بسم الله الرحمن الرحيم

٦٩٨٩٤

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

گروه های بنیادی توپولوژیکی و فضاهای پوششی تعمیم یافته

از

علی گنج بخش صنعتی

استاد راهنما

دکتر حسین سهله

تیرماه ۱۳۸٦

تقدیم به :

پدر و مادر مهربانم که تمام سرمایه های زندگی ام هستند.

تقدیر وتشکر:

با سپاس به درگاه خداوند متعال که به من تو فیق انجام این پایان نامه راعنایت فرمود.

لازم می دانم از استاد راهنمای گرامی ،آقای دکتر حسین سهله ، بخاطر زحمات فراوان ،راهنمایی های بجا در مراحل تحقیق و نگارش پایان نامه قدر دانی نمایم.

همچنین از اساتید محترم ،آقایان دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی ،دکتر داوود احمدی دستجردی و دکتر علی اصغر ورسه ای که در طول این دوره از محضر ایشان بهره بردم،کمال تشکر را دارم.

در نها یت از دوستان عزیزم ،آقایان مجید نعیم یاوری و احسان منبتی بخاطر کمک در مر حله تایپ و ویرایش نهایت تشکر را دارم.

فهرست

چکیده:

گروههای بنیادی توپولوژیکی وفضاهای پوششی تعمیم یافته

علی گنج بخش صنعتی

در این پایان نامه،کلاف بندی های پوششی صلب را بعنوان فضای پوششی تعمیم یافته ارائه می‌دهیم و با اثبات لم بالا بر راهها برای کلاف بندی های پوششی صلب ،خواص اساسی فضاهای پوششی را به کلاف بندی های پوششی صلب تعمیم می دهیم.
در آخر کلاف بندی های پوششی صلب عمومی را به عنوان تعمیمی از فضا های پوششی عمومی تعریف می کنیم.

کلید واژه:

گروههای بنیادی توپولوژیکی ،فضای شبه همبند ساده مو ضعی ،فضای پوشش عمومی تعمیم یافته.

Abstract:

Fundamental topological groups and generalization covering spaces
Ali Ganjbakhsh Sanati

In this thesis we present rigid covering fibrations as generalized covering spaces.
By proving lifting path's lemma for rigid covering fibrations we try to generalize the essential property of covering spaces to rigid covering fibrations.
Finally , we will define universal rigid covering fibration as generalization of universal cover.

key words:
the toplogical fundamental groups,semi locally simply connected ,generalization of universal cover.

مقدمه

یکی از قضیه های مهم در توپولوژی عبارت است از:

"فضای توپولوژیک X دارای پوشش همبند ساده (پوشش عمومی) است، اگر وفقط اگر، X شبه همبند ساده موضعی باشد."[1]

یک فضای پوششی ، کلاف بندی ای است که ، تمام کلاف های آن گسسته است. در حالتی که پوشش عمومی وجود دارد، تنا ظری یک به یک بین کلاف های گسسته و اولین گروه بنیادی فضای X یعنی $\pi_1(X)$ ،برقرار است.

هدف این پایان نامه تعمیم فضاهای پوششی است . با قرار دادن شرایطی مناسب روی کلاف بندی ها ، خاصیت یکتایی بالابر راهها برای کلاف بندی ها ثابت می شود. به این ترتیب ایده تعمیم فضاهای پوششی فراهم می شود.

این پایان نامه بر مبنای مقاله[3] است. Biss در [3]با قرار دادن توپولوژی مناسب روی اولین گروه بنیادی فضای X، وتبدیل آن به گروه توپولوژیک ،ابزار مناسبی برای ،تعمیم فضاهای پوششی ارایه می دهد.

همچنین ازمقالات Paul Fable،[4] و [5] استفاده می شود .این کارها در راستای کار Biss است،که در آنها چند گزاره غلط که در [3] ارایه شده است،اصلاح می شود. همچنین تعمیمی از فضاهای پوشش عمومی ارایه می گردد.

ساختار این پایان نامه به صورت زیر است؛

در فصل صفر تعا ریف ، قضایا و مثال های مورد نیاز ارایه می گردد.

در فصل یک کلاف بندی ها معرفی و ویژگی های آن مورد بررسی قرار می گیرد. با قرار دادن شرایطی مناسب روی کلاف بندی ها ،خاصیت یکتایی بالا بر راهها ،برای کلاف بندی ها ثابت می شود ، به این ترتیب ایده تعمیم فضاهای پوششی فراهم می شود.

