دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

حلقه‌های شبه آرمنداریز ضعیف

استاد راهنما

دکتر محمدجواد نیک‌مهر

استاد مشاور

دکتر شعبان قلندرزاده

پژوهشگر

میلاد حکیمی قلعه صفا

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: حکیمی قلعه صفا　　　نام: میلاد

عنوان: حلقه‌های شبه آرمنداریز ضعیف

استاد راهنما: دکتر محمدجواد نیک‌مهر

استاد مشاور: دکتر شعبان قلندرزاده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　رشته: ریاضی محض　　　گرایش: جبر

دانشگاه: خواجه نصیر الدین طوسی　　　دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۱　　　تعداد صفحات: ۱۰۰

واژگان کلیدی: حلقه آرمنداریز، حلقه کاهشی، حلقه α-صلب، حلقه شبه آرمنداریز ضعیف، مدول آرمنداریز

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا مفهوم حلقه‌های آرمنداریز را معرفی می کنیم. سپس به بررسی چند کلاس از حلقه‌ها که تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز و شبه آرمنداریز هستند می پردازیم. نشان می دهیم حلقه R، α-صلب است اگروتنهااگر برای هر $a \in R$ و عدد صحیح مثبت n، $\alpha^n(a)a = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$ اگروتنهااگر $R[x;\alpha]$ کاهشی اگروتنهااگر α یک به یک، R کاهشی و α-آرمنداریز کج اگروتنهااگر R کاهشی و α-آرمنداریز اگروتنهااگر $T(R,R)$، $\overline{\alpha}$-آرمنداریز کج اگروتنهااگر برای $n \geq ۲$، $V_n(R)$، α-آرمنداریز کج اگروتنهااگر $R[x]/(x^n)$، α-آرمنداریز کج باشد. هم‌چنین نشان داده شده است اگر R حلقه نیم‌اول باشد آن‌گاه برای $n \geq ۲$ ، $S_n(R)$ و $V_n(R)$ شبه آرمنداریز ضعیف هستند. در نهایت مدول‌های آرمنداریز و شبه آرمنداریز را معرفی می کنیم و نشان می دهیم اگر α یک درون‌ریختی از حلقه R و برای عدد صحیح مثبت l، $\alpha^l = I_R$ باشد. در این‌صورت M، α-کاهشی است اگروتنهااگر برای $n \geq ۲$، $M[x]/M[x](x^n)$ روی حلقه $R[x]/(x^n)$، α-آرمنداریز کج (α-نیم‌جابه‌جایی) باشد.

تقدیم به

روح بزرگوار پدرم

و قلب مهربان مادرم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن‌چنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آن‌که دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر نیک‌مهر، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر قلندرزاده که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

هم‌چنین از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر موسوی و دکتر عقیق که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند تشکر و قدردانی می‌کنم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسش را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

میلاد حکیمی قلعه صفا

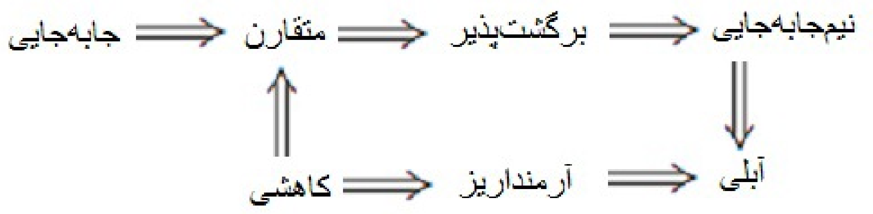
شهریور ۱۳۹۱

مقدمه

در این پایان‌نامه حلقه R شرکت‌پذیر و یکدار در نظر گرفته می شود. مطالبی که در این پایان‌نامه مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد برگرفته از مراجع [۱]، [۴]، [۵]، [۱۴]، [۱۷] و [۳۱] می باشد. مفهوم حلقه‌های آرمنداریز ابتدا توسط رگ و چاوچاریا [۲] در سال ۱۹۹۷ در مرجع [۲۸] معرفی شده و سپس توسط نویسنده‌های دیگر مورد مطالعه قرار گرفته است. رگ و چاوچاریا حلقه‌های آرمنداریز را به صورت زیر معرفی کردند.
حلقه R را آرمنداریز گویند هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ در $R[x]$ داشته باشیم $f(x)g(x) = 0$ آن‌گاه برای هر i, j بتوان نتیجه گرفت $a_i b_j = 0$. در سال ۱۹۷۴ آرمنداریز[۳] در [۳] ثابت کرده بود حلقه‌های کاهشی (حلقه‌های بدون عناصر پوچ‌توان ناصفر) ویژگی تعریف شده حلقه‌های رگ و چاوچاریا را دارند به همین دلیل رگ و چاوچاریا نام آرمنداریز را روی این حلقه‌ها قرار دادند. این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول مفاهیم اولیه مورد نیاز و تعاریف جدیدی که در این پایان‌نامه استفاده می شود را ارائه می دهیم، سپس ارتباط بین حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های وابسته به آن را در قالب یک گزاره بیان می کنیم. هم‌چنین خلاصه‌ای از فصل اول را می توانید در دیاگرام صفحه بعد ببینید. در فصل دوم حلقه‌های α-آرمنداریز و α-آرمنداریز کج که تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز است را معرفی کرده و نشان می دهیم هر حلقه α-آرمنداریز، α-آرمنداریز کج است. با مثالی نشان می دهیم عکس مطلب فوق در حالت کلی درست نیست و به سؤالی که هانگ [۴] و همکارانش در سال ۲۰۰۳ در [۱۴] مطرح کردند پاسخ می دهیم. در بخش دیگری از فصل دوم ارتباط بین حلقه‌های α-نیم‌جابه‌جایی و α-آرمنداریز کج را بیان می کنیم. در فصل سوم به بحث اصلی این پایان‌نامه بررسی حلقه‌های شبه آرمنداریز ضعیف که در سال ۲۰۱۱ توسط بشر [۵] و همکارانش در [۴] معرفی شد می پردازیم. حلقه‌های شبه آرمنداریز ضعیف تعمیمی از حلقه‌های شبه آرمنداریز و آرمنداریز ضعیف که به ترتیب توسط هیرانو [۶] در [۱۳] و لی و ونگ [۷] در [۲۴] معرفی شده‌اند. در بخش اول این فصل مشخصه‌هایی از حلقه‌های شبه آرمنداریز ضعیف را بیان می کنیم. در بخش دوم فصل سوم حلقه‌های α-شبه آرمنداریز و α-شبه

