به نام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیوتر

طراحی کنترل کننده کشش

با استفاده ازمدل کنترل پیش بین صریح و سیستم های هایبرید

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی برق – کنترل

روزبه معمارزاده

اساتید راهنما

دکتر جواد عسکری

دکتر حمیدرضا مرزبان

استاد مشاور

مهندس یداله ذاکری

۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق کنترل

تحت عنوان

طراحی کنترل کننده کشش

با استفاده ازمدل کنترل پیش بین صریح و سیستم های هایبرید

در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۴ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی وتصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان نامه — دکتر جوادعسکری

۲-استادراهنمای پایان نامه — دکتر حمید رضا مرزبان

۳-استاد داور — دکتر محسن مجیری

۴-استاد داور — دکتر مرضیه کمالی

سرپرست تحصیلات تکمیلی — دکتر مسعود عمومی

کلیـــه حقـــوق مادی مرتبت برنتایـــج مطالعـــات، ابتـــکارات ونوآوری های ناشی از تحقیق موضـــوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مدل کنترل پیش بین ۲

۱-۲ سیستم های هایبرید ۳

۱-۳ کنترل پیش بین سیستم های هایبرید ۳

۱-۴ تشریح مساله کنترل کشش و بیان اهداف ۴

۱-۵ روند ارایه مطلب ۵

فصل دوم

برنامه ریزی چندپارامتری

۲-۱ مسایل بهینه سازی ۶

۲-۲ شرایط کراش-کان-تاکر ۸

۲-۳برنامه ریزی چندپارامتری ۹

۲-۴ برنامه ریزی خطی چندپارامتری با قیودخطی $mp-LP$ ۹

۲-۴-۱ ناحیه بحرانی برای برنامه ریزی خطی چندپارامتری ۱۰

۲-۴-۲ کاهش بعد فضای پارامتری ۱۱

۲-۴-۳ شرایط کراش-کان-تاکر برنامه ریزی خطی چندپارامتری ۱۱

۲-۴-۴ بهینه ساز غیریکتا ۱۲

۲-۴-۵ الگوریتم حل مساله برنامه ریزی خطی چندپارامتری ۱۲

۲-۵ برنامه ریزی مربعی چندپارامتری باقیودخطی $mp-QP$ ۱۹

۲-۵-۱ خواص نواحی بحرانی، تابع مقداروبهینه ساز ۱۹

۲-۵-۲ الگوریتم حل مساله برنامه ریزی مربعی چندپارامتری ۲۱

فصل سوم

تبدیلMPC به QP

۳-۱مساله کنترل بهینه با تابع هزینه مربعی ۲۴

۳-۱-۱حل مساله کنترل بهینه از روش یک تکه ای ۲۵

۳-۱-۲ حل مساله کنترل بهینه از روش بازگشتی ۲۶

۳-۲ مقایسه دو روش حل مساله باتابع مربعی ۲۸

۳-۳ مدل کنترل پیش بین ۲۸

۳-۳-۱ تنظیم حالت ها در مبداء ۲۹

۳-۳-۲ تبدیل مساله MPC به QP برای مسایل تنظیم حالتها در مبداء ۳۰
۳-۳-۳ تبدیل مساله MPC به QP برای مسایل تعقیب مقدارمرجع ۳۳
۳-۳-۴ سازگاری کنترل کننده درمدل پیش بین ۳۶
۳-۴ طراحی کنترل کننده با استفاده از برنامه ریزی مربعی چندپارامتری برای چند سیستم کنترلی........ ۳۷

فصل چهارم

مدل سیستم هایبرید

۴-۱مدل سیستم هایبرید ۴۶
۴-۲کاربردنظریه سیستم های هایبرید........ ۴۷
۴-۳ روندتشریح مساله هایبرید ۴۸
۴-۴ نحوه کلی عملکرد سیستم های هایبرید ۴۹
۴-۵ سیستم های گسسته هایبرید اتوماتا(DHA) ۵۰
۴-۵-۱ سیستم مستوی سوییچ شده(SAS)........ ۵۰
۴-۵-۲ تولید کننده پیشامد(EG)........ ۵۱
۴-۵-۳ ماشین حالت محدود(FSM)........ ۵۲
۴-۵-۴ انتخاب کننده حالت (MS)........ ۵۳
۴-۶ رده های مدلسازی سیستم های هایبرید ۵۴
۴-۷ سیستم های دینامیکی منطقی مرکب(MLD) ۵۵
۴-۸ سیستم های تکه ای مستوی(PWA) ۵۵
۴-۹ زبان مدلسازی HYSDEL ۵۸
۴-۱۰ سیستم های متمم خطی(LC)........ ۵۸
۴-۱۱ سیستم های متمم خطی گسترش یافته(ELC) ۵۸
۴-۱۲ سیستم های کمینه-بیشینه- افزونه-مقیاس(MMPS)........ ۵۹