در فصل دوم کلاف بندی های پوششی معرفی می گردد ، و همچنین ، روی $\pi_1(X)$ توپولوژی مناسب گذاشته می شود،و آن را تبدیل به یک گروه توپولوژیک می کند ، که در این حالت آنرا با $\pi_1^{top}(X)$ نما یش می دهیم. این کار موجب می شود تا ابزار مناسبی برای تعمیم خواص اساسی فضاهای پوششی به کلاف بندی های پوششی صلب ،(که در فصل ۳ معرفی می گردد،)فراهم شود.

در فصل سوم کلاف بندی های پوششی صلب ،بعنوان تعمیمی از فضاهای پوششی معرفی و بعضی خواص اساسی فضاهای پوششی ، به کلاف های پوششی صلب ، تعمیم داده می شود. همچنین در این فصل تعمیمی از فضاهای پوششی عمومی ارایه می گردد،و قضیه ای مشابه با گزاره ای که در اول مقدمه آمده،برای این تعمیم اثبات می شود.

همچنین این پایان نامه شامل یک بخش ضمیمه است،که صورت اصلاح شده گزاره 8.1در [3] را ارایه می دهد.

در این پایان نامه علامت « □» ، پایان اثبات لم یا قضیه را نشان می دهد. برای شماره گذاری قضایا ، مثال ها و تعاریف،از اعداد ،بصورت فارسی ،و برای شماره گذاری اشکال و دیاگرام ها از اعداد، بصورت لاتین ،استفاده شده است.

نحوه شماره گذاری بصورت زیر است ؛

ابتدا شماره فصل،سپس شماره بخش و در نهایت شماره قضیه (تعریف ، مثال،شکل،دیاگرام)ذکر می شود.بعنوان مثال ۳-۲-۵ یعنی فصل ۳ ،بخش ۲ ،قضیه ۵ .

برای رجوع به مراجع از نماد $[a,b.c.d]$ استفاده می شود که یعنی مرجع a،فصل b،بخش cو مورد d.

فصل ۰

۰-۱- تعاریف و مثال‌ها و قضایای مورد نیاز

۰-۱-۱- **تعریف**: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه‌ی

$$K = \{\alpha : I \to X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 ، x_0 \in X \text{ و } \alpha \text{ پیوسته است}\}$$

را در نظر بگیرید. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را روی K بصورت زیر تعریف کنید :

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \text{ و } \alpha_2 \text{ با هم هموتوپ را می‌باشند}$$

اکنون اگر $\alpha_1, \alpha_2 \in K$، آنگاه

$$\alpha_1 * \alpha_2 = \begin{cases} \alpha_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

حال مجموعه‌ی $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha \in K\}$ یعنی فضای توپولوژیک X همراه با نقطه پایه ای x_0را در نظر بگیرید.

عمل دوتایی $*$را روی $\pi_1(X, x_0)$بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$[\alpha_1] * [\alpha_2] = [\alpha_1 * \alpha_2]$$

می‌توان نشان داد $(\pi_1(X, x_0) \;,\; *)$یک گروه است. این گروه را اولین گروه بنیادی فضای توپولوژیک Xمی‌نامیم.

۰-۱-۲- **تعریف**: فرض کنید Xو Yفضاهای توپولوژیک باشند. اگر Kزیر مجموعه فشرده‌ای از Xو Uزیر مجموعه بازی از Yباشد. آنگاه مجموعه $\langle K,U \rangle$را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle K,U \rangle = \{f \mid f : X \to Y \text{ پیوسته ، } f(K) \subset U\}$$

در اینصورت مجموعه‌هایی بصورت $\langle K,U \rangle$تشکیل یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی مجموعه

$$\mathsf{C}(X,Y)=\{f:X\to Y \mid \text{پیوسته است } f\}$$

می‌دهد ، این توپولوژی به توپو لوژی فشرده- باز(Compact-Open topology)موسوم است.

۰-۱-۳- **قضیه** : فرض کنید X یک فضای توپولوژی و (Y,d) یک فضای متری باشند در اینصورت روی فضای $\mathsf{C}(X,Y)$ توپولوژی فشرده-باز با توپولوژی همگرایی یکنواخت بر هم منطبق‌اند.[۱]

۰-۱-٤- **تعریف**: مجموعه

$$\Omega(X,x_0)=\{\alpha:I\to X \mid \alpha(1)=\alpha(0)=x_0 \text{ و } I=[0,1] \text{ و } x_0\in X \text{ پیوسته است و } \alpha\}$$

را با توپولوژی فشرده و باز در نظر بگیرید در این صورت دومین گروه بنیادی فضای توپولوژیک X بصورت زیر تعریف می‌شود ;

$$\pi_2(X,x_0)=\pi_1\left(\Omega(X,x_0),c_{x_0}\right)$$

که در آن c_{x_0} کمند ثابت بر مبنای x_0 است.

