, t)$ و سرعت $u(x, y, z, t)$ در نقطه‌ی (x, y, z) و در لحظه‌ی t بیان می‌کنند و توجه خود را به این معطوف می‌کنند که در یک

---

[۴] Relaxation Time

[۵] Solid-Like Behaviour

[۶] Liqud-Like Behaviour

[۷] Newtonian Fluid

[۸] non-Newtonian Fluid

[۹] Element of Fluid

لحظه‌ی معین، در نقطه‌ی خاصی از فضا چه اتفاق می‌افتد[۳].

اکنون با استفاده از روش لاگرانژی مشتق زمانی سرعت، یعنی شتاب یک ذره‌ی سیال را محاسبه می‌کنیم. یک ذره‌ی سیال را در زمان t در مکان $M(r_۱)$ که دارای سرعت $u(r_۱,t)$ است در نظر می‌گیریم. بعد از گذشت زمان (δt)، ذره در مکان $r_۲ = u(r_۱,t)\delta t + O(\delta t^۲)$ و در زمان $t' = t + \delta t$ واقع است و دارای سرعت $u(r_۲,t')$ می‌باشد. تغییر سرعت در این ذره‌ی سیال (δu)، هم تغییرات ناشی از زمان و هم تغییرات ناشی از مکان ذره‌ی سیال را در بر دارد:

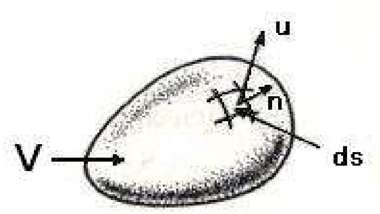
$$\delta u = u(r_۲,t') - u(r_۱,t) = \frac{\partial u}{\partial t}\delta t + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z. \qquad (۱)$$

با توجه به این که $(\lim\limits_{\delta t\to ۰} \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{du}{dt})$ و $(\lim\limits_{\delta t\to ۰} \frac{\delta x}{\delta t} = u_x)$، شتاب ذره‌ی سیال (du/dt) به صورت زیر به حساب می‌شود[۲] :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_x\frac{\partial u}{\partial x} + u_y\frac{\partial u}{\partial y} + u_z\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u. \qquad (۲)$$

۳.۱ قانون بقای جرم در سیالات

یک حجم دلخواه V که توسط سطح s محصور شده است، مطابق شکل (۱−۱) در نظر بگیرید.



شکل۱−۱: شکل ساده‌ای برای بدست آوردن بقای جرم[۴].

سیال می‌تواند در هر لحظه از زمان در این حجم داخل و یا از آن خارج شود. قانون بقای جرم بیان می‌کند که

تغییرات زمانی جرم در حجم مساوی است با منهای شار عبوری از سطح s.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_s \rho u.nds \tag{۳}$$

در اینجا ρ چگالی سیال، u سرعت سیال ورودی یا خروجی و $\hat{n}$ بردار یکه‌ی عمود بر عنصر سطح سیال است که جهت آن به سمت بیرون می‌باشد.

به علت ثابت بودن حجم می‌توان مشتق زمانی را داخل انتگرال برد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho dV \tag{۴}$$

با استفاده از قضیه‌ی گاوس[۱۰]، رابطه‌ی (۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_V (\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla.\rho u)dV = 0 \tag{۵}$$

با توجه به این که حجم دلخواهی از فضا در نظر گرفته شده بود، انتگرالگیری معادله بالا، نتیجه خواهد داد:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla.(\rho u) = 0 \tag{۶}$$

با توجه به اینکه $\nabla.(\rho u) = \rho\nabla.u + u.\nabla\rho$ و $\frac{d}{dt}O = \frac{\partial O}{\partial t} + (u.\nabla)O$ خواهیم داشت:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla.(u) = 0 \tag{۷}$$

معادله‌ی بالا شکل دیفرانسیلی قانون بقای جرم را نشان می‌دهد [۲,۴].

