بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به:

پدر و مادرم دلسوزم

و

خواهران و برادران عزیزم

سپاسگزاری

سپاس خدایی که انسان را آفرید و او را به فضیلت تعلیم و تعلم بر دیگر مخلوقات برتری بخشید. بر خود لازم می دانم از الطاف و عنایت‌های بی‌دریغ همه عزیزانی که مرا در این راه راهنمایی کرده اند، سپاسگزاری نمایم.

با درود و سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی پدر و مادر دلسوز و مهربانم که سجده‌ی ایثارشان گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارشان لحظه‌های مهربانی را به من آموخت.

با تقدیر و تشکر از استاد فرهیخته و فرزانه سرکار خانم دکتر جاهدی که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند صحیفه‌های سخن را علم‌پرور نمود، همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان‌نامه بوده است. از استاد محترم آقای دکتر حاجی شعبانی که مشاوره این پروژه را به عهده داشتند نیز تشکر می‌نمایم.

سپاس و درود بر دیگر اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شیراز: جناب آقای دکتر فخارزاده جهرمی، جناب آقای دکتر ملکی، جناب آقای دکترحسام الدینی، جناب آقای دکتر مهدی پور، جناب آقای دکتر خرمی و جناب آقای دکتر هاشمی که در طول این دوره افتخار شاگردی و کسب دانش و معرفت را از ایشان داشتم.

هم‌چنین از دوستان عزیز و مهربان که در این سال‌ها لحظات و خاطرات خوشی در کنارشان رقم خورد قدردانی می‌نمایم.

چکیده

فضای نرم‌دار فازی و نظریه بهترین تقریب

بوسیله‌ی:

سمانه فرهادی

نظریه بهترین تقریب از جمله مسائلی است که در سال‌های اخیر توسط محققین بسیاری روی فضای نرم‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است. این موضوع در زمینه‌های مختلفی نظیر تصاویر مجازی در کامپیوتر، آنالیز جاذبه زمین با استفاده از داده‌های ماهواره‌ای و... کاربرد دارد. درصورتی که فضا، نرم‌دار فازی باشد، مسئله بهترین تقریب تأثیر قابل توجهی در بالا بردن کیفیت تصویر و حذف اغتشاش‌های آن دارد. در این پایان‌نامه ضمن معرفی فضای نرم‌دار فازی، مفهوم بهترین تقریب را در فضای نرم‌دار کلاسیک و فضای نرم‌دار فازی بررسی نموده و به اثبات قضایا و نتایج مربوطه خواهیم پرداخت. در انتها فضای ۲- نرم فازی را معرفی نموده و نتایجی در رابطه با مسئله بهترین تقریب در این ارائه فضا خواهیم نمود.

فهرست

عنوان | صفحه

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

فصل اول

مقدمات و پیش نیازها

۱–۱ مقدمه و اهداف پایان‌نامه

نظریه مجموعه‌های فازی اساساً نظریه‌ای است که در آن هر چیزی به موضوع درجه‌بندی یا به موضوعاتی که قابلیت ارتجاعی داشته باشد برمی‌گردد و به عنوان ابزار قدرتمندی برای مدل‌سازی مفاهیم مبهمی که در زمینه علوم مهندسی اتفاق می‌افتد، به شمار می‌رود. علاوه براین کاربرد بسیار مفیدی در زمینه‌های مختلف نظیر دینامیک جمعیت، برنامه نویسی کامپیوتری، سیستم‌های دینامیکی غیرخطی، مسائل پایدار و... دارد. استفاده از نظریه فازی و مفاهیم اساسی آن و ارتباط این نظریه با روش‌های کلاسیکی می‌تواند در حل مسائل متعددی به ویژه در زمینه تحلیل سیستم به کار گرفته شود.

تعیین داده‌های یک جدول که مقادیر دقیق آن معلوم نباشد از متداول‌ترین کاربرد بهترین تقریب در طول تاریخ است. در بسیاری از موارد تقریب چندجمله‌ای برای بهترین تقریب مقادیر تابع جمع‌آوری شده از جدول استفاده می‌شود. اما با روی کار آمدن ماشین‌های محاسباتی مدرن، این نیاز برای داده‌های زیاد رفع شد. در حالت کلی از نظریه بهترین تقریب به عنوان پایه انواع فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی، حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی و

مسائل مرتبط استفاده می‌شود. همچنین از نظریه بهترین تقریب می‌توان به طور گسترده برای آنالیز فوریه عددی در سری‌های زمانی و پدیده‌های چرخهای استفاده کرد. این نظریه نقش اساسی در کامپیوترهای دیجیتالی، آنالیز رادیو اکتیو، پردازش تصویر و گرافیک‌های کامپیوتری دارد.

