بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

برآوردیابی بیزی محدود شده تحت توابع زیان مجموع مربعات خطا و متعادل

نگارش: شهرام عزیزی سازی

استاد راهنما: دکتر احمد پارسیان

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در
آمار ریاضی

دی ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و آنانکه می اندیشند تا بیهوده نمانند

چکیده

در این پایان نامه دسته جدیدی از برآوردگرها به نام برآوردگر بیزی محدود شده را معرفی می کنیم که تابع مخاطره پسین را با توجه به محدودیت های لویس و تحت تابع زیان مشخصی مینیمم می کند. سپس برآوردگر بیزی محدود شده بردار پارامتر نامعلوم $\boldsymbol{\theta}$ تحت توابع زیان مجموع مربعات خطای (موزون) و متعادل (موزون) بدست آورده و نشان می دهیم که چگونه می توان برآوردگر بیزی محدود شده تحت تابع زیان متعادل (موزون) را از روی برآوردگر بیزی محدود شده تحت تابع زیان مجموع مربعات خطای (موزون) بدست آورد.

با در نظر گرفتن زیر خانواده توزیع های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم، برآوردگر بیزی تجربی محدود شده و بیزی سلسله مراتبی محدود شده را محاسبه می کنیم. در ادامه توابع زیان مجموع مربعات خطای (موزون) و متعادل (موزون) را در نظر گرفته و تحت آنها برآوردگر تاسف پسین محدود شده گاما– مینیمکس بردار پارامتر نامعلوم $\boldsymbol{\theta}$ را بدست می آوریم. بسط مجانبی تابع مخاطره بیزی برآوردگرهای بیزی محدود شده، بیزی تجربی و بیزی تجربی محدود شده را مورد مطالعه قرار می دهیم. در نهایت بر اساس مدل سلسله مراتبی، پیش بینی کننده بیزی محدود شده متوسط حقوق و درآمد کارکنان نواحی صنعتی را محاسبه کرده و نتایج شبیه سازی مربوط به مخاطره بیزی برآوردگرهای بیزی محدود شده، بیزی تجربی و بیزی تجربی محدود شده تحت تابع زیان متعادل را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی : بسط مجانبی تابع مخاطره بیزی، برآوردگر بیزی محدود شده، برآوردگر بیزی

تجربی محدود شده، برآوردگر بیزی سلسله مراتبی محدود شده، برآوردگر تاسف پسین محدود شده گاما– مینیمکس، تابع زیان مجموع مربعات خطا، تابع زیان متعادل، تاسف پسین، پیش بینی کننده بیزی محدود شده، محدودیت های لویس

قدردانی

با سپاس و ستایش از خداوند یکتا، تشکر حقیقی را سزاوار اساتیدی می‌دانم که زندگی علمی خود را مدیون آنها هستم. بنابراین نگارنده این تحقیق، بر خود لازم می داند از زحمات بی دریغ استاد راهنمای گرانقدرش جناب استاد دکتر احمد پارسیان که با رهنمودهای عالمانه و لطف صبورانه اینجانب را مورد محبت قرار داده و از هیچ کوششی در هر چه بهتر شدن این تحقیق دریغ نکردند، تقدیر و تشکر کند. همچنین از اساتید ارجمند دکتر عباس گرامی و دکتر فرزاد اسکندری که زحمت داوری پایان نامه را قبول کردند و دکتر سلیمانی دامنه که از راهنمایی‌های ارزشمند ایشان استفاده کردم تشکر ویژه ای دارم. در پایان از آقایان سید امیر ملک پور نرگسی و عبدالله بیاتی اشکفتکی و بقیه دوستانم کمال تشکر را دارم.