۴.۱ تانسور تنش

در مکانیک تنش به عنوان نیرو در واحد سطح تعریف می‌شود و با $[\sigma]$ نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ی این تنش‌های وارد بر سطح را با تانسور تنش[۱۱] بیان می‌کنند. $[\sigma]$ تانسوری از مرتبه‌ی ۲ است و با ماتریس ۳×۳

[۱۰] Gauss Theorem

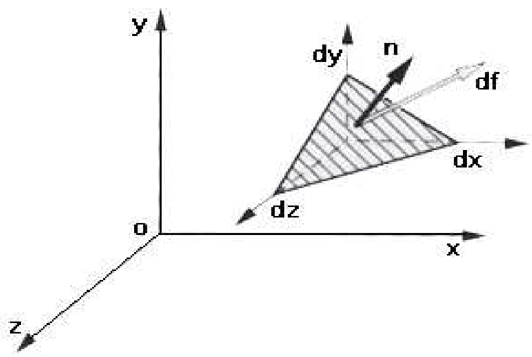
[۱۱] Sterss Tensor

نوشته می‌شود. تانسور تنش دارای ۹ مؤلفه‌ی σ_{ij} می باشد. $\sigma_{ij}(i=۱,۲,۳ j=۱,۲,۳)$ نسبت نیرو را بر واحد سطح، وقتی که نیرو در جهت $\hat{i}$ و عمود بر سطح در جهت $\hat{j}$ است، نشان می دهد. زمانی که $(i=j)$ است، نیروها عمود بر سطح هستند و مؤلفه‌های تنش، تنش عمودی[۱۲] نامیده می‌شوند و زمانی که $(i \neq j)$ است، نیروها مماس بر سطح هستند و مؤلفه‌های تنش، تنش برشی[۱۳] نامیده می‌شوند. در سیال ساکن نیروهای وارد بر یک عنصر سطح سیال، عمود بر سطح است و برای تعیین آن در هر نقطه، کافی است فشار هیدروستاتیک[۱۴] را تعیین کنیم.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \tag{۸}$$

وقتی سیال حرکت می‌کند، به خاطر وجود نیروهای اصطکاکی بین لایه‌های سیال که روی هم می‌لغزند، تنش‌های برشی روی عنصر سطح ظاهر می‌شوند.

اکنون می‌خواهیم (σ_n) وارد بر سطح ds با بردار دلخواه n، را تعیین کنیم. مطابق شکل (۱—۲) سطح دلخواهی از سیال را در نظر گرفته، نیروهایی را که از طرف سیال بر سطح وارد می شود، می‌نویسیم.



شکل ۱—۲: محاسبه‌ی تنش وارد بر سطوح با مساحت ds و بردار یکه‌ی عمود بر سطوح n در راستای دلخواه. نیروی df که بر ds اثر می کند، لزوماً موازی با بردار عمودی n نیست[۲].

$$dF_x = \sigma_{xn} ds \qquad dF_y = \sigma_{yn} ds \qquad dF_z = \sigma_{zn} ds \tag{۹}$$

[۱۲] Normal Stress

[۱۳] Shear Sterss

[۱۴] Hydrostatics Pressure

برای تعیین (σ_{xy})، تعادل نیروهایی را که بر هرم وارد می‌شوند، در نظر می‌گیریم. در راستای x، نیروهای عمود در راستای x،y و z به ترتیب مساوی با $(-\sigma_{xx})n_x ds$، $(-\sigma_{xy})n_y ds$ و $(-\sigma_{xz})n_z ds$ می‌باشند. بنابراین مؤلفه‌ی x تمام تنش‌های وارد بر هرم $(\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z)ds$ است. طبق قانون دوم نیوتن رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$ds(\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z) = \rho dv \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{10}$$

اگر سایز سیستم را L باشد، عنصرسطحی ds و عنصر حجمی dv به ترتیب متناسب با L^2 و L^3 خواهند بود. با توجه به این که سایز سیستم را دلخواه در نظر گرفتیم، می‌توانیم آن را به صفر میل دهیم. زمانی که سایز سیستم به صفر میل می‌کند، طرف راست معادله سریعتر از طرف چپ کوچک شده، صفر می‌شود. بنابراین داریم:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z \tag{11}$$