مفهوم مجموعه فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور زاده معرفی گردید([۴۰]) سپس در سال ۱۹۸۴، مفهوم فضای نرم‌دار فازی توسط تعدادی از ریاضیدانان از جمله کتساراز[1] ([۲۳])، فلبین [2]([۱۵]، [۱۶]و [۱۷])، بگ[3] و سامانتا[4]([۴]) معرفی و توسعه داده شد. سپس در سال ۲۰۰۸ آقایان واعظپور و کریمی ([۳۷]) مفهوم فضای نرم‌دارفازی را با استفاده از مفهوم $t-$ نرم پیوسته ارائه کردند.

در سال‌های اخیر مفاهیم بسیاری از فضای نرم‌دار به فضای نرم‌دار فازی تعمیم داده شده است. از جمله مسائل مهم در این راستا بررسی موضوع بهترین تقریب در فضای نرم‌دار فازی است. بهترین تقریب پیشرفت گستردهای در علوم مهندسی داشته و ابزار مناسبی برای تقریب توابع می‌باشد. شواهد نشان می‌دهد که اولین استفاده از تقریب به بابلیان قدیم و مصر باستان برمی‌گردد. در قدیم از بهترین تقریب برای پیشگویی موقعیت خورشید، ماه و سیارات شناخته شده در آن زمان استفاده می‌کردند و قبل از میلاد مسیح در مصر باستان نیز از یک تابع تقریب برای محاسبه موقعیت اجرام آسمانی استفاده می‌نمودند و بعد از میلاد مسیح برای ساختن تقویم استاندارد پادشاهی از بهترین تقریب استفاده شده است.

مطالعه سیستماتیکی ویرامانی[5]([۳۸]) روی نظریه بهترین تقریب در فضای متریک

---

[1] Katsaras
[2] Felbin
[3] Bag
[4] Samanta
[5] Veeramani

فازی وسیله‌ای برای بیان $t-$ بهترین تقریب در فضای نرم‌دار و ارائه تعاریف مناسب در این فضا فراهم آورده است. تعمیم این مفاهیم به فضای $n-$ نرم فازی می‌تواند برای استفاده در بعضی کاربردها مفید واقع شود.

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی خواص توپولوژیکی فضای نرم‌دار فازی می‌پردازیم([۹]). سپس ضمن بررسی مفهوم $t-$ بهترین تقریب در فضای نرم‌دار فازی و ارائه قضایای مربوطه، به بررسی این مفهوم در فضای ۲− نرم فازی پرداخته می‌شود. برای این منظور سعی می‌شود تا بعضی از قضایا و روابط فضای نرم‌دار فازی به فضای ۲− نرم فازی تعمیم داده شود.

۱−۲ خواص توپولوژیکی فضای نرم دار و مسئله بهترین تقریب

مفهوم نرم، تعمیم طول یک بردار می‌باشد. بنابراین هر تابع حقیقی مقدار که در تعریف زیر صدق کند نرم نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱: تابع $\|\cdot\|$ از فضای برداری X به توی $\mathbb{R}$ را نرم می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱) اگر $\|x\|=0$ آنگاه $x=0$

۲) برای هر $x\in X$ و $\alpha\in\mathbb{F}$، $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.

۳) برای هر $x,y\in X$، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

تعریف ۲.۱: جفت $(X,\|.\|)$ که در آن X یک فضای برداری و $\|.\|$ یک نرم تعریف شده روی X است را فضای نرم‌دار گوئیم.

مثال ۳.۱: اگر $X=\mathbb{C}^N$ در این صورت

$$\| z \| = \sqrt{| z_1 |^2 + \dots + | z_N |^2}, \qquad z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N.$$

یک نرم روی $\mathbb{C}^N$ است که به نرم اقلیدسی معروف است. لذا $(\mathbb{C}^N, \| z \|)$ یک فضای نرم‌دار می‌باشد.