حال n-امین گروه بنیادی فضای توپولوژیک X برای $n>2$ بطور استقرایی بصورت زیر تعریف می‌شود ;

$$\pi_n(X,x_0)=\pi_{n-1}\left(\Omega(X,x_0),c_{x_0}\right)$$

البته می‌توان نشان داد که اعضای $\pi_n(X,x_0)$ همان مؤلفه‌های را هر مجموعه‌ی $(X,x_0)^{(I^n,\partial I^n)}$ است.

۰-۱-٥- **توجه** : فرض می‌کنیم $f:(X_1,x_1)\to(X_2,x_2)$ یک تابع پیوسته باشد . در این صورت نگاشت f همریختی

$$\begin{aligned} f_*:\pi_n(X_1,x_1)&\to\pi_n(X_2,x_2)\\ [\alpha]&\mapsto[f o\alpha]\end{aligned}$$

القا می‌کند.

۰-۱-٦- **تعریف** : فضای X ، شبه همبند ساده موضعی است ، هرگاه ، برای هر $x\in X$، همسایگی باز U شامل x موجود می‌باشد، بطوری که؛ $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ همریختی بدیهی باشد. که $i:U\to X$ نگاشت شمول است.

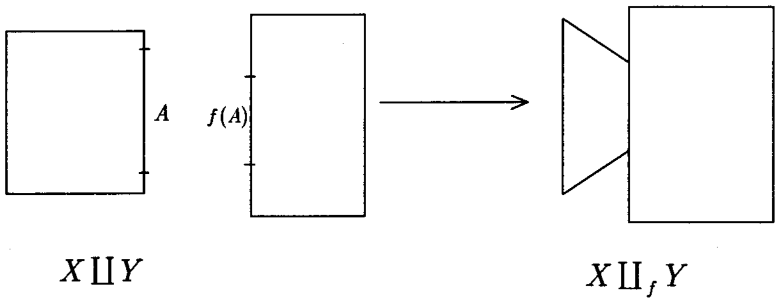
۰-۱-۷- **قضیه** : نگاشت شمول $i:X\to Y$، همریختی پوشای $\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_1(Y,y_0)$ با هسته‌ی N را القا می‌کند. بنابراین $\pi_1(Y)\cong\dfrac{\pi_1(X)}{N}$.

قضیه فوق بعنوان نتیجه ای از قضیه ون کمپن ، در [10,1.26] بیان شده است.

۰-۱-۸- **تعریف** : فرض می‌کنیم X و Y دو فضا و A زیر مجموعه‌ی بسته‌ای از X و $f : A \to Y$ تابع پیوسته‌ای باشد. در اینصورت فضای حاصل از چسباندن X به Y تحت تابع f را با $X \coprod_f Y$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$X \coprod_f Y = \frac{X \coprod Y}{a \sim f(a)}$$

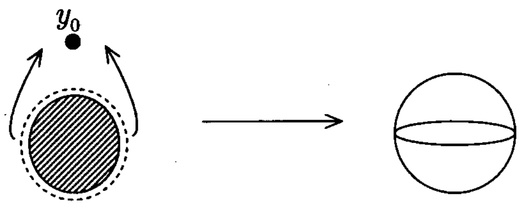
که در آن $X \coprod Y$ ، اجتماع جدا از هم X , Y است .



شکل : $1-1-0$

۰-۱-۹- **مثال** : فرض کنیم $X = D^2$ و $Y = \{y_0\}$ و $f : S^1 \to Y$ تابع ثابت باشد در اینصورت داریم

$$D^2 \coprod_f \{y_0\} = S^2$$



شکل : $2-1-0$

۰-۱-۱۰- **تعریف** : هر کپی همسانریخت با دیسک باز $D^n - S^{n-1}$ را یک n-سلول می‌نامیم و با e^n نمایش می‌دهیم.