با تکرار این مراحل به طریق مشابه رابطه‌ی (σ_{yn}) و (σ_{yn}) را نیز به دست می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xn} \\ \sigma_{yn} \\ \sigma_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{12}$$

طبق رابطه‌ی بالا $(\sigma_{in} = \sigma_{ij}n_j)$ است. اگر سهم نیروهای همگن را از تانسور تنش $[\sigma]$ کم کنیم، خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij} \tag{13}$$

σ'_{ij} تانسور تنش وشکسان[۱۵] است که ناشی از حرکت سیال می‌باشد و p فشار هیدروستاتیک را نشان می‌دهد[۲].

۵.۱ وشکسانی

وشکسانی، مقاومت یک سیال در برابر اعمال تنش برشی است. در یک سیال در حال حرکت که لایه‌های مختلف آن نسبت به هم جابه‌جا می شوند، مقدار مقاومت لایه‌ها در برابر لغزش روی هم را وشکسانی سیال نشان

[۱۵] Viscous Sterss Tensor

می‌دهد. عامل اصلی وشکسانی، نیروی جاذبه‌ی مولکولی بین ذرات جسم است که مانع حرکت آزاد ذرات می‌شود. به همین دلیل است که هر گاه مایعی را حرارت دهیم، فاصله‌ی مولکول‌های آن زیادتر شده و جاذبه‌ی مولکولی کم می‌شود، در نتیجه وشکسانی آن کاهش می‌یابد. اما در گازها فاصله‌ی مولکول‌ها از هم زیاد است، بنابراین جاذبه‌ی مولکولی در وشکسانی نقشی ندارد. عاملی که در مقابل حرکت سیال مقاومت می‌کند، برخورد مولکول‌های گاز با یکدیگر است. بدین ترتیب، وقتی که دمای گاز افزایش یابد، سرعت مولکول‌های آن زیادتر شده، میزان برخورد آن‌ها با یکدیگر زیادتر می‌شود و این باعث افزایش وشکسانی می‌گردد[۱].

۶.۱ سیال نیوتنی

با اعمال یک تنش ثابت بر یک مایع، کرنش[۱۶] وابسته به زمان را در آن مشاهده خواهیم کرد. اگر نرخ کرنش برای یک تنش ثابت، مقدار ثابتی داشته باشد، سیال نیوتنی است. در واقع به سیالاتی که در آنها تنش برشی با نرخ کرنش رابطه‌ی خطی دارد، سیال نیوتنی می گویند، مانند آب، عسل و اغلب گازها. ثابت تناسب بین تنش برشی و نرخ کرنش را وشکسانی دینامیکی می گویند و با (η) نشان می دهند[۲,۵]. اگر σ_{ij} بیانگر نیرو بر واحد سطح و $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ بیانگر نرخ کرنش باشد، داریم:

$$\sigma_{ij} = \eta(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \qquad (۱۴)$$

e_{ij} یک تانسور متقارن است که در آن u معرف سرعت سیال می‌باشد. رابطه‌ی (۱۴)، رابطه‌ی حاکم بر سیالات نیوتنی را نشان می‌دهد[۲].

۷.۱ سیال تراکم‌ناپذیر

سیال تراکم‌ناپذیر[۱۷]:

سیالی است که چگالی آن با زمان تغییر نمی‌کند ($\frac{d\rho}{dt} = ۰$). طبق قانون بقای جرم در سیالات، شرط

---

[۱۶] Strain

[۱۷] Incompressible Fluid

تراکم‌ناپذیری برای یک سیال $(\nabla.u) = \circ$ است. u سرعت سیال را نشان می‌دهد[۲].

$$\frac{d\rho}{dt} + (\nabla.u)\rho = \circ \Longrightarrow \nabla.u = \circ \qquad (۱۵)$$

سیال ایده آل:

سیالی است تراکم‌ناپذیر که دارای وشکسانی صفر است. یعنی دو شرط $(\nabla.u) = \circ$ و $(\eta = \circ)$ در آن حاکم است[۲].