[۲] Rege and Chhawchharia
[۳] Armendariz
[۴] Hong
[۵] Baser
[۶] Hirano
[۷] Lee and Wong

آرمنداریز کج که تعمیمی از حلقه‌های شبه آرمنداریز هستند معرفی می شوند. در این فصل دنبال شرایطی هستیم تا نشان دهیم حلقه‌های α-آرمنداریز، α-آرمنداریز کج، α-شبه آرمنداریز، α-شبه آرمنداریز کج معادلند. در فصل چهارم ابتدا مدول‌های آبلی، آرمنداریز، کاهشی، نیم‌جابه‌جایی و متقارن را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های این نوع مدول‌ها را بیان می کنیم. در پایان این بخش ارتباط بین این نوع مدول‌ها را در قالب یک گزاره بیان می کنیم. در بخش دوم این فصل مدول‌های شبه آرمنداریز را بر اساس حلقه‌های شبه آرمنداریز تعریف می کنیم و چند خصوصیت از آنها را بیان می کنیم. در پایان این فصل مدول‌های α-آرمنداریز کج و α-شبه آرمنداریز کج را معرفی کرده و به بیان چند خصوصیت از این نوع مدول‌ها می پردازیم.



دیاگرام فصل اول

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به مطالعه حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های وابسته به آن می پردازیم و مقدمات لازم برای تعاریف و قضایای اساسی و کلیدی این پایان‌نامه را فراهم می کنیم. در این پایان‌نامه حلقه R را شرکت پذیر و یکدار در نظر می گیریم.

۱.۱ حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های وابسته به آن

با توجه به این مطلب که اساس کار حلقه‌های آرمنداریز بر پایه حلقه چندجمله‌ای‌ها است، لذا ابتدا حلقه چندجمله‌ای‌ها را یادآوری می کنیم.
یک چند جمله‌ای بر حسب متغیر (مجهول) x روی حلقه R عبارتی به صورت جمع صوری زیر تعریف می شود $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ که در آن $n\geq 0$ و a_i، $0\leq i\leq n$، عناصری از R موسوم به ضرایب $f(x)$ می باشند. مجموعه همه چند جمله‌ای‌ها روی R را با $R[x]$ نشان می دهیم، به عبارت دیگر

$$R[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, a_i\in R\}.$$

اگر $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ نیز یک چندجمله‌ای از متغیر x روی R باشد، آن‌گاه گوییم $f(x)=g(x)$ اگر ضرایب آنها نظیر به نظیر مساوی باشند. جمع وضرب چندجمله‌ای‌ها مطابق قوانین معمولی به صورت زیر تعریف می شوند:
اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای ذکرشده در بالا باشند، آن‌گاه

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots$$

$$f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots=\textstyle\sum_{k=1}^{n+m}c_kx^k.$$

که $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$. از این تعاریف می توان استفاده کرد و نشان داد $R[x]$ یک حلقه است که جابه‌جایی و یکدار بودن آن مشروط به جابه‌جایی و یکدار بودن R است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R و S دو حلقه باشند تابع $f : R \longrightarrow S$ را یک همریختی [1] نامند هرگاه برای هر $x, y \in R$،

(۱) $f(x+y) = f(x) + f(y)$؛

(۲) $f(xy) = f(x)f(y)$.

همریختی f را برووریختی [2] نامند هرگاه f پوشا باشد.

همریختی f را تکریختی [3] نامند هرگاه f یک‌به‌یک باشد.

همریختی f را یکریختی [4] نامند هرگاه f یک‌به‌یک و پوشا باشد.

همریختی f را درون‌ریختی [5] نامند هرگاه $R = S$.

همریختی f را خودریختی [6] نامند هرگاه $R = S$ و f یکریختی باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید α یک درون‌ریختی از حلقه R باشد. در این‌صورت حلقه چندجمله‌ای‌های کج [7] R که با $R[x;\alpha]$ نمایش داده می شود شامل چندجمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $(a_i \in R, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ که جمع آن معمولی و ضرب آن برای هر $a \in R$ به صورت $xa = \alpha(a)x$ است. لذا حاصل‌ضرب هر دو عضو دلخواه از $R[x;\alpha]$ به صورت زیر تعریف می شود

$$(\sum_i a_i x^i)(\sum_j b_j x^j) = \sum_{i,j} a_i \alpha^i(b_j) x^{i+j} = \sum_k (\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j)) x^k.$$

