بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بـهشتی

دانشکده علوم ریاضی

# موضوع :

## موجک های چارچوب پارسوال نیمه متعامد و آنالیز چند تجزیه ای تعمیم یافته

استاد راهنما :

دکتر فرهاد خلّت

استاد مشاور :

دکتر سهراب علی یوسفی

نگارنده :

راضیه پیله وران



شهریور ۸۸

تاریخ ........................
شماره ........................
پیوست........................

"بسمه تعالی"

دانشگاه شهید بهشتی

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

## «صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

باز گشت به مجوز دفاع شماره ۹۸۱۲ /۲۰۰/ ۶/ مورخ ۸۸/۶/۲۵ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان‌نامه خانم: **راضیه پیله‌وران** به شماره شناسنامه **۳۴۸** صادره از **خرم‌آباد** متولد **۱۳۶۰** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد پیوسته **ریاضی**

**با عنوان:**

**موجک‌های چارچوب پارسوال نیمه متعامد و آنالیز چند تجزیه‌ای تعمیم‌یافته**

**به راهنمایی:**

**آقای دکتر فرهاد خلت**

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۸/۶/۲۵** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ **۱۸/۵ (هیجده و نیم)** و درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

| | مرتبه علمی | نام دانشگاه |
|---|---|---|
| ***۱- استاد راهنما:*** آقای دکتر فرهاد خلت | استادیار | شهید بهشتی |
| ***۲- استاد مشاور:*** *آقای دکتر سهرابعلی یوسفی* | دانشیار | شهید بهشتی |
| ***۳- استاد داور:*** آقای دکتر هاشم پروانه‌مسیحا | استادیار | خواجه نصیرالدین طوسی |
| ***۴- استاد داور:*** آقای دکتر سیدعلیرضا حسینیون | استاد | شهید بهشتی |
| **۵- مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی | دانشیار | شهید بهشتی |

هر ظرفی به آن چه در آن گذارده شود به تنگی گراید جز ظرف دانش که گشاده تر گردد.

حضرت علی (ع)- نهج البلاغه

تقدیم :

دو عبادتگاه جانم

دو محراب دلم

خورشید و ماه زندگیم

به دو شمعی که عاشقانه می سوزند

تا به شبستان جانم روشنی بخشند

پدرم و نازنین مادرم

سپاس و تقدیم فراوان از :

استاد راهنمای گرانقدر و عزیزم جناب دکتر فرهاد خلّت که با تجربه های ارزنده علمی و فکری و نصیحتهای بی دریغ خود، با گشاده روی و صبوری در طی این دوره راه گشایم بودند.

استادان ارجمند جناب آقای دکتر سید علیرضا حسینیون و سرکار خانم دکتر پروانه هاشم مسیحی و جناب آقای دکتر سهرابعلی یوسفی که برای جلسه دفاع اینجانب قبول زحمت نمودند.

## چکیده

در این پایان نامه موجک های چارچوب نیمه متعامد و موجک هـای چـارچوب پارسـوال در $L^2(\mathbb{R}^d)$ بـا اتساعهای ماتریسی به فرم $(Df)(x)=\sqrt{2}f(Ax)$، کـه در آن $A$ یـک مـاتریس دلخـواه منبـسط شـونده $d\times d$ بادرایه های صحیح است و $|\det A|=2$، مطالعه می شود و یک روش برای سـاختن موجـک هـای چارچوب وابسته به آنالیز چند تجزیه ای تعمیم یافته ی $(V_j)(GMRA)$ در $L^2(\mathbb{R}^d)$با اتـساعهای $D$بیـان می شود و توسط ساختار چند تجزیه ای موجک های چارچوب پارسـوال $GMRA$ و سـپس موجـک هـای چارچوب پارسوال نیمه متعامد در $L^2(\mathbb{R}^d)$ توصیف می شود .

موجک های چارچوب پارسـوال وابـسته بـه $GMRA(V_j)$بـا توابـع $\psi\in W_o$ کـه $T(\psi)$یـک چـارچوب پارسوال بـرای $W_o$ باشـد، برابرنـد. همچنـین یـک ویژگـی از موجـک هـای چـارچوب پارسـوال وابـسته به $GMRA(V_j)$ توسط بردار صافی مینیمال، مطرح می شود. و سرانجام مثالهایی از موجک هـای چـارچوب پارسوال وابسته به $GMRA(V_j)$ بیان می شود.