شهرام عزیزی سازی

دی ماه ۱۳۸۷

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه و کلیات

در این پایان نامه بعضی از مفاهیم و روشهای آماری درزمینه نظریه تصمیم استفاده شده است. برای جلوگیری از هر گونه ابهام محتمل در کاربرد این مفاهیم و روشها، دراین فصل مرور مختصری به آنهاخواهیم داشت. برای این منظور در بخش اول، ضمن ارائه مقدمه‌ای درباره نظریه تصمیم، اجزای اصلی تشکیل دهنده یک مسئله تصمیم را معرفی می‌کنیم و به دنبال آن توابع زیان را بیان می‌کنیم. در بخش دوم، روش پیدا کردن قاعده تصمیم بیزی را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم، خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری و همچنین خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس به فرم درجه دوم را معرفی کرده و برخی از خصوصیات این توزیع‌ها را بیان می‌کنیم. در ادامه این بخش قضیه‌هایی در ارتباط با این خانواده از توزیع ها ارائه می‌شود. در بخش چهارم، نحوه شکل گیری برآوردگر بیزی محدود شده را بیان می کنیم و در بخش پنجم این فصل، برآوردگر تاسف پسین محدود شده گاما—مینیمکس را تشریح و در بخش پایانی، فصول بعدی پایان نامه را به اختصار بیان می کنیم.

۱.۱ آشنایی با نظریه تصمیم

در این بخش تلاش می کنیم مطالبی از نظریه تصمیم را که در فصول پایان نامه به آنها نیاز داریم، بیان کنیم. بدین منظور، ابتدا اجزای اصلی تشکیل دهنده یک مسئله تصمیم را معرفی می کنیم و سپس قاعده های تصمیم و تابع مخاطره را تعریف کرده وخلاصه ای از مسائل مربوط به برآوردیابی از دید نظریه تصمیم را ارائه می دهیم.

۱.۱.۱ اجزای اصلی یک مسئله تصمیم

نظریه تصمیم همان طور که از نام آن مشخص است، مباحثی در مورد تصمیم گیری است. در واقع نظریه تصمیم یک چهارچوب مشخصی از مسائل استنباطی است که در آن تمام اجزای فرایند تصمیم گیری رسما تعریف شده‌اند. تمام شکل های استنباط آماری مانند برآورد نقطه ای، برآورد فاصله ای و آزمون فرض، یک نوع تصمیم گیری هستند و اغلب برای تصمیم گیری به کار می روند. در نظریه تصمیم، هدف استفاده از نمونه های آماری و در نظر گرفتن جنبه های دیگری از قبیل سود، زیان و ...است. تا به «بهترین» تصمیم دست پیدا کنیم. در فرمول بندی نظریه تصمیم تمام مولفه‌ها باید تعریف شده باشند.

اجزای یک مسئله تصمیم عبارتند از:

- داده: یافته یک بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ با فضای نمونه‌ای $\mathcal{X}$ توصیف می شود.

- حالت طبیعت : پارامتر واقعی و نامعلوم θ که می خواهیم در مورد آن استنباط انجام دهیم، حالت طبیعت گویند.

- فضای پارامتر یا حالات طبیعت: مجموعه تمام مقادیر ممکن θ را فضای پارامتر گویند و با نمادΘ نمایش می دهند.

- مدل : مدل عبارت است از مجموعه $\mathcal{F}_\theta = \{f(x|\theta) : \theta \in \Theta\}$ از توزیع های احتمال ممکن برای متغیر تصادفی X که به پارامتر θ وابسته است و در آن $f(x|\theta)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X نسبت به اندازه $\sigma-$متناهی μ_x (در اینجا اندازه لبگ) است.

- فضای عمل : مجموعه کلیه عمل های ممکن برای پارامتر نامعلوم θ را فضای عمل گویند و اغلب با نماد $\mathcal{A}$ نمایش می دهند. فضای عمل معین می کند که مسئله تصمیم مورد بررسی، یک مسئله برآورد نقطه ای، برآورد فاصله ای یا آزمون فرض است.