واضح است اگر $\alpha = I_R$ که در آن I_R درون‌ریختی همانی [8] از حلقه R است، آن‌گاه $R[x;\alpha] = R[x]$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید α یک درون‌ریختی از حلقه R باشد. در این‌صورت نگاشت $\delta : R \longrightarrow R$ را یک α-مشتق [9] نامند هر گاه برای هر $a, b \in R$،

(۱) δ یک نگاشت جمعی باشد؛

(۲) $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

[1] homomorphism
[2] epimorphism
[3] monomorphism
[4] isomorphism
[5] endomorphism
[6] automorphism
[7] skew polynomial
[8] identity
[9] derivation

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید α یک درون‌ریختی از حلقه R و δ یک α-مشتق باشد. در این‌صورت توسیع اور [۱۰] حلقه R که با $R[x;\alpha,\delta]$ نمایش داده می شود شامل چندجمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $(a_i \in R, n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ که جمع آن معمولی و ضرب آن $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$ می باشد. واضح است اگر $\delta = 0$ و $\alpha = I_R$، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta] = R[x]$.

فرض کنید R یک حلقه و M یک (R,R)-دو مدول [۱۱] باشد. در این‌صورت توسیع بدیهی [۱۲] حلقه R به‌وسیله M را به صورت $T(R,M) = R \oplus M = \{(a,x) \mid a \in R, x \in M\}$ نمایش می دهند و این مجموعه با عمل جمع معمولی و عمل ضرب $(a_1,x_1)(a_2,x_2) = (a_1a_2, a_1x_2 + x_1a_2)$ برای هر $a_1, a_2 \in R$ و $x_1, x_2 \in M$ یک حلقه می باشد. این حلقه با حلقه ماتریس‌های $\left\{\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R, x \in M\right\}$ با توجه به ضابطه $(a,x) \longrightarrow \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix}$ یکریخت است.

فرض کنید $M_n(R)$ حلقه ماتریس‌های $n \times n$ و α یک درون‌ریختی از حلقه R باشد. در این‌صورت نگاشت $\overline{\alpha} : M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$ با ضابطه $\overline{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$ درون‌ریختی از حلقه $M_n(R)$ است.

لم ۵.۱.۱. *فرض کنید α یک درون‌ریختی از حلقه R باشد. در این صورت شرایط زیر برقرارند:*

(۱) $M_n(R[x;\alpha]) \cong M_n(R)[x;\overline{\alpha}]$؛

(۲) $M_n(R[x]) \cong M_n(R)[x]$

برهان. (۱) تابع

$$\varphi : M_n(R[x;\alpha]) \longrightarrow M_n(R)[x;\overline{\alpha}]$$

با ضابطه زیر در نظر بگیرید

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_{ij}^{(k)} x^k\right) \longrightarrow \sum_{k=0}^{m} (a_{ij}^{(k)}) x^k.$$

واضح است که φ دو سویی و حافظ جمع و ضرب است.

(۲) با قراردادن $\alpha = I_R$ در (۱) نتیجه حاصل است. ■

تعریف ۶.۱.۱. اگر R یک حلقه و X یک زیرمجموعه غیر تهی از آن باشد، آن‌گاه

$$r_R(X) = \{a \in R \mid Xa = 0\},\ l_R(X) = \{a \in R \mid aX = 0\}$$

را به ترتیب پوچساز راست[۱۳] و پوچساز چپ [۱۴] X در R می گویند.

[۱۰] extension Ore
[۱۱] bimodule
[۱۲] trivial extension
[۱۳] right annihilator
[۱۴] left annihilator

تعریف ۷.۱.۱. عنصر a از حلقه R را یک مقسوم علیه صفر راست [۱۵] R نامند هرگاه عنصر ناصفری مانند c عضو R موجود باشد به طوری‌که $ca = ۰$. به طور مشابه می توان مقسوم علیه صفر چپ را تعریف کرد. عنصر a از حلقه R را مقسوم علیه صفر نامند هرگاه a یا مقسوم علیه صفر راست یا مقسوم علیه صفر چپ باشد.

تعریف ۸.۱.۱. عنصر a از حلقه R را منظم [۱۶] نامند هرگاه عنصر a مقسوم علیه صفر نباشد یا به طور معادل برای هر عنصر a از حلقه R، $r_R(a) = ۰$ و $l_R(a) = ۰$.

در گزاره بعد قضیه باقیمانده چینی [۱۷] را بیان می کنیم که در مثال ۱۵.۱.۱ از آن استفاده می کنیم.

گزاره ۹.۱.۱. (قضیه باقی‌مانده چینی) *فرض کنید $I_۱, \dots, I_n$ ایده‌آل‌هایی در حلقه R باشند به طوری‌که به ازای هر $i \neq j$، $I_i + I_j = R$. در این‌صورت*

(۱) $R/\bigcap_{i=۱}^{n} I_i \cong R/I_۱ \oplus R/I_۲ \oplus \cdots \oplus R/I_n$؛

(۲) *اگر R جابه‌جایی باشد، آن‌گاه* $\bigcap_{i=۱}^{n} I_i = \prod_{i=۱}^{n} I_i$.

برهان. گزاره ۱۲.۲.۱ از [۳۳] را ببینید. ■

تعریف ۱۰.۱.۱. حلقه R را یک حلقه کاهشی [۱۸] نامند هر گاه حلقه R عنصر ناصفر پوچ‌توان [۱۹] نداشته باشد.