فصل پنجم

مدل کنترل کشش

۵-۱ مدل کنترل کشش........ ۶۰
۵-۲ کنترل بهینه مقید شده........ ۶۲
۵-۳ گسسته سازی مدل هایبرید وسیله نقلیه ۶۳
۵-۴ دو روش محاسبه وحل مساله کنترل کشش........ ۶۵
۵-۴-۱ روش مستقیم برای محاسبه MPC وحل سیستم های MLD ۶۶
۵-۴-۲ شبیه سازی مدل MLD سیستم کنترل کشش ۶۷
۵-۴-۳ روش مستقیم برای محاسبه MPC وحل سیستم های PWA........ ۶۸
۵-۴-۴ شبیه سازی مدل PWA سیستم کنترل کشش ۷۰
۵-۵ نتایج حاصل از شبیه سازی ۷۱

نتیجه گیری و کارهای آینده ۷۴
ضمیمه۱
چندوجهی ها ۷۶
ضمیمه۲
HYSDEL ۸۶
مراجع ۸۷

چکیده

MPC یک روش استاندارد پذیرفته برای مسایل‌کنترل مقید شده در فرآیندهای‌صنعتی می‌باشد. یکی ازاین مسایل کنترلی کنترل کشش می‌باشد، با استفاده ازاین روش‌کنترلی می‌توان حرکت وسیله نقلیه راتحت شرایط نامطلوب ومزاحم مانند خیس بودن جاده یایخ زدگی جاده کنترل کرد. یک کنترل کننده کشش با استفاده ازحداکثرکردن نیروی کششی بین چرخهای وسیله نقلیه و جاده مانع ازلغزش چرخها درشرایط نامطلوب خارجی شده ودر عین حال باعث افزایش پایداری وسیله نقلیه وبهبود قابلیت حرکت وسیله نقلیه درشرایط نامطلوب می‌گردد.

دربیشتر طرحهای مربوط به لغزش چرخها، اختلاف بین سرعت نرمالیزه شده وسیله نقلیه وسرعت چرخهای وسیله نقلیه به عنوان متغیری که باید کنترل شود مطرح شده است. هدف ازاین کنترل کننده،حداکثرکردن گشتاورکششی درحالیکه پایداری سیستم تضمین شود می‌باشد. رابطه بین نیروی کششی ولغزش چرخها یک رابطه غیر خطی وتابعی ازشرایط جاده می‌باشد. وجوداین عوامل غیرخطی ازیک طرف ووجودقیود برروی متغیرهای مساله ازطرف دیگرباعث شده که مابرای تحلیل مساله ازتئوری کنترل بهینه برای سیستم کنترل کشش استفاده کنیم.

دراین پایان نامه ابتدا برنامه ریزی خطی ومربعی چند پارامتری ومحاسبات لازم برای بکارگیری مسالهMPC بررسی شده است. برنامه ریزی های چندپارامتری خطی ومربعی به خوبی برروی مسایل تنظیم حالتها در مبدا ومساله تعقیب به راحتی می‌تواند پیاده سازی شود.

به دلیل ذات غیرخطی دینامیک‌های لغزش چرخها، یک مدل خطی و استاندارد نمی‌تواند برای بررسی عملکردسیستم کنترل کشش به کار گرفته شود. ما نشان خواهیم داد که چگونه یک مدل مرکب منطقی دینامیکی برای سیستم کنترل کشش با استفاده ازتلفیق کننده زبان توصیف سیستمهای هایبرید بدست می‌آید. دوروش موثر برای محاسبه مسالهMPC وجود دارد، استفاده از مدل های تکه ـ ای مستوی و مرکب منطقی دینامیکی. ما این روش کنترل را به مدلهایMLD و PWAمربوط به سیتم کنترل کشش اعمال کرده و قانون کنترل کشش غیر خطی رامحاسبه می‌کنیم وسپس شبیه سازی های مربوط به آن را انجام می‌دهیم.