تعریف ۴.۱: فرض کنیم $(X, \| . \|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. دنباله $\{x_n\}$ از عناصر X را به $x \in X$ همگرا گوییم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq M$، $\| x_n - x \| \leq \varepsilon$ یا به طور ساده‌تر $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

تعریف ۵.۱: دو نرم تعریف شده روی یک فضای برداری یکسان هم ارز نامیده می‌شوند اگر با همگرایی یکسان تعریف شوند به بیان دیگر $\| . \|_1$ و $\| . \|_2$ روی X هم‌ارز هستند اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X و $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_1 = 0$ اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_2 = 0$ هرگاه $n \to \infty$.

قضیه ۶.۱: اگر X یک فضای برداری متناهی البعد باشد آنگاه هر دو نرم روی X هم‌ارز می‌شوند.

اثبات: به قضیه ۱۳.۳.۱ ([۹]) مراجعه شود. □

مثال ۷.۱: نرم‌های زیر که در R^2 تعریف شده‌اند هم‌ارز می‌باشند.

$$\| (x, y) \|_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \| (x, y) \|_2 = | x | + | y |,$$

$$\| (x, y) \|_3 = \max\{| x |, | y |\}.$$

قضیه ۸.۱: فرض کنیم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نرم‌هایی روی فضای برداری X باشند. آنگاه $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ هم‌ارز می‌باشند اگر و فقط اگر اعداد مثبت α و β وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $x \in X$، $\alpha \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1$.

اثبات: به قضیه۱۱.۳.۱ ([۹]) مراجعه شود. □

تعریف ۹.۱: ([۹]) اگر x عضوی از فضای نرم‌دار X و r یک عدد مثبت باشد. آنگاه گوی باز، گوی بسته و کره به مرکز x و شعاع r به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(x, r) = \{y \in X : \| y - x \| < r\},$$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \| y - x \| \leq r\},$$

$$S(x, r) = \{y \in X : \| y - x \| = r\}.$$

تعریف ۱۰.۱: ([۹]) فضای نرم‌دار X را کامل گوئیم در صورتی که هر دنباله کوشی در X، به یک عضو از X همگرا باشد. فضای نرم‌دار کامل، باناخ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱: ([۳۳]) اگر $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای خطی نرم دار و $G \subset X$ باشد آنگاه به ازای هر $x \in X$، فاصله نقطه x از زیر مجموعه G به صورت زیر تعریف می شود:

$$d(G, x) = \inf\{\| x - y \| : y \in G\}.$$

قضیه ۱۲.۱: ([۳۳]) فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار روی میدان اسکالر F و G یک زیر فضا از X باشد، در این صورت

۱) برای هر $a \in G$، $x \in X$، $d(G, x + a) = d(G, x)$.

۲) برای هر $x, y \in X$، $d(G, x + y) \leq d(G, x) + d(G, y)$.

۳) برای هر $\alpha \in F$، $x \in X$ داریم $d(G, \alpha x) = |\alpha| d(G, x)$

۴) برای هر $x, y \in X$ داریم $|d(G, x) - d(G, y)| \leq \| x - y \|$.

اثبات: (۱) فرض کنیم $x \in X$، $a \in G$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. با استفاده از تعریف $d(G, x)$ عنصر $a_0 \in G$ وجود دارد به طوری که $\| x - a_0 \| \leq d(G, x) + \varepsilon$ در نتیجه

$$d(G, x + a) \leq \| x + a - (a_0 + a) \| = \| x - a_0 \| \leq d(G, x) + \varepsilon$$

و چون $\varepsilon > 0$ اختیاری می باشد، بنابراین

$$d(G, x + a) \leq d(G, x) \qquad (۱-۱)$$

حال اگر در رابطه (۱-۱)، $x + a \in X$ را با x و $-a \in G$ را با $a \in G$ جایگزین کنیم داریم

$$d(G, x) \leq d(G, x + a) \qquad (۲-۱)$$

بنابراین از روابط (۱ - ۱) و (۱ - ۲) نتیجه می گیریم که برای هر $a \in G$، $x \in X$،

$$d(G, x + a) = d(G, x).$$

(۲) فرض کنیم $x, y \in X$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. با استفاده از تعریف $d(G, x)$ و $d(G, y)$ عناصر $a_1, a_2 \in G$ موجود است به طوری که

$$\| y - a_2 \| \leq d(G, x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$\| x - a_1 \| \leq d(G, x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین

$$d(G, x + y) \leq \| x + y - (a_1 + a_2) \| \leq \| x - a_1 \| + \| y - a_2 \| \leq d(G, x) + d(G, y) + \varepsilon$$

و در نتیجه $d(G, x+y) \leq d(G, x) + d(G, y)$.