- قاعده تصمیم : شیوه به کار بردن داده ها به عنوان کمکی در تصمیم گیری شامل یک قاعده یا مجموعه ای از دستورات خواهد بود. در واقع یک قاعده تصمیم تعیین می کند که با مشاهده $x \in \mathcal{X}$ ، چه عمل $a \in \mathcal{A}$ بایستی انتخاب شود و معمولا آن را با نماد $\delta(x)$ نشان می دهند. به عبارت دیگر، قاعده تصمیم تابعی از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{A}$ است.

- تابع زیان : اگر $\theta \in \Theta$ حالت واقعی طبیعت باشد. در این صورت عمل a ممکن است درست یا تا اندازه‌ای نادرست و یا کلا نادرست باشد. بنابراین میزان نادرستی را با تابع زیان $L(\theta, a)$ اندازه گیری می کنند که نمایانگر مقدار زیان به کار بردن عمل a زمانی که θ مقدار واقعی حالت طبیعت باشد را نشان می دهد. تابع زیان، تابعی از$\mathcal{A} \times \Theta$ به R^+ است.

- تابع مخاطره: در مسئله برآورد پارامتر θ بر اساس برآوردگر $\delta(X)$ و زیان حاصل از برآورد برابر است با: $L(\theta, \delta(X))$، که خود یک متغیر تصادفی است. عموما در آمار متوسط این زیان مورد نظر است که از آن تحت عنوان تابع مخاطره یاد می کنیم و آن را با $R(\theta, \delta) = E[L(\theta, \delta(X))]$

نشان می دهیم. در حقیقت میزان دقت (یا عدم دقت) تابع تصمیم به وسیله تابع مخاطره اندازه گیری می شود. مجموعه تمام قواعد ممکن δ را که در آن برای هر $\theta \in \Theta$ ، $R(\theta,\delta) < \infty$ با $\mathcal{D}$ نمایش می دهیم.

در تابع مخاطره، توابع زیان معمولی به گونه ای هستند که تنها دقت برآوردیابی در برآورد پارامتر θ را در نظر می گیرند، مانند تابع مخاطره ناشی از تابع زیان مربع خطا که به صورت $E_\theta(L(\theta,\delta(X))) = E_\theta(\theta-\delta(X))^2$ است.

به طور خلاصه اجزای اصلی یک مسئله تصمیم بدون داده عبارتند از مجموعه $\mathcal{A}$ از عمل های موجود a، مجموعه Θ از حالات طبیعت θ و تابع زیان $L(\theta,a)$ که مقدار آن وقتی θ حالت واقعی طبیعت باشد، زیان ناشی از انجام عمل a است. یک مسئله تصمیم بدون داده را با سه تایی $(\Theta,\mathcal{A},L)$ نشان می دهند. همچنین اجزای اصلی یک مسئله تصمیم با داده عبارتند از مجموعه $\mathcal{D}$ از قواعد تصمیم دلخواه δ، مجموعه Θ از حالات طبیعت θ و تابع مخاطره R است. یک مسئله تصمیم با داده را با سه تایی $(\Theta,\mathcal{D},\mathcal{R})$ نشان می‌دهیم.

۲.۱.۱ توابع زیان

در مسئله تصمیم، تابع زیان این حقیقت را بیان می کند که هر چه عمل a به مقدار واقعی پارامتر نزدیک تر باشد، زیان کمتری متحمل می شویم و هر چه عمل a از مقدار واقعی پارامتر دور تر باشد زیان بیشتری متوجه ما خواهد بود.

با توجه به آنچه که در فصل های آینده بیان خواهد شد در اینجا چند تابع زیان متداول را معرفی می کنیم، که در فصل‌های آینده از آنها استفاده خواهیم کرد.