لم ۱۱.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:*

(۱) *R دارای عنصر پوچ‌توان ناصفر نیست؛*

(۲) *برای هر $a \in R$، اگر $a^۲ = ۰$، آن‌گاه $a = ۰$.*

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید $a \in R$ و $a^۲ = ۰$. اگر $a \neq ۰$، آن‌گاه a عنصر پوچ‌توان ناصفری در R است که یک تناقض است. بنابراین $a = ۰$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید $a \in R$ به گونه‌ای باشد که به ازای عدد صحیح مثبت nای، $a^n = ۰$ و $n \neq ۰$، کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $a^n = ۰$. همچنین فرض کنید n زوج باشد یعنی به ازای عدد صحیح مثبت mای، $n = ۲m$. در این‌صورت $(a^m)^۲ = a^{۲m} = ۰$ و لذا $a^m = ۰$ که در تناقض با انتخاب n است. حال فرض کنید $n = ۲m + ۱$. در این‌صورت $m + ۱ < n$. بنابراین $a^{۲m+۲} = a^{۲m+۱}a = a^n a = ۰$. این ایجاب می کند که $a^{m+۱} = ۰$ که مجدداً در تناقض با انتخاب n می باشد. از این رو R دارای هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نیست. ■

[۱۵] right zero devisor
[۱۶] regular
[۱۷] chinese remainder theorem
[۱۸] reduced
[۱۹] nilpotent

ملاحظه ۱.۱.۱۲. *با توجه به لم ۱.۱.۱۱ حلقه R کاهشی است اگروتنهااگر برای هر $a \in R$، اگر $a^۲ = ۰$ آن‌گاه $a = ۰$. در ادامه این پایان‌نامه از تعریف معادل برای حلقه کاهشی R استفاده می کنیم.*

تعریف ۱.۱.۱۳. حلقه R را یک حلقه آرمندآریز [۲۰] نامند هر گاه برای هر دو چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{m} b_j x^j$ در $R[x]$ اگر $f(x)g(x) = ۰$، آن‌گاه برای هر i, j، $a_i b_j = ۰$. (عکس این مطلب به وضوح برقرار است.)

در زیر حکمی که آرمندآریز در [۳] ثابت کرد را می آوریم.

گزاره ۱.۱.۱۴. *هر حلقه کاهشی، آرمندآریز است.*

برهان. فرض کنید $f(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{m} b_j x^j$ چندجمله‌ای‌هایی در $R[x]$ باشند به طوری‌که $f(x)g(x) = ۰$. در این‌صورت داریم

$$a_۰ b_۰ = ۰; \tag{۱.۱}$$

$$a_۰ b_۱ + a_۱ b_۰ = ۰; \tag{۲.۱}$$

$$a_۰ b_۲ + a_۱ b_۱ + a_۲ b_۰ = ۰; \tag{۳.۱}$$

$$\vdots$$

$$a_n b_m = ۰. \tag{۴.۱}$$

چون R کاهشی است $a_۰ b_۰ = ۰$ اگروتنهااگر $b_۰ a_۰ = ۰$. باید نشان دهیم $a_i b_j = ۰$. برای این منظور معادله (۲.۱) را از چپ در $b_۰$ ضرب می کنیم. در این‌صورت داریم :

$$b_۰ a_۰ b_۱ + b_۰ a_۱ b_۰ = ۰ \Rightarrow b_۰ a_۱ b_۰ = ۰ \Rightarrow (a_۱ b_۰)^۲ = ۰.$$

از طرفی با توجه به فرض حلقه R کاهشی است لذا $a_۱ b_۰ = ۰$. حال با توجه به معادله (۲.۱) داریم $a_۰ b_۱ = ۰$. حال معادله (۳.۱) را از راست در $a_۰$ ضرب می کنیم. در این‌صورت داریم:

$$a_۰ b_۲ a_۰ + a_۱ b_۱ a_۰ + a_۲ b_۰ a_۰ = ۰ \Rightarrow a_۰ b_۲ a_۰ = ۰ \Rightarrow a_۰ b_۲ = ۰.$$

و به طور مشابه اگر معادله (۳.۱) را از چپ در $b_۰$ ضرب کنیم آن‌گاه نتیجه می گیریم $a_۲ b_۰ = ۰$. حال با توجه به معادله (۳.۱) داریم $a_۱ b_۱ = ۰$. با ادامه این روند حاصل ضرب تمام ضرایب صفر می شود، بنابراین R آرمندآریز است. ■

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس گزاره ۱.۱.۱۴ در حالت کلی بر قرار نمی باشد.

[۲۰] Armendariz

مثال ۱۵.۱.۱. برای هر عدد صحیح n، $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,(\cong \mathbb{Z}_n)$ یک حلقه آرمنداریز است و نشان می دهیم حلقه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ کاهشی است اگروتنهااگر n یک عدد صحیح آزاد مربعی [۲۱] باشد. ابتدا $n = p^m$ را در نظر می گیریم، که p یک عدد اول است. فرض کنید $\overline{f(x)} = f(x) + p^m\mathbb{Z}[x]$ و $\overline{g(x)} = g(x) + p^m\mathbb{Z}[x]$ عناصری از $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}[x]$ باشند به طوری‌که $\overline{f(x)}\,\overline{g(x)} = \bar{۰}$. در نتیجه داریم:

$$(f(x) + p^m\mathbb{Z}[x])(g(x) + p^m\mathbb{Z}[x]) = f(x)g(x) + p^m\mathbb{Z}[x] = p^m\mathbb{Z}[x].$$