واژگان کلیدی : برنامه ریزی خطی چند پارامتری؛ برنامه ریزی مربعی چند پارامتری؛ سیستم های دینامیکی منطقی مرکب؛ سیستم های هایبرید؛ سیستم های تکه ای مستوی؛ زبان توصیف سیستم های هایبرید

فصل اول

مقدمه

۱-۱مدل کنترل پیش بین

دینامیک های بهینه سازی در بسیاری از علوم کاربردی به یک ابزار مفید وقدرتمند در سالهای اخیر تبدیل شده است. تحقیقات گسترده ای در زمینه بهینه سازی سوخت ارسال راکت ها به مدار زمین، بهینه سازی سیستم های اقتصادی، تولیدات وفرآیندهای شیمیایی وغیره صورت گرفته است واین مسایل با استفاده از برنامه ریزی های بهینه به صورت معمول حل شده است.

مقبولیت مدل کنترل پیش بین از این حقیقت ناشی می‌شود که نتایج حاصل از این روش، تمام جزییات مربوط به تاثیر متقابل اجزاء سیستم بر روی یکدیگر و قیود ورودی و ایمنی سیستم را لحاظ می‌کند. به طوریکه پیاده سازی چنین سیستم ـ هایی که دارای قیود سخت ویا عکس العمل بین اجزاء سیستم می‌باشد باروش های دیگر مشکل است. اغلب مدل کنترل پیش بین برای تنظیم کنترل سیستم های خطی چند متغیره به همراه قیود وتابع هزینه ای که به صورت ریاضی به آسانی می-تواند انتخاب شود به کار گرفته می‌شود. معمولاً این توابع هزینه یک تابع مربعی از حالت ها و ورودی ها می‌باشد که منجر به یک جواب حلقه بسته مناسب برای سیستم می‌گردد. مزیت دیگر این مدل آن است که علاوه بر برآورده کردن قیود سیستم، پایداری سیستم نیز می‌تواند ایجادشود.

یکی از محدودیت های این روش این است که الگوریتم های بهینه سازی باید به صورت برخط[۱] در هرمرحله زمانی، زمان نمونه برداری، انجام شده واین امر احتیاج به پردازشگرهایی با سرعت بالا دارد ویا اینکه بر روی سیستم هایی که به صورت ذاتی کند می‌باشند مانند پروسه های شیمیایی یا حرارتی مناسب اجراءشود. این روش ممکن است برای سیستم های کنترل قرار گرفته بر روی وسایل نقلیه که دارای زمان نمونه برداری در چند میلی ثانیه می‌باشند مناسب نباشد. برای برطرف کردن مشکل سرعت پایین این روش مطلوب است که مساله بهینه سازی پیش محاسبه شده ونتایج برای هرحالت به شکل یک جدول جستجو[۲] یا تابع جبری از حالتها به صورت $u(x(k)) = f(x(k))$ ذخیره شده وبراحتی قابل دسترس باشد.

به عبارت دیگربا این روش، صفحه فضای حالت به نواحی چند وجهی محدب افرازخواهد شده به طوریکه درهرناحیه قانون کنترل فیدبک (عموما غیرخطی) $u(x(k)) = f(x(k))$ به صورت صریح، محاسبه می‌شود. در این پایان نامه بررسی می‌شود که چگونه یک کنترل کننده فیدبک بهینه غیر خطی برای رده های سیستم های خطی به همراه قیود و سیستم های خطی سوییچ شده با قیود یا به عبارت دیگر سیستم های هایبرید می‌تواند محاسبه شود. سپس نتایج حاصل از این روش به منظور طراحی کنترل کننده‌کشش وسیله نقلیه استفاده خواهدشد. روش های دیگری مانند $\mathrm{anti-windup}$ نیز برای طراحی کنترل کننده ها وبررسی این رده از سیستمها نیز وجود دارد. اما روش $\mathrm{anti-windup}$ نیاز به تکرارآزمایش وسعی وخطادارد[۲۲].

۱-۲ سیستم های هایبرید

درنظریه مدل سازی سیستم های واقعی دینامیکی، عبارت سیستم های هایبریدبه سیستمی‌اطلاق می‌شود که رفتار آن شامل دونوع دینامیک ناشی از زمان[۳] وناشی ازپیشامد[۴]باشد. بادرنظرداشتن مفهوم دینامیک های ناشی از زمان وناشی از پیشامد، بسیاری ازمتون، سیستم های هایبریدراترکیب‌سیستم های پیوسته (متناظر با دینامیک ناشی اززمان) وسیستم های گسسته(متناظربا دینامیک ناشی ازپیشامد)نامیده اند [۱].