۰-۱-۱۱- **تعریف** : فرض کنیم Y یک فضای هاسدورف و $f : S^{n-1} \to Y$ پیوسته باشد ، در اینصورت $D^n \coprod_f Y$ را فضای بدست آمده از Y با چسباندن یک n-سلول تحت تابع f می‌نامیم.

۰-۱-۱۲- **تعریف** : فرض کنیم X یک مجموعه و $\{A_j\}_{j \in J}$ یک خانواده از زیر مجموعه‌های X باشد که X را می‌پوشاند یعنی $X = \bigcup_{j \in J} A_j$ و همچنین فرض می‌کنیم شرایط زیر برقرار باشند :

i) به ازای هر j، A_j یک فضای توپولوژی باشد.

ii) به ازای هر $j,k \in J$، توپولوژی‌ای که A_j روی $A_j \cap A_k$ به عنوان زیر فضایی از A_j القا می‌کند با توپولوژی‌ای که A_k روی $A_j \cap A_k$ بعنوان زیر فضا القا می‌کند ، یکسان باشند.

iii) به ازای هر $j,k \in J$، $A_j \cap A_k$ در A_j و در A_k بسته باشد ،

آنگاه توپولوژی ضعیف روی X که با $\{A_j\}_{j\in J}$ مشخص می‌شود توپولوژی‌ای است که مجموعه‌های بسته‌اش ، زیر مجموعه‌هایی از X مانند F است که $F \cap A_j$ به ازای هر j در A_j بسته باشد.

۰-۱-۱۳- **تعریف**: CW-کمپلکس نسبی (X,A) شامل ، فضای توپولوژیک X و یک زیر مجموعه‌ی بسته از X مانند A و دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های بسته بصورت $(X,A)^k$ ($k \geq 0$) است بطوری که :

i) $(X,A)^0$ از A بوسیله چسباندن 0-سلول‌ها بدست می‌آید.

ii) برای $k \geq 1$، $(X,A)^k$ از $(X,A)^{k-1}$ با چسباندن k-سلول‌ها حاصل می‌شود.

iii) $X = \cup (X,A)^k$.

iv) X دارای توپولوژی ضعیف نسبت به $\left\{(X,A)^k\right\}_k$ است.

در این حالت $(X,A)^k$، K-اسکلت از X نسبت به A نامیده می‌شود.

۰-۱-۱٤- **تعریف** : در تعریف فوق اگر $A = \phi$ آنگاه X را CW-کمپلکس می‌گوییم و K-اسکلت های آن را با X^k نمایش می‌دهیم.

۰-۱-۱۵- **مثال** : فضای $\mathbb{R}P^n$ و $\mathbb{C}P^n$ و $\mathbb{H}P^n$ ، CW-کمپلکس می‌باشند زیرا

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^n$$
$$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$$
$$\mathbb{H}P^n = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \cdots \cup e^{4n}$$

همچنین S^n و D^n، چنبره و بطری کلاین نیز CW-کمپلکس می‌باشد.

۰-۱-۱٦- **تعریف** : نگاشت پیوسته $f : X \to Y$ را n-هم ارز ($n \geq 1$) گویند اگر f یک تناظر یک‌به‌یک بین مؤلفه‌های راهی X و مؤلفه‌های راهی Y، القا کند و برای هر $x \in X$، $f_* : \pi_q(X,x) \to \pi_q(Y,f(x))$ برای $0 < q < n$ یکریختی و برای $q = n$ برووریختی باشد.

۰-۱-۱۷- **قضیه** : فرض کنید $f : X \to Y$ ، n -هم ارز و (P,Q) ، CW-کمپلکس نسبی با $\dim (P-Q) \leq n$ باشد. نگاشت‌های $g : Q \to X$ و $L : P \to Y$ داده شده است بطوری که $L|_Q = fog$ ، در اینصورت نگاشت $g' : P \to X$ موجود است که $g'|_Q = g$ و $L \cong fog'$ نسبت به Q. [9,2.2.2]

۰-۱-۱۸- **تعریف**: نگاشت $f : X \to Y$ را یک هم ارزی هموتوپی ضعیف می نامند هرگاه به ازای هر $n \geq 0$،

$$f_* : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,f(x))$$

یکریختی باشد.

۰-۱-۱۹- **قضیه** : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در اینصورت یک CW-کمپلکس مانند Z و یک هم‌ارزی هموتوپی ضعیف مانند $f : Z \to X$ وجود دارد. [10,4.12]

۰-۱-۲۰- **تعریف** : تابع f در قضیه ۰-۱- ۱۸ را یک CW-تقریب برای X می‌نامیم.