لذا $f(x)g(x) \in p^m\mathbb{Z}[x]$ یعنی $p^m | f(x)g(x)$. چون p یک عدد اول است بنابراین $f(x) = p^r f'(x)$ و $g(x) = p^s g'(x)$ برای $f'(x)$ و $g'(x)$ که در این شرط صدق می کند و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ضرایب آنها بر p بخش‌پذیر نیست. به وضوح $r + s \geq m$. بنابراین داریم :

$$\overline{f(x)} = \sum_{i=۰}^{n}(p^r a'_i + p^m)x^i = \sum_{i=۰}^{n}\overline{a}_i x^i,\ \overline{g(x)} = \sum_{j=۰}^{m}(p^s b'_j + p^m)x^j = \sum_{j=۰}^{m}\overline{b}_j x^j.$$

در نتیجه

$$\overline{a}_i\overline{b}_j = (p^r a'_i + p^m)(p^s b'_j + p^m) = p^{r+s}a'_i b'_j + p^m = ۰ + p^m = \bar{۰}.$$

یعنی برای هر i, j، $\overline{a_i}\overline{b_j} = \bar{۰}$. که این نشان می دهد $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ آرمنداریز است.

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. در این‌صورت $n = p_۱^{e_۱}p_۲^{e_۲}\cdots p_i^{e_i}$ که p_kها اول می باشند. لذا بنابر قضیه باقی‌مانده چینی داریم:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_۱^{e_۱}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_۲^{e_۲}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$$

چون هر $\mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z}$ یک حلقه آرمنداریز است، نتیجه می شود که $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ یک حلقه آرمنداریز است.

حال فرض کنید که n عدد صحیح آزاد مربعی است، یعنی $n = p_۱p_۲\cdots p_k$، که در آن برای هر i، p_i اعداد اول متمایز و $\overline{a} = a + n\mathbb{Z}$ عنصر پوچ‌توان ناصفر در $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ باشد. در این‌صورت به ازای عدد صحیح m، $\overline{a}^m = \bar{۰}$. از این‌رو n عدد a^m و لذا $p_۱p_۲\cdots p_k$ عدد a^m را عاد می کند. لذا به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $p_i | a^m$. چون p_i ها اول هستند لذا به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $p_i | a$. بنابراین $p_۱p_۲\cdots p_k | a$، یعنی $n | a$ و لذا $\overline{a} = \bar{۰}$. در نتیجه حلقه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ کاهشی است.

بالعکس، فرض کنید $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ کاهشی و $n = p_۱^{m_۱}p_۲^{m_۲}\cdots p_k^{m_k}$ که در آن p_i ها اعداد اول متمایز و $m_i \geq ۱$. قرار دهید $m = max\{m_۱, \ldots, m_k\}$. در این‌صورت چون $n | p_۱^m p_۲^m \cdots p_k^m$ لذا $\bar{۰} = \overline{p_۱^m p_۲^m \cdots p_k^m} = \overline{p_۱p_۲\cdots p_k}^m$. از طرفی $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ کاهشی است لذا $\overline{p_۱p_۲\cdots p_k} = \bar{۰}$. بنابراین $n | p_۱p_۲\cdots p_k$ و لذا $p_۱^{m_۱}p_۲^{m_۲}\cdots p_k^{m_k} | p_۱p_۲\cdots p_k$. بنابراین به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $m_i \leqslant ۱$. از این‌رو به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $m_i = ۱$ و لذا n یک عدد صحیح آزاد مربعی است.

[۲۱] square free

گزاره ۱.۱.۱۶. *(۱) زیر حلقه هر حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است.*
(۲) حلقه R کاهشی است اگروتنهااگر حلقه $R[x]$ کاهشی باشد.

برهان. (۱) بدیهی است.
(۲) فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ و $(f(x))^2 = 0$. در این‌صورت چون R کاهشی است، بنابراین آرمنداریز است در نتیجه برای هر $0 \leq i \leq n$، $a_i^2 = 0$. لذا با توجه به کاهشی بودن R برای هر i، داریم $a_i = 0$. پس $f(x) = 0$. در نتیجه $R[x]$ کاهشی است. عکس مطلب واضح است. ■

فرض کنید $M_n(R)$ حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی R و E_{ij} ماتریسی از حلقه $M_n(R)$ که درایه سطر iام و ستون jام آن یک و مابقی صفر باشد. حال مثال‌هایی از حلقه‌هایی ارائه می دهیم که آرمنداریز نمی باشند.

مثال ۱.۱.۱۷. حلقه ماتریس‌های $M_2(R)$ روی هر حلقه یکدار، آرمنداریز نیست. چون برای چندجمله‌ای‌های خطی $f(x) = E_{12}x + E_{11}$ و $g(x) = E_{11}x - E_{21}$ در $M_2(R)[x]$ داریم $f(x)g(x) = 0$ اما $E_{11}E_{11} \neq 0$.

مثال ۱.۱.۱۸. حلقه‌های جابه‌جایی لزوماً آرمنداریز نیستند. زیرا حلقه $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8$ جابه‌جایی است اما آرمنداریز نیست. چون برای چندجمله‌ای خطی $f(x) = (\bar{4}, \bar{0}) + (\bar{4}, \bar{1})x \in (\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8)[x]$ داریم $(f(x))^2 = 0$ اما $(\bar{4}, \bar{1})(\bar{4}, \bar{0}) \neq \bar{0}$.