(۳) فرض کنیم $\alpha \neq 0$، $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشند. طبق تعریف $a_0 \in G$ چنان وجود دارد که

$$\| x - a_0 \| \leq d(G, x) + \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

از طرفی

$$d(G, \alpha x) \leq \| \alpha x - \alpha a_0 \| = |\alpha| \| x - a_0 \| \leq |\alpha| d(G, x) + \varepsilon,$$

چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است بنابراین

$$d(G, \alpha x) \leq |\alpha| d(G, x). \qquad (۱-۳)$$

حال اگر در رابطه (۱ − ۳)، αx را با x و $\frac{1}{\alpha}$ را با α جایگزین کنیم آنگاه داریم

$$d(G, x) = d(G, \frac{1}{\alpha}\alpha x) \leq \frac{1}{|\alpha|} d(G, \alpha x)$$

و در نتیجه

$$|\alpha| d(G, x) \leq d(G, \alpha x) \qquad (۱-۴)$$

بنابراین از روابط (۱ − ۳) و (۱ − ۴) نتیجه می گیریم که

$$d(G, \alpha x) = |\alpha| d(G, x).$$

لذا به ازای $\alpha = 0$ تساوی به وضوح برقرار است.

(۴) فرض کنیم $x, y \in X$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشند. بنابراین $a_0 \in G$ چنان وجود دارد که

$$\| y - a_0 \| \leq d(G, y) + \varepsilon.$$

پس

$$d(G, x) \leq \| x - a_0 \| \leq \| x - y \| + \| y - a_0 \leq \| x - y \| + d(G, y) + \varepsilon.$$

چون $\varepsilon > 0$ اختیاری است، پس

$$d(G, x) - d(G, y) \leq \| x - y \| .$$

حال اگر در رابطه اخیر جای x و y را عوض کنیم آنگاه

$$d(G, y) - d(G, x) \leq \| y - x \|$$

و در نتیجه

$$| d(G, x) - d(G, y) | \leq \| x - y \| .$$

□

تعریف ۱.۱۳: ([۳۳]) فرض کنیم $(X, \| . \|)$ یک فضای نرم‌دار، G یک زیر فضا از X و $x \in X$ باشد. $g_0 \in G$ بهترین تقریب x از G نامیده می‌شود اگر

$$\| x - g_0 \| = d(G, x).$$

مجموعه همه بهترین تقریب‌های x از G را با $p_G(x)$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$p_G(x) = \{g \in G : \| x - g \| = d(G, x)\}.$$

قضیه ۱.۱۴: [۳۳] فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای نرم‌دار X باشد. در این صورت

۱) اگر $x \in G$، آنگاه $p_G(x) = \{x\}$.

۲) اگر G بسته نباشد و $x \in \overline{G} \setminus G$ آنگاه $p_G(x) = \emptyset$

اثبات: (۱) فرض کنیم $x \in G$، آنگاه $\inf\{\| x - g \| : g \in G\} = ۰$ بنابراین اگر $y \in p_G(x)$ آنگاه $\| x - y \| = ۰$ و در نتیجه $x = y$

(۲) فرض کنیم $x \in \overline{G} \setminus G$ بنابراین به ازای هر $n \in N$، $x_n \in G$ وجود دارد به طوری که $\| x_n - x \| \leq \frac{۱}{n}$ یعنی $d(G, x) = ۰$ پس $p_G(x) = \emptyset$. □

قضیه ۱۴.۱ نشان می‌دهد که اگر X یک فضای خطی نرم‌دار و G یک زیر فضا از X باشد آنگاه برای هر $x \in G$، مجموعه $p_G(x)$ ناتهی است و در صورتی که زیر فضای G بسته نباشد آنگاه برای $x \in \overline{G} \setminus G$ مجموعه $p_G(x)$ تهی است.

قضیه ۱۵.۱: ([۳۲]) فرض کنیم G یک زیر فضا از فضای نرم‌دار X و $x \in X$، در این صورت

۱) اگر $z \in p_G(x)$، آنگاه برای هر اسکالر α، $\alpha z \in P_G(\alpha x)$.

۲) اگر $z \in P_G(x)$، آنگاه برای هر $g \in G$، داریم $z + g \in P_G(x + g)$.