- تابع زیان مجموع مربعات خطا: در صورتی که فضای عمل و فضای پارامتر m بعدی باشد تابع زیان مجموع مربعات خطا به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{m} (\theta_i - a_i)^2 \tag{1.1.1}$$

- تابع زیان مجموع مربعات خطای موزون : در صورتی که فضای عمل و فضای پارامتر m بعدی باشد تابع زیان مجموع مربعات خطای موزون به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{m} w_i(\boldsymbol{\theta})(\theta_i - a_i)^2 \tag{2.1.1}$$

که در آن $w_i(\boldsymbol{\theta})$، $i = 1, ..., m$، وزن متناظر با پارامتر θ_i و تابعی معلوم و مثبت از $\boldsymbol{\theta}$ است.
در حالت خاص، برای $m = 1$، توابع زیان (۱.۱.۱) و (۲.۱.۱) به ترتیب همان تابع زیان مربع خطا و تابع زیان مربع خطای موزون است.

- توابع زیان متعادل و متعادل موزون:

زلنر[1] (۱۹۹۴) تابع زیان جدیدی به نام تابع زیان متعادل معرفی کرد. این تابع زیان به گونه‌ای طراحی شده است که تابع مخاطره ناشی از آن به طور هم زمان دو معیار نیکویی برازش و دقت برآوردیابی در برآورد پارامتر θ را در نظر می گیرد. در حالی که در بیشتر تحلیل های آماری تابع مخاطره ناشی از تابع زیان مورد استفاده تنها یکی از دو معیار مذکور را در نظر می گیرد. برای مثال در مسئله برآوردیابی به روش کمترین مربعات خطا مسئله نیکویی برازش مورد توجه است. حال آن که دراستفاده از تابع زیان مربع خطا توجه به دقت برآوردگر داریم.

---

[1] $Zellner$

فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_۱, ..., X_n) \sim \mathcal{F}_\theta$ نمونه تصادفی به اندازه n از مدل احتمال $\mathcal{F}_\theta$ باشد زلنر تابع زیان متعادل را به صورت زیر معرفی کرد:

$$L^z(\theta, t) = w\sum_{i=۱}^{n}(X_i - t)^۲ + (۱ - w)(t - \theta)^۲$$

که در آن $w \in [۰, ۱)$ مقداری معلوم و $t = t(X)$ برآوردگر پارامتر θ است.

در حالت کلی تری، جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰٦) تابع زیان متعادل زیر را که تعمیمی کلی از تابع زیان متعادل معرفی شده توسط زلنراست، ارائه کردند:

$$L_{w,\delta_۰}(\theta, t) = w(\delta_۰ - t) + (۱ - w)(t - \theta)$$

که در آن $\delta_۰$ برآورد هدف است.

حال اگر $\boldsymbol{X} = (X_۱, ..., X_m)$، که در آن هر یک از X_i ها متوسط نمونه تصادفی به اندازه n از مدل احتمال $\mathcal{F}_{\theta i}$ است و $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, ..., \theta_m)$ بردار پارامتر متناظر با میانگین $\boldsymbol{X}$ باشد. در این صورت برآوردیابی در حالت چند متغیره انجام می شود. جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰٦) تابع زیان متعادل موزون زیر را در حالت چند متغیره معرفی و برآوردیابی بیزی را تحت این تابع زیان انجام دادند.

$$L^q_{w,\delta_۰}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{t}) = wq(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=۱}^{m}(\delta_{۰i} - t_i)^۲ + (۱ - w)q(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=۱}^{m}(t_i - \theta_i)^۲$$

که در آن $q(\boldsymbol{\theta})$ تابع وزن مناسب و مثبت است و $\delta_۰ \equiv \delta_۰(x) = (\delta_{۰۱}, ..., \delta_{۰m})$ برآورد هدف متناظر با $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, ..., \theta_m)$ است.

در فصل سوم، به منظور برآوردیابی بیزی محدود شده $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, ..., \theta_m)$، تابع زیان متعادل زیر

را در نظر می گیریم:

$$L_{۱}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t})=\frac{۱}{m}\sum_{i=۱}^{m}\{w(\delta_{\circ i}-t_i)^{۲}+(۱-w)(t_i-\theta_i)^{۲}\} \qquad (۳.۱.۱)$$

حال اگر وزن متناسب با هر یک از پارامتر ها برابر نباشد تابع زیان متعادل موزون را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$L_{۲}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t})=\frac{۱}{\sum_{j=۱}^{m}N_j}\sum_{i=۱}^{m}N_i\{w(\delta_{\circ i}-t_i)^{۲}+(۱-w)(t_i-\theta_i)^{۲}\} \qquad (۴.۱.۱)$$

که در آن N_i وزن متناسب با θ_i، به ازای $i=۱,...,m$ است.