مثال ۱.۱.۱۹. فرض کنید R یک حلقه باشد. ثابت می کنیم ماتریس‌های بالامثلثی $n \times n$ که با $T_n(R)$ نمایش می دهیم برای $n \geq 2$ روی حلقه R آرمنداریز نیستند. کافی است ثابت کنیم که ماتریس‌های بالامثلثی 2×2 روی حلقه R آرمنداریز نیستند. زیرا زیرحلقه هر حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است. فرض کنید S ماتریس های بالامثلثی 2×2 روی حلقه R باشد و $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ و $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ دو چندجمله‌ای در $S[x]$ باشند. بنابراین $f(x)g(x) = 0$ اما $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. لذا ماتریس‌های بالامثلثی $n \times n$ روی حلقه R آرمنداریز نیست.

در گزاره بعد نشان می دهیم که حلقه R آرمنداریز است اگروتنهااگر $R[x]$ آرمنداریز باشد.

گزاره ۱.۱.۲۰. *حلقه R آرمنداریز است اگروتنهااگر حلقه $R[x]$ آرمنداریز باشد.*

برهان. $(\Rightarrow)$ بدیهی است، چون زیرحلقه هر حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است.
$(\Leftarrow)$ فرض کنید R یک حلقه آرمنداریز و $f(y) = f_0 + f_1 y + \cdots + f_n y^n$ و $g(y) = g_0 + g_1 y + \cdots + g_m y^m$ چندجمله‌ای‌هایی از $R[x][y]$ باشند به طوری‌که $f(y)g(y) = 0$ که $f_i, g_j \in R[x]$. در این‌صورت نشان می دهیم برای هر i, j، $f_i g_j = 0$. قرار دهید $k = deg f_0 + deg f_1 + \cdots + deg f_n + deg g_0 + \cdots + deg g_m$ که deg درجه یک چندجمله‌ای با متغیر x و درجه چندجمله‌ای صفر را صفر در نظر می‌گیریم. هم‌چنین قرار دهید $y = x^k$.

در این‌صورت $f(x^k)=f_0+f_1x^k+\cdots+f_nx^{kn}$ و $g(x^k)=g_0+g_1x^k+\cdots+g_mx^{km}$ عضو $R[x]$ می باشند و مجموعه ضرایب f_iها (g_jها) به ترتیب برابر است با مجموعه ضرایب $f(x^k)$ ($g(x^k)$) است. چون $f(y)g(y)=0$ و x با همه عناصر R جابه‌جا می شود، پس $f(x^k)g(x^k)=0$. چون R یک حلقه آرمنداریز است، لذا برای هر i,j، ضرایب f_i و g_j صفر می شوند یعنی $a_ib_j=0$ و از طرفی ضرایب f_ig_j ترکیب خطی از a_i و b_j هستند در نتیجه برای هر i,j، $f_ig_j=0$. ■

با توجه به گزاره ۲۰.۱.۱ ممکن است حدس بزنید که حلقه چندجمله‌ای‌های کج $R[x;\alpha]$ روی حلقه آرمنداریز R، آرمنداریز است. اما مثال زیر نشان می دهد که حلقه R وجود دارد که آرمنداریز است اما حلقه چندجمله‌ای‌های کج $R[x;\alpha]$ آرمنداریز نیست.

مثال ۲۱.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{Z}_2$ حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۲ و حلقه $R=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ با جمع و ضرب معمولی را در نظر بگیرید. واضح است R جابه‌جایی، کاهشی و با توجه به گزاره ۱۴.۱.۱ آرمنداریز است. هم‌چنین فرض کنید α یک درون‌ریختی از حلقه R با $\alpha((a,b))=(b,a)$ باشد. در این‌صورت نشان می دهیم $R[x;\alpha]$ آرمنداریز نیست. برای این منظور چندجمله‌ای‌های $f(y)=(1,0)+[(1,0)x]y$ و $g(y)=(0,1)+[(1,0)x]y$ در $R[x;\alpha][y]$ در نظر بگیرید. بنابراین $f(y)g(y)=0$ اما $(1,0)[(1,0)x]\neq 0$ که این نشان می دهد $R[x;\alpha]$ آرمنداریز نیست.

لی و ونگ در [۲۴] حلقه‌های آرمنداریز ضعیف که تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز است را به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۲۲.۱.۱. حلقه R را آرمنداریز ضعیف [۲۲] نامند هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f(x)=a_0+a_1x$ و $g(x)=b_0+b_1x$ در $R[x]$ اگر $f(x)g(x)=0$ آن‌گاه برای $i,j=0,1$، $a_ib_j=0$.

واضح است زیر حلقه هر حلقه آرمنداریز ضعیف، آرمنداریز ضعیف است و هر حلقه آرمنداریز، آرمنداریز ضعیف است. اما در مثال زیر نشان می دهیم که حلقه‌های آرمنداریز ضعیف در حالت کلی آرمندایز نیستند.

مثال ۲۳.۱.۱. حلقه $R=\mathbb{Z}_3[x,y]/(x^3,x^2y^2,y^3)$ یک حلقه آرمنداریز ضعیف است اما آرمنداریز نیست. ابتدا نشان می دهیم حلقه مورد نظر آرمنداریز نیست فرض کنید $I=(x^3,x^2y^2,y^3)$ و برای $h(x,y)\in\mathbb{Z}_3[x,y]$، $\overline{h(x,y)}=h(x,y)+I\in R$. واضح است $(\overline{x}+\overline{y}t)^3=0$ زیرا

$$(\overline{x}+\overline{y}t)^3=\overbrace{\overline{x}^3}^{0}+\overbrace{3\overline{x}^2\overline{y}}^{0}t+\overbrace{3\overline{x}\,\overline{y}^2}^{0}t^2+\overbrace{\overline{y}^3}^{0}t^3=0.$$

بنابراین $(\overline{x}+\overline{y}t)(\overline{x}^2+2\overline{x}\,\overline{y}t+\overline{y}^2t^2)=0$ اما $\overline{x}\,\overline{y}^2\neq 0$. لذا R آرمنداریز نیست.