اگرچه ممکن است بیان این عبارات درنظریه مدل سازی وکنترل قدری جدید به نظر برسد، اما سیستم های هایبرید به بیان محققان از زمانی که رله در سیستم ها به کار می‌رفته با مابوده است. در واقع هرسیستمی‌که دارای چند حالت عملکرد است وبر اساس یک منطق در هر لحظه از زمان یکی از مدهای آن فعال است، یک نمونه از سیستم هایبرید می‌باشد. قسمت هایی که تغییرات آن در زمان با یک معادله دیفرانسیل یا دیفرنس توصیف می‌شود و بخش هایی که رخ دادن یک پیشامد رفتار آن ها را رقم می‌زنند.

۱-۳ کنترل پیش بین سیستم های هایبرید

کنترل پیش بین در حدود دهه هفتادمطرح شده است و امروزه یکی از پرکاربردترین روش های طراحی کنترل کننده های صنعتی می‌باشد. کنترل کننده های صنعتی معمولاً دارای قیودذاتی وغیر ذاتی بر روی حالت ها و ورودی های خودمی‌باشند.

---

[۱] online
[۲] Lookup table
[۳] Time-Driven
[۴] Event-Driven

از این میان می‌توان به قیود ذاتی بر روی عملگرهای سیستم و قیود ایمنی مانند محدودیت های فشار، دماوغیره می‌باشند. به این دلیل که مدل کنترل پیش بین به راحتی می‌تواند قیود را لحاظ کند استفاده از این مدل در پروسه های صنعتی رواج بسیارپیدا کرده است. از طرف دیگر معمولاً در پروسه های صنعتی زمانی که سیستم در حدود قیدها ومرزها عمل کند راندمان بهینه سیستم ایجاد می گردد و مدل کنترل پیش بین اجازه می‌دهد که سیستم به حدود و مرزها نزدیک شود.

الگوریتم های مختلفی در زمینه کنترل پیش بین وجود دارند که از این میان می‌توان به DMC، MAC، PFC و GPC اشاره کرد که کاربردهای صنعتی فراوانی یافته اند. تفاوت بین این مدل ها در نحوه مدل کردن سیستم و تعریف تابع هزینه سیستم می‌باشد که کنترل کننده وظیفه حداقل کردن این تابع هزینه را به عهده دارد.

در دهه های گذشته سیستم های هایبرید چندان مورد توجه نبوده است اما امروزه با افزایش فهم وشناخت از اثرات متقابل فرآیندهای فیزیکی، کنترل کننده های دیجیتال ونرم افزارها، به عنوان سه عنصر تاثیر گذار، سیستم های هایبرید مورد توجه بسیاری قرارگرفته است. در این راستا، چندین مسیر پژوهشی مختلف در ریاضیات، مهندسی کنترل وعلوم کامپیوتر به طور جداگانه به مقوله سیستم های هایبرید همگرا شده اند. همکاری مهندسان کنترل وکامپیوتر به تحقق پیشرفت های قابل توجهی در زمینه سیستم های هایبرید منجر شده است.

در سالهای اخیر ودر پی اثبات قابلیت های روش کنترل پیش بین مبتنی برمدل، استفاده از MPC برای سیستم های هایبرید مدنظرقرارگرفته است. از اینجاکه درMPC، محدودیت های حاکم بر سیستم در طی محاسبه فرمان کنترل لحاظ می گردند، استفاده از MPC یک راهکار مناسب برای کنترل سیستم های هایبرید می‌باشد. به طور کلی، استفاده ازMPC یک راه حل مناسب برای سیستم های مقید شده خطی وغیر خطی می‌باشد.

۱-۴ تشریح مساله کنترل کشش وبیان اهداف

MPC یک روش استاندارد پذیرفته برای مسایل کنترل مقید شده در فرآیندهای صنعتی می‌باشد. یکی ازاین مسایل کنترلی کنترل کشش می‌باشد، با استفاده ازاین روش کنترلی می‌توان حرکت وسیله نقلیه راتحت شرایط نامطلوب ومزاحم مانند خیس بودن جاده یایخ زدگی جاده کنترل کرد.

یک کنترل کننده کششی با استفاده ازحداکثرکردن نیروی کششی بین چرخهای وسیله نقلیه و جاده مانع ازلغزش چرخها درشرایط نامطلوب خارجی شده ودر عین حال باعث افزایش پایداری وسیله نقلیه وبهبود قابلیت حرکت آن درشرایط نامطلوب می گردد.