۰-۱-۲۱- **تعریف** : زوج (Z,A) را شامل یک CW-کمپلکس مانند Z و یک زیر کمپلکس مانند A را یک CW-زوج می‌نامند.

۰-۱-۲۲- **تعریف** : زوج (X,A) را در نظر می‌گیریم که A یک CW-کمپلکس است. اگر (Z,A) یک CW-زوج و تابع $f : Z \to X$ وجود داشته باشند بطوری که ;

i) $f|_A$ همانی باشد.

ii) $f_* : \pi_i(Z) \to \pi_i(X)$ برای $i > n$ یکریختی و برای $i = n$، تکریختی باشد ،

آنگاه f را یک مدل $n\ CW$-همبند برای زوج (X,A) می‌گوییم.

۰-۱-۲۳- **قضیه** : فرض کنیم $g : (X,A) \to (X',A')$ تابع پیوسته و $f : (Z,A) \to (X,A)$ و $f' : (Z',A') \to (X',A')$ به ترتیب مدل $n\ CW$ -همبند و مدل $n'\ CW$-همبند برای زوج‌های (X,A) و (X',A') باشند آنگاه نگاشت $L : Z \to Z'$ موجوداست که $L|_A = g|_A$ و دیاگرام زیر بطور رهموتوپی نسبت به A جابجا می‌شود یعنی $g \circ f \sim f' \circ L$ و $g \circ f|_A = f' \circ L|_A$. و L بطور هموتوپی نسبت به A یکتا است. [10,4.16]

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "L"'] & X \arrow[d] \\ Z' \arrow[r, "f'"'] & X' \end{tikzcd}$$

دیاگرام: $1-1-0$

۰-۱-۲٤- **تعریف** : فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. زوج $(\tilde{X},p)$ را یک فضای پوششی برای X گویند هر گاه در شرایط زیر صدق کند :

i) $\tilde{X}$ همبند راهی باشد.

ii) یک پوشش باز مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ موجود باشد بطوری که برای هر α، $p^{-1}(U_\alpha)$ بصورت اجتماع جدا از هم مجموعه‌های باز در $\tilde{X}$ باشد.

iii) $p|_{p^{-1}(U_\alpha)} : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ همسان ریختی باشد.

فرض کنیم $\{(Z_n,A)\}$ یک خانواده‌ی شما را ازمدل های $n\ CW$-همبند برای (X,A) باشند آنگاه قضیه ۰-۱-۲۱ برج از CW-مدل ها برای (X,A) را تشکیل می‌دهد. که مثلث‌های راست بطور هموتوپی نسبت به A جابجایی و مثلث‌های سمت چپ جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \\ & Z_2 \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\ & Z_1 \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & Z_0 \arrow[l] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

دیاگرام : $2-1-0$

فضای Z_0 همبند راهی است و هم‌ارز هموتوپی با مؤلفه راهی‌ای از X است که شامل A است. بنابراین می توان Z_0 را برابر با این مؤلفه در نظر گرفت.

Z_1، همبند ساده، ودارای خواص هموتوپی پوشش‌های عمومی است و نگاشت $Z_n \to X$ $(n > 1)$ پوشش n-همبند برای X است.

۰-۱-۲۵- **تعریف** : اگر X یک CW-کمپلکس دلخواه و A زیر فضای تک نقطه‌ای از X باشد. برج تشکیل شده از CW

- مدل های n-همبند برای زوج (X, A) را برج وایتهید می‌گوییم.

$$\cdots \longrightarrow Z_2 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow Z_0 \longrightarrow X$$

Z_n ، n-همبند است.

۰-۱-۲۶- **مثال** : $(\mathbb{R}, \exp)$ یک فضای پوششی برای S' است که در آن

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to S' \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

۰-۱-۲۷- **تعریف** : فرض کنید $(\tilde{X}, p)$ یک فضای پوشش برای X باشد. آنرا پوشش عمومی برای X گوییم هرگاه $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ ، ($\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ که $\tilde{x}_0$ نقطه پایه ای است) یعنی X همبند ساده باشد.