[۲۲] weak Armendariz

اکنون نشان می دهیم که R آرمنداریز ضعیف است. ابتدا یک ایده کلی را به صورت زیر ارائه می دهیم. فرض کنید

$$f = ax + by + \cdots, \quad g = cx^2 + dxy + ey^2 + \cdots \in \mathbb{Z}_3[x, y]. \tag{۵.۱}$$

به طوری‌که هر تک‌جمله‌ای که در f بعد از by قرار می گیرد درجه‌اش بزرگتر یا مساوی دو است و هر تک‌جمله‌ای که در g بعد از ey^2 قرار می گیرد درجه‌اش بزرگتر یا مساوی سه است و $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_3$. همچنین فرض کنید که $fg \in I$. در این‌صورت با انجام محاسبات مستقیم نتایج زیر را داریم:

$$(ax + by + \cdots)(cx^2 + dxy + ey^2 + \cdots) + I = I \Rightarrow (acx^3 + adx^2y + aexy^2 + \cdots)+$$
$$(bcyx^2 + bdxy^2 + bey^3 + \cdots) + I = I \Rightarrow (ad + bc)x^2y + (bd + ae)xy^2 + I = I.$$

لذا داریم :

$$ad + bc = 0; \tag{۶.۱}$$

$$bd + ae = 0. \tag{۷.۱}$$

بنابراین حالات زیر را خواهیم داشت:

(۱) $a = 0 = b$

(۲) $a = 0$ و $b \neq 0$، از معادله (۶.۱) نتیجه می شود $bc = 0$ لذا $c = 0$. همچنین از (۷.۱) نتیجه می شود $bd = 0$ در نتیجه $d = 0$. لذا $(d, c, e) \in (0, 0, e)$.

(۳) $a \neq 0$ و $b = 0$، مشابه (۲) نتیجه می شود $(d, c, e) \in (0, c, 0)$.

(۴) $a \neq 0$ و $b \neq 0$، با ضرب معادله (۶.۱) از طرف چپ در b نتیجه می شود $bad + b^2c = 0$. همچنین با ضرب معادله (۷.۱) از طرف چپ در $-a$ نتیجه می شود $-abd - a^2e = 0$. بنابراین $b^2c = a^2e$. اما $a, b \in \{1, 2\}$ پس $a^2, b^2 \in \{1, -1\}$. لذا نشان دادیم

$$(d, c, e) \in \{(0, c, 0), (0, 0, e), (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}. \tag{۸.۱}$$

حال فرض کنید در $R[t]$، $(\overline{f}_0 + \overline{f}_1t)(\overline{g}_0 + \overline{g}_1t) = 0$ که $f_0, g_0, f_1, g_1 \in \mathbb{Z}_3[x, y]\backslash I$. در این‌صورت داریم:

$$f_0g_0 \in I, \ f_1g_1 \in I, \ f_0g_1 + f_1g_0 \in I. \tag{۹.۱}$$

چون $I \subseteq (x, y)$ و (x, y) ایده‌آل ماکسیمال $\mathbb{Z}_3[x, y]$ می باشد. از (۹.۱) و $I = (x^3, x^2y^2, y^3)$ نتیجه می شود که هر دو زوج f_0, g_0 و f_1, g_1 به صورت ارائه شده در (۵.۱) می باشد. اگر هر تک‌جمله‌ای که در f_0, g_0, f_1, g_1

انتخاب می کنیم از درجه بزرگتر از دو باشد آن‌گاه $f_0g_1 + f_1g_0 \in I$ لذا در این مورد حکم ثابت می شود. در غیر این صورت بنابر (۱.۸)، (f_0, g_0) و (f_1, g_1) باید به صورت یکی از زوج‌های زیر باشد:

$$(y+\cdots, y^2+\cdots),\ (x-y+\cdots, x^2+xy+y^2+\cdots),$$
$$(x+\cdots, x^2+\cdots),\ (x+y+\cdots, x^2-xy+y^2+\cdots)$$

که درجه عباراتی که در f بعد از by و همچنین در g بعد از ey^2 قرار می گیرند در بالا معرفی شد. لذا به آسانی دیده می شود که $f_0g_1 + f_1g_0 \notin I$. این یک تناقض است و این اثبات را کامل می کند.

در [۱۳] هیرانو حلقه‌های شبه آرمنداریز که تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز است را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۱.۲۴. حلقه R را شبه آرمنداریز [۲۳] نامند هرگاه برای هر دو چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$ در $R[x]$ اگر $f(x)R[x]g(x) = 0$، آن‌گاه برای هر i, j، $a_iRb_j = 0$.

تعریف ۱.۱.۲۵. حلقه R را متقارن [۲۴] نامند، هر گاه برای هر a, b, c در R اگر $abc = 0$، آن‌گاه $acb = 0$.

لم ۱.۱.۲۶. *هر حلقه کاهشی، متقارن است.*

برهان. اگر $abc = 0$، آن‌گاه $c(abc)ab = 0$ در نتیجه بنابر فرض داریم $cab = 0$. لذا $aba(cab)ac = 0$ در نتیجه $abac = 0$. در این‌صورت $bacb(abac)ba = 0$. در نتیجه $bacba = 0$. سرانجام $ac(bacba)cb = 0$ در نتیجه $acb = 0$. ∎

تعریف ۱.۱.۲۷. حلقه R را یک حلقه نیم‌جابه‌جایی [۲۵] نامند هر گاه برای هر $a, b \in R$ از این‌که $ab = 0$ داشته باشیم $aRb = 0$.