دربیشتر طرحهای مربوط به لغزش چرخها، اختلاف بین سرعت نرمالیزه شده وسیله نقلیه وسرعت چرخهای وسیله نقلیه به عنوان متغیری که باید کنترل شود مطرح شده است. هدف ازاین کنترل کننده، حداکثرکردن گشتاورکششی درحالیکه پایداری سیستم تضمین شود می‌باشد. رابطه بین نیروی کششی ولغزش چرخها یک رابطه غیر خطی وتابعی ازشرایط جاده می‌باشد. وجوداین عوامل غیرخطی ازیک طرف و وجودقیود برروی متغیرهای مساله ازطرف دیگرباعث شده که مابرای تحلیل مساله ازتئوری کنترل پیش بین برای سیستم کنترل کشش استفاده کنیم.

به دلیل ذات غیرخطی دینامیکهای لغزش چرخها، یک مدل خطی و استاندارد نمی‌تواند برای بررسی عملکردسیستم کنترل کشش به کار گرفته شود. نشان داده خواهدشد که چگونه یک مدل مرکب منطقی دینامیکی[۱] برای سیستم کنترل کشش با استفاده ازتلفیق کننده زبان توصیف سیستمهای هایبرید[۲] بدست می‌آید. دوروش موثر مدل تکه ای مستوی[۳]و مرکب منطقی دینامیکی برای محاسبه مسالهMPC وجود دارد. این روش کنترل به مدل PWAمربوط به سیستم کنترل کشش اعمال شده و قانون کنترل کشش غیر خطی محاسبه می‌شود، سپس شبیه سازی های مربوط به آن را انجام می‌دهیم.

۵-۱ روند ارایه مطالب

به طورکلی این پایان نامه شامل پنج فصل می‌باشد که روند ارایه مطالب به صورت زیر می‌باشد :

درفصل اول مروری گذرا بر کنترل پیش بین، سیستم های هایبرید ودلیل استفاده از این مدل ها برای حل مساله کنترل کشش می‌شود.

درفصل دوم این پایان نامه، برنامه ریزی چندپارامتری (خطی ومربعی) معرفی می‌شود. دریک شکل کلی برنامه ریزی های چندپارامتری روش اصلی استفاده شده در این پایان نامه برای محاسبه قانون کنترل بهینه مسایل می‌باشند. در حقیقت مساله کنترل بهینه افق محدودبه صورت یک برنامه ریزی چندپارامتری فرمول بندی می‌شود به چنانچه توالی ورودی برداربهینه سازی می‌باشد. سپس الگوریتم های حل مسایل مختلف برنامه ریزی چندپارامتری از جمله خطی ومربعی را معرفی شده و با استفاده از این الگوریتم ها مثال هایی را حل می کنیم.

در فصل سوم مساله کنترل پیش بین مطرح شده ومدل کنترل پیش بین به مساله برنامه ریزی مربعی چند پارامتری مقید شده برای مساله تنظیم حالت ها درمبداء وتعقیب مقدارمرجع تبدیل می‌شود. با حل این گونه از مسایل می‌توان قانون فیدبک حالت که تابعی از حالت ها می‌باشد را استخراج کرد. بعلاوه قانون کنترل یک تابع پیوسته وتابع مقدار یک تابع محدب وپیوسته از حالت ها می‌باشد. در پایان حل مساله کنترل پیش بین افق محدود مقید شده را بر روی چند نوع سیستم ساده پیاده سازی کرده ونتایج حاصل را با استفاده از نرم افزارمتلب شبیه سازی می کنیم.

در فصل چهارم مدل سیستم های هایبرید ونحوه کلی عملکرد سیستم های هایبریدمعرفی شده و رده های مدل سازی سیستم ـ های هایبرید مطرح می‌شود. در پایان تبدیل هر یک از این رده ها به یکدیگر را به صورت مختصربررسی می‌شود.

در فصل پنجم مدل کنترل کشش معرفی می‌شود. این مدل یک سیستم خطی سوییچ شده به همراه قیودمی‌باشد، یابه عبارت دیگر یک سیستم هایبرید مقید شده است. با استفاده از زبان توصیف سیستم های هایبرید مدلMLD و PWA کنترل کشش بدست آمده وسپس مساله کنترل این دو مدل بررسی می‌شود. در ادامه سعی در حل مساله کنترل کشش با استفاده از مدل MLDو PWA بر آمده ونتایج حاصل را شبیه سازی می‌شود.