۰-۱-۲۸- **قضیه** : فرض کنید $(\tilde{X}, p)$ یک فضای پوششی برای X و $f : (I, 0) \to (X, x_0)$ یک راه در X باشد ، آنگاه راه منحصر به فرد $\tilde{f} : (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ در $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ که $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ موجود است که $p\tilde{f} = f$. [10,1-33]

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (I, 0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

دیاگرام: $0-1-3$

۰-۱-۲۹- **تعریف** : فرض کنیم G یک گروه و Y یک فضای توپولوژیک باشد. در اینصورت گوییم G روی Y عمل می‌کند

اگر تابع (پیوسته) $\begin{matrix} G \times Y \to Y \\ (g,y) \mapsto gy \end{matrix}$ موجود باشد بطوری که به ازای هر $g, g' \in G$ و $y \in Y$;

i) $(gg')y = g(g'y)$،

ii) $1y = y$ که 1 عنصر واحد G است.

در این حالت می‌گوییم Y یک G-مجموعه (G- فضا) است.

۰-۱-۳۰- **تعریف** : می‌گوییم G بطور ترایا بر Y عمل می‌کند اگر به ازای هر $y, y' \in Y$ عنصر $g \in G$ چنان موجود باشد

که $gy = g'$.

۰-۱-۳۱- **تعریف** : فرض کنیم گروه G روی مجموعه Y عمل می‌کند و $y \in Y$ دلخواه باشد. آنگاه مدار y بصورت زیر

تعریف می‌شود.

$$\mathrm{o}(y) = \{gy : g \in G\} \subseteq Y$$

۰-۱-۳۲- **تعریف** : فرض کنیم گروه G روی مجموعه Y عمل کند و $y \in Y$ دلخواه باشد. آنگاه

$G_y = \{g \in G : gy = y\} \leq G$ را پایدار ساز y گویند.

۰-۱-۳۳- **قضیه** : اگر Y یک G-مجموعه باشد و $y \in Y$ دلخواه ، آنگاه

$$|\mathrm{o}(y)| = [G : G_y]$$

در حالت خاص اگر G بطور ترایا عمل کند آنگاه

$$|Y| = [G : G_y].$$

برهان: رجوع شود به صفحه 382 در [9].

۰-۱-۳٤- **تعریف** : فرض کنید G یک گروه و τ یک توپولوژی روی G باشد. در اینصورت گروه G را یک گروه

توپولوژیک گوییم هرگاه نگاشت‌های زیر پیوسته باشند.

i) $$\begin{matrix} G \times G \longrightarrow G \\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 . g_2 \end{matrix}$$

ii) $$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

۰-۱-۳۵- **تعریف** : فضای توپولوژیک X را همگن گوییم هرگاه به ازای هر $a,b \in X$ همسانریختی ای مانند $f : X \to X$ موجود باشدبطوری که $f(a) = b$.

۰-۱-۳۶- **قضیه** : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H یک زیر گروه از آن باشد و $q : G \to G/H$ نگاشت خارج قسمتی متعارف باشد آنگاه

i) G یک فضای همگن است.

ii) G/H فضای همگن است.

iii) q نگاشت باز است.

iv) اگر $H \lhd G$ آنگاه G/H نیز یک گروه توپولوژیک است. [۱-۱-۲و۲]

۰-۱-۳۷- **قضیه** : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و H یک زیر گروه نرمال از آن باشد و نیز فرض کنید $f : G \to L$ مورفیسم‌ای در τG (کاتاگوری گروه‌های توپولوژیک) باشد. در اینصورت اگر $f(H) = \{e\}$ آنگاه نگاشت پیوسته و منحصر به فرد $f^* : G/H \to L$ وجود دارد بطوریکه دیاگرام زیررا جابجا می‌کند. [۱-۱-۲و۲]

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & L \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "f^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

دیاگرام: 4-1-0

فصل ۱

کلاف بندی

در این فصل مفهوم کلاف بندی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نگاشت‌های پوششی، یک دسته ازکلاف بندی ها است. سپس بدنبال شرایطی هستیم که بتوانیم لم بالابر راهها را برای کلاف بندی ها ثابت کنیم.

۱-۱- خاصیت بالابر هموتوپی

۱-۱-۱- **تعریف** : فرض کنیم $P : E \to B$ نگاشت پیوسته باشد. می‌گوییم P دارای خاصیت بالابر هموتوپی نسبت به فضای X است. اگر برای هر دو تابع $\tilde{f} : X \to E$ و $F : X \times I \to E$ که $P\tilde{f} = Fi$ ($\begin{array}{rcl} i : X & \to & X \times i \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array}$) نگاشت $F' : X \times I \to B$ موجود باشد که دیاگرام زیر جابجا شود.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "P"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "F'"] & B \end{tikzcd}$$

دیا گرام: 1-1-1