اثبات: (۱) اگر $g \in G$ و $\alpha \neq ۰$ آنگاه:

$$\begin{aligned} \| \alpha x - g \| &= | \alpha | \| x - \tfrac{1}{\alpha} g \| \geq | \alpha | \| x - z \| \\ &\geq \| \alpha x - \alpha z \| . \end{aligned}$$

بنابراین $\alpha z \in P_G(\alpha x)$.

(۲) اگر $g_۰ \in G$ آنگاه

$$\| x + g - g_0 \| \geq \| x - z \| = \| x + g - (z + g) \|$$

پس $z + g \in P_G(x + g)$. □

زیر فضای $G \subset X$ که برای هر $x \in X$ دارای ویژگی $P_G(x) \neq \emptyset$ باشد را مجموعه پروکسیمینال در X می‌نامیم.

قضیه ۱.۱۶: فرض کنیم G یک زیر فضای فشرده از فضای نرم‌دار X باشد. آنگاه G در X پروکسیمینال می‌باشد.

اثبات: به قضیه(۲.۳.۳) ([۳۳]) مراجعه شود. □

قضیه ۱.۱۷: اگر G یک زیر فضا متناهی البعد از فضای نرم‌دار X باشد. آنگاه G در X پروکسیمینال می‌باشد.

اثبات: به قضیه (۲.۳.۵) ([۳۳]) مراجعه شود. □

۱—۳ خواص توپولوژیکی فضای ۲— نرم و مسئله بهترین تقریب

نظریه فضای خطی ۲— نرم، ابتدادر سال ۱۹۶۴ توسط گاهلر[۶]([۱۹]) معرفی شد و سپس مطالعاتی دقیق‌تر با موضوع‌های متفاوت توسط ریاضیدانان بسیاری چون اسکی [۷] و وایت[۸]([۲۵])، گاناوان [۹] و مشدی [۱۰]([۲۲]) روی این نظریه انجام شد. یکی از موضوعات بسیار جالب در این فضا، بررسی مسئله بهترین تقریب می‌باشد.

بعضی از نتایج روی نظریه بهترین تقریب در فضای ۲—نرم را افرادی چون ایل مالای [۱۱]، راوی [۱۲]([۱۲]،[۱۳])، فرانیک [۱۳]([۱۸])، کیم [۱۴] و چو[۱۵]([۲۴]) ارائه نمودند که پایان این

[۶] Gahler
[۷] Iseki
[۸] White
[۹] Gunawan
[۱۰] Mashadi
[۱۱] Elumalai
[۱۲] Ravi
[۱۳] Franic
[۱۴] Kim
[۱۵] Cho

تحقیقات، اطلاعات از فضای نرم‌دار خطی است که توسط سینگر[۱۶] ([۳۵]) ارائه و گسترش یافت.

تعریف ۱.۱۸: فرض کنیم X یک فضای خطی حقیقی با بعد بزرگتر از ۱ و $\|\cdot,\cdot\|$، تابع حقیقی مقدار از $X \times X$ با شرایط زیر باشد:

۱) $\|x,y\| = 0$ اگر و فقط اگر x و y وابسته خطی باشند.

۲) برای هر $x,y \in X$، $\|x,y\| = \|y,x\|$.

۳) برای هر $x,y \in X, \alpha \in R$، $\|\alpha x,y\| = |\alpha| \|x,y\|$.

۴) برای هر $x,y,z \in X$، $\|x+y,z\| \leq \|x,z\| + \|y,z\|$.

در این صورت $\|\cdot,\cdot\|$، یک ۲− نرم روی X و $(X,\|\cdot,\cdot\|)$، فضای خطی حقیقی ۲− نرم نامیده می‌شود.

مثال ۱.۱۹: فرض کنیم $X = R^3$ فضای خطی حقیقی باشد. اگر $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \longrightarrow R$ را به صورت $\|x,y\| = max\{|x_1y_2 - x_2y_1|, |x_2y_3 - x_3y_2|, |x_3y_1 - x_1y_3|\}$ تعریف کنیم جائیکه $x = (x_1,x_2,x_3)$ و $y = (y_1,y_2,y_3)$ بردارهایی در R^3 باشند آنگاه $(R^3,\|\cdot,\cdot\|)$، یک فضای خطی ۲− نرم می‌باشد.

تعریف ۱.۲۰: دنباله $\{x_n\}$ در فضای ۲− نرم X، همگرا نامیده می‌شود اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $z \in X$، $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, z\| = 0$.