لم ۱.۱.۲۸. *هر حلقه متقارن، نیم‌جابه‌جایی است.*

برهان. بدیهی است. ∎

لم ۱.۱.۲۹. *حلقه‌های کاهشی، نیم‌جابه‌جایی هستند.*

برهان. فرض کنید برای هر $a, b \in R$، $ab = 0$ از طرفی چون R کاهشی است در نتیجه $ba = 0$ پس برای هر $r \in R$، $bar = 0$. لذا $(arb)^2 = ar(bar)b = 0$ چون R کاهشی است بنابراین $arb = 0$. در نتیجه R نیم‌جابه‌جایی است. ∎

[۲۳] quasi-Armendariz
[۲۴] symmetric
[۲۵] semi-commutative

تعریف ۳۰.۱.۱. حلقه R را یک حلقه آبلی[۲۶] نامند هر گاه تمام عناصر خودتوان[۲۷] حلقه R مرکزی باشند.

تعریف ۳۱.۱.۱. حلقه R را یک حلقه پروژکتیو اصلی (یا به طور مختصر $p.p.$) [۲۸] راست (چپ) می نامند، هر گاه پوچ‌ساز راست (چپ) هر عنصر آن، توسط یک عنصر خودتوان حلقه R تولید شود.

گزاره ۳۲.۱.۱. *هر حلقه نیم‌جابه‌جایی، آبلی است. عکس مطلب زمانی درست است که R یک حلقه $p.p.$ راست باشد.*

برهان. باید ثابت کنیم هر عضو خودتوان مرکزی است. فرض کنید e عضو خودتوانی از حلقه R باشد. در این‌صورت $e^۲ = e$ و در نتیجه $e(۱-e) = ۰$. از طرفی چون R حلقه نیم‌جابه‌جایی است بنابراین برای هر $r \in R$، $er(۱-e) = ۰$ یعنی $er = ere$. هم‌چنین $(۱-e)e = ۰$، به همین ترتیب $re = ere$، یعنی برای هر $r \in R$، $er = re$. بنابراین حلقه R آبلی است.

بالعکس، فرض کنید R آبلی و $p.p.$ راست و برای هر a, b در R، $ab = ۰$. بنابراین برای عنصر خودتوان e در R داریم $a \in r_R(b) = eR$. لذا $be = ۰$ و $a = ea$. چون R آبلی است پس برای عنصر دلخواه $r \in R$، $arb = earb = arbe = ۰$. در نتیجه $aRb = ۰$. لذا R نیم‌جابه‌جایی است. ■

گزاره ۳۳.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه آبلی و*

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}.$$

در این‌صورت هر خودتوان حلقه $S_n(R)$ برای هر $a^۲ = a \in R$ به صورت

$$\begin{pmatrix} a & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix}$$

است هم‌چنین $S_n(R)$ آبلی است.

برهان. با استفاده از استقرا روی n نشان می دهیم هر خودتوان در $S_n(R)$ به شکل بالاست. ابتدا حالت $n = ۲$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} \in S_۲(R)$ یک عضو خودتوان باشد بنابراین $\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}$. در نتیجه $c = c^۲$ و $cd + dc = d$. لذا با ضرب عبارت قبل از طرف چپ در c داریم $cd + cdc = c^۲d + cdc = cd$.

---
[۲۶] abelian
[۲۷] idempotent
[۲۸] principally projective

چون R آبلی است بنابراین داریم $dc = cd = c^۲d = cdc = ۰$ پس $d = ۰$. لذا هر خودتوان در $S_۲(R)$ به شکل $\begin{pmatrix} c & ۰ \\ ۰ & c \end{pmatrix}$ است که $c^۲ = c \in R$. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix}$$

عنصری خودتوان در $S_n(R)$ باشد. واضح است عناصر

$$\begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱(n-۱)} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲(n-۱)} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳(n-۱)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a_{۲۳} & a_{۲۴} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & a & a_{۳۴} & \cdots & a_{۳n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۴n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix}$$

از $S_{n-۱}(R)$ نیز خودتوان هستند پس با استفاده از فرض استقرا داریم برای هر $۰ \leq i,j \leq n-۱$، $a_{ij} = ۰$ و $a^۲ = a$. در نتیجه داریم

$$A = \begin{pmatrix} a & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & a_{۱n} \\ ۰ & a & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & a \end{pmatrix}$$

با $a^۲ = a$ و $aa_{۱n} + a_{۱n}a = a_{۱n}$. بنابراین با ضرب عبارت قبل از طرف چپ در a داریم

$$aa_{۱n} + aa_{۱n}a = a^۲a_{۱n} + aa_{۱n}a = aa_{۱n}.$$

چون R آبلی است لذا $a_{۱n}a = aa_{۱n} = a^۲a_{۱n} = aa_{۱n}a = ۰$. بنابراین $a_{۱n} = ۰$. درنتیجه هر خودتوان $S_n(R)$ به شکل

$$A = \begin{pmatrix} a & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix}$$

که در آن $a^۲ = a \in R$. بنابراین چون حلقه R آبلی است لذا $S_n(R)$ نیز آبلی است. ■

مثال زیر نشان می دهد که عکس گزاره ۳۲.۱.۱ در حالت کلی درست نیست.

مثال ۳۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه آبلی باشد و