---
[۱] Mixed Logical Dynamical(MLD)
[۲] Hybrid Systems Description Langueges(HYSDEL)
[۳] Piecewise affine(PWA)

فصل دوم

برنامه ریزی مربعی چندپارامتری

۲-۱ مسایل بهینه سازی

در این بخش دیدگاه اصلی وتئوری ریاضی مساله بهینه سازی رامعرفی می کنیم. یک مساله بهینه سازی به طورکلی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\inf_z f(z)$$

$$\text{subj.to} \quad z \in S \subseteq Z \qquad (۱-۲)$$

بطوریکه بردار z متغیرهای مساله، Z حوزه[۱] متغیرها، $S \subseteq Z$ مجموعه ممکن متغیرها می‌باشد و $f : z \to R$ تابع هزینه ای می-باشدکه بایدبهینه شود. برای سهولت مساله (۲-۱) را به صورت زیرنمایش می‌دهیم :

$$\inf_z f(z)$$

$$z \in S \subseteq Z \qquad (۲-۲)$$

حل معادله (۲-۱) منجر به محاسبه حداقل هزینه ممکن J^* برای مساله می گردد :

[۱] Domain

$$J^* = \inf_z f(z)$$
$$z \in S$$

J^* مقدار بهینه مساله (۲-۱) می‌باشد :

$$f(z) \geq J^* \quad \forall z \in S \quad \text{and} \quad (\exists \bar{z} \in S : f(\bar{z}) = J^* \text{or} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in S : f(z) \leq J^* + \varepsilon)$$

دراینجا بردار z^* بایدطوری پیداشودکه منجر به حل مساله بهینه سازی گردد :

$$z* \in S \quad f(z^*) = J^*$$

اگر چنین z^* وجود داشته باشد آنگاه می‌توانیم مساله (۲-۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$J^* = \min f(z)$$
$$z \in S \tag{۲-۳}$$

دراینصورت z^* رابهینه ساز[۱] می‌نامند ومجموعه تمام حلهای بهینه به صورت زیر تعریف می‌شود [۸] :

$$\arg\min f(z) = \{z \in S : f(z) = J^*\}$$
$$z \in S$$

دربهینه سازی پیوسته حوزه مساله یعنی Z یک زیر مجموعه ازفضای برداری اقلیدوسی[۲] با بعد محدود R^s وقیود شامل یک سری توابع حقیقی می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\begin{aligned} &\inf_z f(z) \\ &\text{subj.to} \quad g_i(z) \leq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,\dots,m \\ &\qquad\qquad h_i(z) = 0 \quad \text{for} \quad i = 1,\dots,p \\ &z \in Z \end{aligned} \tag{۲-۴}$$

به طوریکه $h_1,\dots,h_p$ ،$g_1,\dots,g_m$ و f توابع حقیقی مقدارکه بر روی فضای R^s تعریف شده اند می‌باشد و z اشتراک حوزه های توابع قیود وتابع هزینه بوده و مساله دوگان به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\begin{aligned} &\sup \theta(u,v) \\ &(u,v), u \geq 0 \end{aligned} \tag{۲-۵}$$

مساله (۲-۵) را مساله دوگان لاگرانژ می‌نامند. تنها نقاط (u,v) با $\theta(u,v) \geq -\infty$ برای مساله دوگان قابل قبول می‌باشد.مساله دوگان یک مساله محدب [۳] است حتی اگر مساله اولیه محدب نباشد. بنابراین راحت تر است مساله دوگان که یک مساله محدب است حل شود[۸] .

---

[۱] Optimizer
[۲] Euclidian
[۳] Convex

۲-۲ شرایط کراش-کان-تاکر[۱]

مساله بهینه ساز اولیه (۲-۴) ودوگان آن (۲-۵) در نظرگرفته می‌شودچنانچه تابع هزینه وتوابع قیود h_i, g_i, f مشتق پذیر باشند. $(u^*, v^*), z^*$ نقاط بهینه مساله اولیه ودوگان می‌باشند :

$$\nabla f(z^*) + \sum_i u_i^* \nabla g_i(z^*) + \sum_j v_j^* \nabla h_j(z^*) = 0$$

چنانچه $(u^*, v^*), z^*$ نقاط بهینه مساله اولیه ودوگان با تابع هزینه مشتق پذیر وتوابع قیود مشتق پذیرمی‌باشندکه باید شرایط زیر را بر آورده سازند :

$$\nabla f(z^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(z^*) + \sum_{j=1}^{p} v_j^* \nabla h_i(z^*) = 0 \qquad \text{(۲-۶ الف)}$$