---
[۱۶] Singer

تعریف ۲۱.۱: [۲۶] دنباله $\{x_n\}$ در فضای ۲− نرم X، کوشی نامیده می‌شود اگر $y, z \in X$ مستقل خطی وجود داشته باشند به طوری که $\lim_{m,n} \| x_m - x_n, z \| = 0$ و $\lim_{m,n} \| x_m - x_n, y \| = 0$.

تعریف ۲۲.۱: ([۱]) یک فضای خطی ۲− نرم که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد، فضای ۲− باناخ نامیده می‌شود.

مثال ۲۳.۱: ([۱۹]) فرض کنیم P_n، مجموعه همه چند جمله‌ای‌های حقیقی با درجه کوچکتر یا مساوی n روی بازه $[0, 1]$ باشد. در این صورت با در نظر گرفتن جمع و ضرب اسکالر معمولی، P_n، یک فضای خطی روی R می‌شود.

اگر فرض کنیم $\{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$، نقاط ثابت متمایز در بازه $[0, 1]$ بوده و برای f, g مستقل خطی، ۲− نرم روی P_n را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$\| f, g \| = \sum_{i=0}^{2n} | f(x_i) \times g(x_i) | .$$

آنگاه $(P_n, \| ., . \|)$ یک فضای ۲− باناخ می‌باشد.

اکنون به تعریف فاصله یک نقطه از یک مجموعه و بهترین تقریب در فضای ۲− نرم می‌پردازیم ([۱۲]،[۱۳]).

تعریف ۲۴.۱: فرض کنیم $(X, \| ., . \|)$ یک فضای خطی ۲− نرم و G یک زیر مجموعه ناتهی از X باشد. آنگاه برای هر $x \in X$ و هر $z \in X \setminus G$ مستقل از x، فاصله نقطه x از زیر مجموعه G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $d_z(G, x) = \inf\{\| x - g, z \| : g \in G\}$.

مجموعه بهترین تقریب‌های x از زیر مجموعه G، به صورت زیر می‌باشد:

$$P_{G,z}(x) = \{g_0 : \| x - g_0, z \| = d_z(G, x)\}$$

در صورتی که $Pr_G(x) \neq 0$ آنگاه G را مجموعه پروکسیمینال می‌گوئیم.

۱ـــ۴ مفاهیم مقدماتی فازی

پروفسور لطفی‌زاده بعنوان مبتکر منطق فازی شهرت جهانی دارد. وی طی یک مقاله کلاسیک که در سال ۱۹۶۵ به چاپ رسید مفهوم « مجموعه‌های فازی » را که اساس نظریه تجزیه و تحلیل سیستمهای پیچیده است، معرفی نمود که در آن « زبان طبیعی » به جای متغیرهای عددی برای تشریح رفتار و عملکرد سیستمها به کار می‌رود و به کاربردهای این نظریه در حافظه مصنوعی، زبان شناسی، منطق، نظریه تصمیمات، نظریه کنترل، سیستم‌های خبره و شبکه‌های اعصاب می‌توان اشاره کرد ([۴۰]).

اگرچه منطق فازی کاربردهای خیلی وسیع‌تر از منطق متداول دارد اما پروفسور لطفی‌زاده معتقد است که منطق فازی اکسیر و نوشدارو نیست. وی می‌گوید« کارهای زیادی هست که انسان می‌تواند به آسانی انجام دهد در حالی که کامپیوتر و سیستم‌های منطقی قادر به انجام آنها نیستند.»

پس از گذشت دو دهه از ارائه آن، نظریه مجموعه‌های فازی به صورت وسیعی درون مفاهیم و تکنیک‌های مربوط به پدیده‌های پیچیده گسترش یافت. همچنین در زمینه فضای نرم‌دار کلاسیک به کار گرفته شد و بسیاری از ریاضیدانان از زوایای مختلف به بررسی تعمیم فضای نرم‌دار کلاسیک به فضای نرم‌دار فازی پرداخته‌اند.

به ویژه در مورد پدیده‌هایی که توسط روش‌های کلاسیک مبتنی بر نظریه احتمال و منطق دو تایی قابل حل نبودند، تفسیر، تجزیه و تحلیل فازی به کار گرفته شد.

با این حال همواره این سوال مطرح است آیا مسائل علمی وجود دارند که با استفاده از