## فهرست مندرجات


مقدمه ........ ۵

۱. فصل اول: تعاریف و پیش نیازها ........ ۱۲

۱-۱. پیش نیازها ........ ۱۲

۱-۲. تبدیل فوریه ........ ۱۸

۱-۳. موجک و چارچوب ........ ۱۹

۱-۴. فضای انتقال پایا ........ ۲۲

۱-۵. آنالیز چند تجزیه ای ........ ۲۴

۲.فصل دوم: موجک های چارچوب پارسوال وابسته به $GMRA(V_j)$ ........ ۲۸

۲-۱. یک روش استاندارد برای ساختن موجک ها از یک $GMRA(V_j)$ ........ ۲۸

۲-۲. تابع بعد ........ ۳۱

۲-۳. تجزیه کانونی فضای انتقال پایا ........ ۳۵

۲-۴. $GMRA$ مجاز ........ ۳۶

۲-۵. حالت متناهی ........ ۴۱

۲-۶. حالت نامتناهی ........ ۶۶

۲-۷. ساختن $GMRA$ ........ ۷۳

۲-۸. مثالها ۷۸

۳. فصل سوم: موجک های چارچوب نیمه متعامد و موجک های چارچوب پارسوال وابسته

به $GMRA(V_j)$ ۸۳

۳-۱. موجک های چارچوب نیمه متعامد ۸۷

۳-۲. موجک های چارچوب پارسوال وابسته به $GMRA$ ۹۵

۳-۳ مثال ها ۱۰۴

۳-۴ نتیجهٔ گیری ۱۰۶

واژه نامه ۱۰۸

مراجع ۱۱۱

## مقدمه

ایده ی نمایش یک تابع برحسب مجموعه ی کاملی از توابع اولین بار توسط ژوزف فوریه[1]، ریاضیدان و فیزیکدان بین سال های ۱۸۰۲–۱۸۰۶ طی رساله ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع بکار گرفته شد. در واقع برای آنکه تابع $f(x)$ به شیوه ای ساده و فشرده نمایش داده شود فوریه اساساً ثابت کرد که می توان از محور هایی استفاده کرد که به کمک مجموعه ایی نامتناهی از توابع سینوس وار ساخته می شوند. بعبارت دیگر فوریه نشان داد که تابع $f(x)$ را می توان بوسیله ی حاصل جمع بی نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin(ax)$، $\cos(ax)$ نمایش داد. با گذشت زمان ضعف پایه های فوریه نمایان شد مثلاً دانشمندان پی بردند پایه های فوریه و نمایش توابع سینوس وار در مورد سیگنال های پیچیده نظری تصاویر، نه تنها ایده آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند. همچنین آنها متوجه شدند تبدیل فوریه فقط برای توابع پایه مورد استفاده قرار می گیرد و برای توابع غیر پایه کار آمد نیست.

ایده اولیه ی نظریه ی موجک ها بسیار جالب و ساده است:

تلاش برای بدست آوردن پایه ای برای فضای $L^2(\mathbb{R})$ از انتقالهای صحیح انبساط های یک تابع، موجک نام گرفت. پیشرفت در موضوع آنالیز موجک کشف پایه موجک متعامد یکه با محمل فشرده است. قدیمی ترین

---

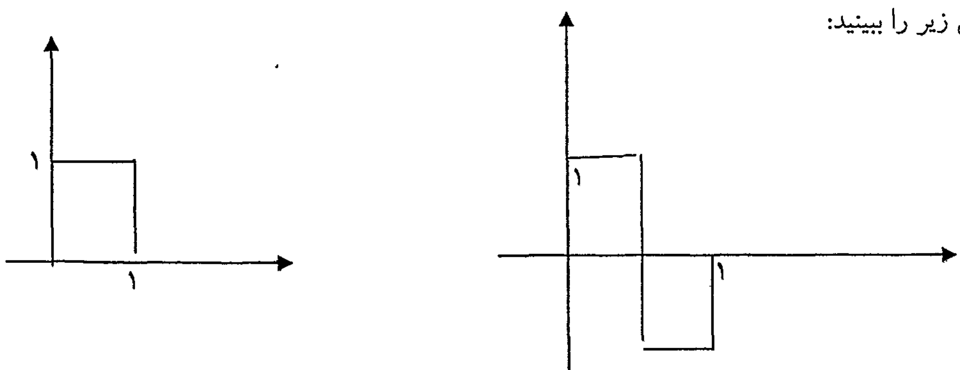
[1] Fourier

مثال برای چنین پایه ای در سال ۱۹۰۹ توسط هار[۱] معرفی گردید هار اولین کسی بود که به موجک ها اشـاره کرد.