۸.۱ معادله‌ی ناویر– استوکس

یکی از معادلات مهم در مکانیک سیالات معادله‌ی ناویر– استوکس[۱۸] $(N.S)$ است. برای بدست آوردن این معادله قانون دوم نیوتن را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dt}P = [\int\int\int \rho u d\tau] = \int\int\int \rho f_v d\tau + \int\int [\sigma].nd\Sigma \qquad (۱۶)$$

در این رابطه، $d\tau$ حجم دیفرانسیلی مربوط به مقدار کوچکی از ماده ، $d\Sigma$ عنصر سطح بسته‌ی s ، که توسط حجم v محصور شده است و f_v بیانگر نیروی حجمی در واحد سطح ، مانند نیروی گرانش می‌باشند. $[\sigma]$ تانسور تنش می‌باشد که روی $d\tau$ با بردار عمود بر سطح $\hat{n}$، اثر می‌کند و مساوی است با $(\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij})$. در رابطه‌ی فوق $(\sigma'_{ij} = ۲\eta(e_{ij} - \frac{۱}{۳}\delta_{ij}e_{ll} + \xi(\delta_{ij}e_{ll}))$ می‌باشد. همچنین ξ رابطه‌ی تغییر تنش با تغییر حجم را نشان می‌دهد که وشکسانی حجمی نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن این تعاریف داریم:

$$\nabla.[\sigma] = \eta\nabla^۲ u + \nabla(\nabla.u)(\xi + \frac{۱}{۳}\eta) - \nabla p \qquad (۱۷)$$

با انتخاب دستگاه مختصاتی که همراه سیال حرکت کند، جرم مقدار کوچکی از سیال $(\rho d\tau)$ همواره ثابت است و می‌توان $\frac{d}{dt}$ را داخل انتگرال برد و انتگرال‌گیری کرد. با توجه به این که مشتق کامل زمانی برای یک سیال به صورت $\frac{d}{dt}O = \frac{\partial O}{\partial t} + (u.\nabla)O$ می باشد، معادله‌ی (۱۶) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u.\nabla)u = \rho f_v + \eta\nabla^۲ u + \nabla(\nabla.u)(\xi + \frac{۱}{۳}\eta) - \nabla p \qquad (۱۸)$$

[۱۸] Navier-Stokes Equation

این معادله زمانی که شرط تراکم‌ناپذیری ($\nabla.u = 0$) برقرار باشد، به معادله‌ی ناویر– استوکس تبدیل می‌شود. معادله‌ی ناویر– استوکس، معادله‌ی حاکم بر سیال وشکسان تراکم‌ناپذیر بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u.\nabla)u = \rho f_v + \eta\nabla^2 u - \nabla p \tag{19}$$

دو جمله‌ی سمت چپ معادله جملات مربوط به لختی سیستم است. جمله‌ی اول سمت راست معادله (ρf_v) نیروی حجمی، جمله‌ی دوم($\eta\nabla^2 u$) نیروی وشکسان و جمله‌ی سوم (∇p) نیروی ناشی از فشار است. در حالت پایا $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ است. برای سیال ایده‌آل این معادله به معادله‌ی اویلر تبدیل می‌شود:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u.\nabla)u = \rho f_v - \nabla p \tag{20}$$

با بی‌بعد کردن معادله‌ی ناویر– استوکس، عدد بی‌بعدی که به عدد رینولدز[19] معروف است، بدست می آید. L، V و $\frac{L}{V}$ را به ترتیب به عنوان طول، سرعت و زمان مشخصه‌ی سیستم در نظر گرفته، پارامترهای بی‌بعد زیر را بدست می آوریم:

$$x' = \frac{x}{L}, \qquad p' = \frac{p}{\rho V^2}, \qquad t' = \frac{t}{\frac{L}{V}}, \qquad u' = \frac{u}{V}. \tag{21}$$