$$u_i^* g_i(z^*) = 0 \qquad i = 1,\dots,m \qquad \text{(۲-۶ ب)}$$

$$u_i^* \ge 0 \qquad i = 1,\dots,m \qquad \text{(۲-۶ ج)}$$

$$g_i(z^*) \le 0 \qquad i = 1,\dots,m \qquad \text{(۲-۶ د)}$$

$$h_j(z^*) = 0 \qquad i = 1,\dots,p \qquad \text{(۲-۶ هـ)}$$

روابط (۲-۶ د)(۲-۶ هـ)شرایط ممکن اولیه[۲]،(۲-۶ ج)شرط ممکن دوگان[۳] و رابطه (۲-۶ ب)شرط متغیر کمبود[۴]رانشان می-دهند ودرمجموع به این شرایط ، شرط کراش – کان – تاکریابطورخلاصه شرط KKT می گویند. به طور کلی شرط KKT شرط لازم برای هر مساله بهینه سازی اولیه ودوگان می‌باشد. وبه طور خاص اگر مساله اولیه محدب، تابع هزینه و توابع قیود مشتق پذیر باشد شرط KKT شرط کافی برای مساله نیز می‌باشد[۱۵].

قضیه ۲– ۱: مساله (۲-۴) را در نظر بگیرید. به طوریکه$\mathbb{Z}$ یک مجموعه ناتهی از R^s باشد. فرض کنید مساله (۲-۴) محدب و تابع هزینه f وتوابع قیود h_i, g_i مشتق پذیر و ممکن در z^* باشند. z^* بهینه ساز است اگروتنها اگر u^*, v^* وجود داشته باشد که به همراه z^* شرط KKT رابرآورده سازد[۱۵] .

قضیه ۲-۲: مساله (۲-۴) را درنظر بگیرید به طوریکه f یک مجموعه ناتهی از R^s باشد. فرض کنید z^* یک حل ممکن و $A = \{i : g_i(z^*) = 0\}$ مجموعه قیود فعال باشند. تابع هزینه J^* وتوابع قیود h_i, g_i مشتق پذیر در z^* به ازاء تمامی iها و h_i پیوسته می‌باشد. با فرض اینکه $\nabla h_i(z^*), i = 1,\dots,p, \nabla g_i(z^*), i \in A$ مستقل خطی باشند اگر $(u^*, v^*) z^*$ نقاط بهینه اولیه ودوگان باشند این نقاط شرط KKT را برآورده می‌سازند[۱۵].

همچنین اگر مساله (۳-۴) محدب باشد سپس z^* بهینه ساز است اگروتنها اگر u^*, v^* وجود داشته باشد که به همراه z^* شرط KKT رابرآورده می‌سازد[۱۵]. شرط KKT نقش بسیار مهمی‌در بهینه سازی ایفا می کند. برای جزییات بیشترمی‌توان به مرجع [۸] مراجعه کرد.

---

۱ Karush-Kuhn-Tucker
۲ Primal feasibility
۳ Dual feasibility
۴ Slackness Complimentry

۲-۳ برنامه ریزی چند پارامتری

دراینجا مدل کلی برنامه ریزی چند پارامتری معرفی شده ودر بخش های بعدی دوالگوریتم برای حل برنامه ریزی چند پارامتری خطی [۱] وبرنامه ریزی چند پارامتری مربعی [۲] ارایه خواهدشد. فرم برنامه ریزی چند پارامتری به طورکلی به صورت زیر می‌باشد :

$$\begin{aligned} & J^*(x) = \inf_z J(z,x) \\ & \text{subj.to} \quad g(z,x) \le 0 \end{aligned} \tag{۲-۷}$$

به طوریکه بردار z بردار بهینه ساز و x بردارپارامتر ها می‌باشد. دراینجا رفتار تابع هزینه $J^*(x)$ و بهینه ساز $z^*(x)$ را زمانی که پارامتر x تغییر می کند بررسی می‌شود. اگر پارامتر x یک اسکالر باشد مساله ما به یک برنامه ریزی پارامتری [۳] واگر پارامتر x یک بردار باشد مساله به یک برنامه ریزی چند پارامتری تبدیل می‌شود[۱۶]. علاقه ما به برنامه ریزی چندپارامتری ازاینجا ناشی می‌شودکه تئوری بسیاری ازسیستم های کنترل پیش بین با این مساله مواجه می‌شود. دینامیک سیستم های زمان گسسته مساله کنترل پیش بین توسط برنامه ریزی چند پارامتری مطرح شده، به طوریکه تابع هزینه وتوابع قیود، توابعی از حالت اولیه سیستم می‌باشند. در این نوع مسایل می توان حالت اولیه را به عنوان یک پارامتر درنظرگرفت وبا استفاده از برنامه ریزی چندپارامتری مساله کنترل پیش بین را به صورت صریح [۴] به عنوان تابعی ازحالت اولیه حل کرد[۱۴] .