۲.۱ تصمیم های بیزی

در روش های بیزی، θ به عنوان مقدار مشاهده شده متغیری تصادفی که روی آن توزیع احتمالی تحت عنوان توزیع پیشین بر اساس اطلاعات قبلی، اعتقادات، باورها و تجربیات آزمایشگر فرض می شود. فرض کنید $\pi(\theta)$ تابع چگالی احتمال پیشین θ نسبت به اندازه $\sigma-$متناهی ν در فضای پارامتری Θ باشد. در این حالت تابع مخاطره $R(\theta,\delta)$ یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی آن تحت توزیع پیشین $\pi(\theta)$ را مخاطره بیزی نامیده و با $r(\pi,\delta)=E(R(\theta,\delta))$ نشان می دهیم. همچنین قاعده بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi(\theta)$ یک قاعده تصمیم $\delta^B(x)$ است که مخاطره بیزی را در بین تمام قواعد تصمیم ممکن، مینیمم می کند. یعنی قاعده بیزی، قاعده تصمیمی است که $r(\pi,\delta^B)=\inf_{\delta\in\mathcal{D}}r(\pi,\delta)$

۱.۲.۱ راه حل بیزی

دی [۲] و همکاران (۱۹۹۹) مسئله برآوردیابی تحت تابع زیان خطای متعادل را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که چگونه می توان خاصیت بیزی بودن برآوردگر تحت تابع زیان مربع خطای متعادل ($w > 0$) را به کمک بیزی بودن تابعی از آن تحت تابع زیان مربع خطا ($w = 0$) نتیجه گرفت. جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۶) نتایج فوق را به δ_0 دلخواه و همچنین تابع زیان مربع خطای متعادل موزون تعمیم دادند. در واقع نتایج آنها نشان می دهد که یک تناظر یک به یک بین رده برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان متعادل (موزون) و تابع زیان مربع خطا(موزون) وجود دارد. قضیه زیر که توسط جعفری جوزانی و همکاران (۲۰۰۶) ارائه شده است، نشان می دهد که چگونه می توان برآوردگر بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان متعادل (۳.۱.۱) را بر حسب برآوردگر بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا(۱.۱.۱) به دست آورد.

قضیه **۱.۲.۱** برآوردگر بیزی $e^B(\boldsymbol{X})$ برای پارامتر$\boldsymbol{\theta}$ تحت تابع زیان متعادل (۳.۱.۱) نسبت به توزیع پیشین $\pi(\theta)$، معادل است با راه حل بیزی $e^{B^*}(\boldsymbol{X})$ برای $\boldsymbol{\theta}$ نسبت به «توزیع پسین» $\pi^*(\theta|x)$ تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا (۱.۱.۱)، که در آن برای هر $x \in \mathcal{X}$،

$$\pi^*(\theta|x) = wI_{\delta_0(x)}(\theta) + (1 - w)\pi(\theta|x)$$

یعنی $\pi^*(\theta|x)$ آمیخته ای از جرم نقطه ای در$\delta_0(x)$ و توزیع پسین $\pi(\theta|x)$ است.

---
[۲] Dey

۳.۱ خانواده توزیع های نمایی تک پارامتری

فرض کنید X_i میانگین نمونه ای به حجم n از خانواده توزیع های نمایی تک پارامتری با میانگین $\theta_i = \psi'(\phi_i)$ باشد که تابع چگالی آن به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x_i|\phi_i) \propto exp[n(\phi_i x_i - \psi(\phi_i))], \qquad i = 1, ..., m \qquad (۵.۳.۱)$$

که در آن $\psi(.)$ دو بار مشتق پذیر است.