با جایگذاری این پارامترهای بی‌بعد در معادله‌ی (20)، معادله‌ی بی‌بعد شده‌ی ناویر–استوکس به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u'.\nabla')u' = \frac{1}{Re}\nabla'^2 u' - \nabla' p' \tag{22}$$

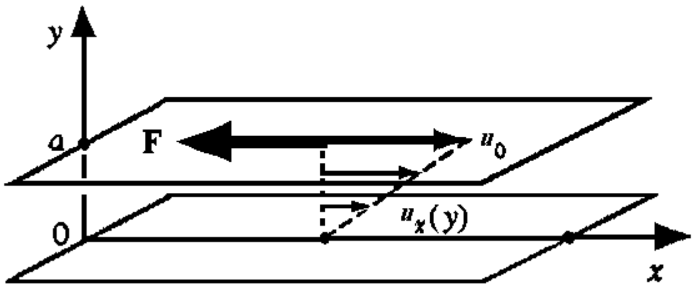
این معادله برای همه‌ی سیستم‌ها یکسان بوده و اثرات سرعت، چگالی و اندازه‌ی سیستم در عدد رینولدز نهفته است. عدد رینولدز عدد بی‌بعدی است که نسبت بزرگی نیروهای لختی به نیروهای وشکسان را نشان می‌دهد.

$$Re = \frac{\rho(u.\nabla)u}{\eta\nabla^2 u} = \frac{\rho V\frac{1}{L}V}{\eta\frac{1}{L^2 V}} = \frac{\rho V L}{\eta} \tag{23}$$

[19] Reynolds Number

زمانی که $Re \gg 1$ (عدد رینولدزبالا [20]) است، معادله‌ی ناویر– استوکس، یک معادله‌ی غیر خطی برحسب سرعت می‌باشد و زمانی که $Re \ll 1$ (عدد رینولدزپایین [21]) است، می توان از جمله‌ی لختی که غیر خطی است، صرفنظر کرد. بنابراین معادله‌ی ناویر– استوکس به معادله‌ی خطی استوکس تبدیل می‌شود.

در مثال زیر با استفاده از حل معادله‌ی ناویر– استوکس مفهوم ماکروسکوپی وشکسانی یک سیال را شرح می‌دهیم. دو صفحه‌ی موازی که به فاصله‌ی a از هم قرار دارند (مطابق شکل (۱–۳))، در نظر بگیرید.



شکل۱–۳: هندسه‌ی ساده‌ی مربوط به جریان برشی [۲].

بین این دو صفحه توسط سیال پر شده است. صفحه‌ی بالایی با سرعت ثابت u_o حرکت می‌کند و صفحه‌ی پایینی ثابت است. نیروی ناشی از تنش برشی که بر صفحه‌ی بالایی وارد می‌شود برابر $(F = \sigma_{ij} A)$ است. در اینجا A مساحت صفحات و σ_{ij} تنش برشی است. اکنون با استفاده از معادله‌ی ناویر – استوکس و شرایط مرزی $u_i(y = a) = u_o, u_i(y = 0) = 0$ پروفایل سرعت را بدست آورده، مسئله را در شرایط پایا$(\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0)$ حل می‌کنیم. چون گرادیان فشار در راستای محور x وجود ندارد، جمله‌ی مربوط به آن $(\eta \nabla P)$ صفر است. اگر ما سرعت را فقط در راستای $\hat{i}$ در نظر گرفته، از تغییرات ناچیز سرعت در راستای $\hat{j}$ صرفنظر کنیم، جمله‌ی لختی $(\nabla . u).u$ نیز صفر می‌شود. بنابراین داریم:

$$\nabla^2 u_i = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow u_i = \frac{u_\circ}{a} y \qquad (24)$$

بنابراین نیروی وارد بر صفحه بالایی برابر خواهد بود با:

$$F = \eta \frac{u_\circ}{a} A \qquad (25)$$

[20] High Reynolds Number

[21] Low Reynolds Number