در روش MPC یک مساله کنترل بهینه به صورت روی خط [۵] حل شده ودستورات وفرمان های بعدی محاسبه وبه سیستم اعمال می‌شود واین در حالیست که روش مطرح شده پیچیدگی بالایی دارد[۱۴] . محاسبات توسط برنامه ریزی چند پارامتری می‌تواند با یک مساله برون خط [۶] جایگزین شود به طوریکه قانون کنترل تابعی از متغیرهای بهینه سازی ومقادیراندازه گیری شده پارامترهای مساله می‌باشند. حل مساله چند پارامتری منجر به یک قانون کنترل می‌شود که تابعی از مقادیر اندازه گیری شده است. دراین بخش برروی برنامه ریزی خطی چندپارامتری وبرنامه ریزی مربعی چندپارامتری تمرکز می‌شود. الگوریتم ـ های چند پارامتری به کارگرفته شده برای حل این گونه مسایل دراین بخش یک ناحیه بحرانی [۷] در فضای پارامترها ایجاد می کنند وبا استفاده ازشرایط لازم وکافی بهینگی و استفاده از یک الگوریتم بازگشتی خارج ازاین ناحیه افراز می‌شود [۱۴] . به همین دلیل این روش به روش هندسی [۸] معروف است.

۲-۴ برنامه ریزی خطی چندپارامتری باقیودخطی $(\text{mp}-\text{LP})$

فرمول بندی این مساله به صورت زیر می‌باشد :

$$J^*(x) = \min_z (c^T z)$$

---

[۱] Multiparametric Linear Programming (mp-LP)
[۲] Multiparametric Quadratic Programming (mp-QP)
[۳] Parametric Programming
[۴] Explicit
[۵] online
[۶] offline
[۷] Critical Region
[۸] Geometric Approach

$$\text{subj.to} \quad Gz \le W + Sx \tag{۲-۸}$$

مساله دوگان مربوط به این مساله به صورت زیر می‌باشد :

$$\begin{aligned} &\min (W+Sx)u \\ &\text{subj.to} \quad G^T u = -c \quad u \ge 0 \end{aligned} \tag{۲-۹}$$

$z \in R^n$ متغیرهای‌بهینه‌سازی، $x \in R^n$ بردارپارامترها، $W \in R^m, G \in R^{m\times s}, S \in R^{m\times n}$ می‌باشد.اگرمجموعه چندوجهی $K \subseteq R^n$ به صورت زیر در نظرگرفته شود:

$$K = \{x \in R^n : Tx \le N\} \tag{۲-۱۰}$$

می توان $K^* \subseteq K$ راناحیه ای از پارامترهای $x \in K$ نامید چنانکه مساله (۲-۸) ممکن باشد:

$$K = \{x \in K : \exists z \quad \text{satisfying} \quad Gz \le W + Sx\} \tag{۲-۱۱}$$

در این جا فرض ما براین است که :

۱- مقداراولیه $x(0)$ درون فضای قیود $Gz \le W + Sx$ قرار گرفته باشد.
۲- چندوجهی بسته K بعدکامل داشته باشد.
۳- S دارای مرتبه ستونی کامل باشد.

هدف ما درادامه تعیین ناحیه $K^* \subseteq K$ ازپارامترها، پیداکردن تابع هزینه $J^*(x)$ وبهینه سازمساله $z^* \subseteq Z^*$ می‌باشد[۱۷] .

۲-۴-۱ ناحیه بحرانی مساله برنامه ریزی خطی چندپارامتری

برنامه‌ریزی‌چندپارامتری(۲-۸)رادرنظربگیرید.اگر $I = \{1,...,m\}$ مجموعه‌اندیس‌های قیود باشد برای هر $A \subseteq I$ ، G_A, S_A زیرماتریس هایی از G, S می‌باشد.

قضیه ۲-۳ [۱۴] **:** مجموعه فعال $A(x)$ ومجموعه غیرفعال $NA(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$A(x) = \{j \in I : G_j z^*(x) - S_j x = W_j \quad \text{for} \quad \text{all} \quad z^*(x) \in Z^*(x)\} \tag{۲-۱۲}$$

$$NA(x) = \{j \in I : \quad \text{exist} \quad z^*(x) \in Z^*(x) \quad \text{satisfying} \quad G_j z^*(x) - S_j x < W_j\} \tag{۲-۱۳}$$

قضیه ۲-۴ [۱۴] :مجموعه $A \subseteq I$ رادرنظربگیرید. ناحیه بحرانی مرتبط با مجموعه قیودفعال A به صورت زیرتعریف می‌شود:

$$CR_A = \{x \in K^* : A(x) = A\} \tag{۲-۱۴}$$