توزیع پیشین زیر را در نظر بگیرید.

$$\pi_\mu(\theta_i) = exp[\mu\nu(\phi_i(\theta_i)) - \nu\psi(\phi_i(\theta_i))]V^{-1}(\theta_i), \qquad i = 1, ..., m \qquad (۶.۳.۱)$$

که در آن $V(\theta_i) = \psi''(\phi_i)$ و ν مقداری ثابت و μ پارامتر توزیع پیشین θ_i است. آنگاه توزیع پسین به شکل زیر حاصل می شود.

$$\pi(\theta_i|x_i, \mu) \propto exp[(n+\nu)\{x_\circ\phi_i(\theta_i) - \psi(\phi_i(\theta_i))\}]V^{-1}(\theta_i), \qquad i = 1, ..., m \quad (۷.۳.۱)$$

که در آن، $x_\circ = \frac{nx_i + \mu\nu}{n+\nu}$.

موریس[۳] ($۱۹۸۳a$) چند قضیه در ارتباط با خانواده توزیع های نمایی تک پارامتری بیان کرد که در دستیابی به میانگین و واریانس توزیع پسین سودمند هستند. این قضایا به صورت زیر می باشند.

قضیه ۱.۳.۱ اگر $V(\theta)$، تابعی درجه دوم از θ باشد. آنگاه، تابع چگالی (۵.۳.۱) به فرم خانواده تابع چگالی های پیرسن است.

---

[۳] $Morris$

قضیه ۲.۳.۱ فرض کنید $h(\theta)$ تابعی پیوسته و مشتق پذیر با مشتق $h'(\theta)$ بروی بازه $\Omega = (a,b)$ باشد. اگر θ دارای تابع چگالی (۶.۳.۱) و $E(h(\theta)(\theta-\mu))$ موجود باشد و نقاط a وb که معمولا نامتناهی هستند به گونه‌ای باشد که $\lim_{\theta\to a or b} h(\theta)(\theta-\mu)=0$. آنگاه،

$$E[h(\theta)(\theta-\mu)] = \frac{1}{\nu}E[h'(\theta)V(\theta)] \qquad (۸.۳.۱)$$

قابل ذکر است که به منظور محاسبه میانگین پسین θ، $h(\theta)=1$ و در نتیجه $h'(\theta)=0$ مورد نظر است.

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنید $M_r^* = E[(\theta - x_0)^r|\boldsymbol{X}]$ $r-$امین گشتاور مرکزی توزیع پسین باشد و تابع چگالی X به شرط ϕ به فرم چگالی (۵.۳.۱) و θ دارای توزیع پیشین (۶.۳.۱) باشد. آنگاه، $M_0^* = 1$، $M_1^* = 0$ و $M_2^* = V(\theta|\boldsymbol{X}) = (1-B)E[\frac{V(\theta)}{n}|\boldsymbol{X}]$ که در آن، $V(\theta) = V(\boldsymbol{X}|\phi) = \psi''(\phi)$. حال براساس آنچه که بیان شد به محاسبه میانگین و واریانس توزیع پسین θ_i می پردازیم.

الف) میانگین توزیع پسین θ_i

با به کارگیری قضیه (۲.۳.۱) و استفاده از توزیع پسین (۷.۳.۱) و جایگذاری $h(\theta_i)=1$، میانگین پسین θ_i به صورت زیر حاصل می شود:

$$E(\theta_i - x_0|\boldsymbol{X}) = 0$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} E(\psi'(\phi_i)|\boldsymbol{X}) &= x_0 \\ &= \frac{nX_i+\mu\nu}{n+\nu} \\ &= (1-B)X_i + B\mu \qquad i=1,...,m \qquad (۹.۳.۱) \end{aligned}$$

که در آن ، $B=\frac{\nu}{n+\nu}$.

عبارت داده شده در (۹.۳.۱)، برآوردگر بیزی پارامتر θ_i تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا نیز است.