جدیدترین تحول در ریاضیات کاربردی، استفاده از نظریه موجک ها است. موجـک هـا یکـی از موضـوعات جالب در آنالیز عددی و کوانتوم مکانیک، نظریه تقریب و مکان‌یابی، جرم‌شناسی، ژنتیک و پزشکی، مهندسی و فیزیک می باشند.

ساخت موجک ها ابتدا با معرفی یک تابع مقیاس و سپس تعیین موجکی به نام موجک مـادر بـه وسـیله تـابع مقیاس و در آخر با اتساع و انتقال موجک مادر انجام می پذیرد.

شکل زیر را ببینید:




$\psi(t)$(موجک هار) $\varphi(t)$ (تابع مقیاس)

شکل۱-۱

در دهه ۱۹۸۰ چندین پایه موجک متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ ساخته شد که امتیازات پایه هار و لیتلوود – پالی را با هم داشت. اولین آنها در ۱۹۸۲ توسط اشترومبرگ[۲] ساخته شد.

---

[۱] Haar
[۲] Stromberg

در سال ۱۹۷۶ میر[۱] و مالات[۲] توسط پایه های موجک متعامد توانستند آنالیز چند تجزیه ای را بسازند و با استفاده از آن بسیاری از خواص موجک ها مانند کامل بودن، مستقل خطی بودن، منظم بودن، تقارن و متعامد بودن مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند.

در سال ۱۹۸۸ دابیشز[۳] یک دسته کاملاً جدید از موجک ها را کشف کرد که نه تنها مانند موجک میر متعامد بودند بلکه با محمل فشرده منظم بودند.

مورنزی[۴] همراه با آنتوان[۵] موجک ها را به دو بعد و سپس به فضاهایی با بعد بیشتر گسترش دادند و بدین ترتیب بود که آنالیز موجکی پایه گذاری گردید.

موجک ها دسته ای از توابع ریاضی هستند برای تجزیه سیگنال پیوسته به مؤلفه های فرکانسی آن به کار می روند که رزولوشن هر مؤلفه برابر با مقیاس آن است.تبدیل موجکی که یک تابع را به مجموع موزون مؤلفه های فرکانسی مختلف آن تجزیه می کند، برای پاسخگویی به عیب تبدیل فوریه به وجود آمد.

موجک های $MRA$ قدیمی احتمالاً مهمترین دسته از موجک های متعامد یکه می باشند، ولی این ساختار، همه ی موجک های متعامد یکه را تولید نمی کند به این ترتیب قبل از موجک ها چارچوب ها معرفی شدند $[DS]$ که بیشتر به واسطه ی بسط و گسترش و مطالعه ی تئوری موجک ها مورد توجه قرار گرفتند. $[D1]$, $[D2]$

---

[۱] Meyer
[۲] Mallat
[۳] Daubechies
[۴] Mourezny
[۵] Antovan

چارچوب ها را می توان به عنوان تعمیمی از پایه های متعامد یکه ی فضاهای هیلبرت در نظر گرفت. کار بردهای آنها سبب شده که افراد زیادی، در زمینه ی موجک های چارچوب مقالاتی ارائه دهند.

حالت خاص این موجک ها ، موجک های چارچوب پارسوال و ساختار $GMRA$ است. $[BMM],[B2],[BRS],[B1]$ اهمیت ساختار $GMRA$ در این است که، هر موجک متعامد وابسته به این ساختار است.

آنالیز موجک ( $Wavelet\ Analysis$) یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید و هیجان انگیز ریاضیات محض که مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز همساز است، امروزه کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته های علوم و مهندسی یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است. در آنالیز موجک هم مانند آنالیز فوریه با بسط تابع ها سروکار داریم ولی این بسط برحسب «موجک ها» انجام می شود.

آنالیز موجک امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می توان به کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی ( $MRI$) و سی تی اسکن ( $CAT$)، جداسازی بافت های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تشخیص خودکار خوشه های میکروکلسیفیکاسیون، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی ( $MR\ Spectrorscopy$) و عملکردهای تشدید مغناطیسی ( $FMRI$) اشاره کرد.

زمینه ی اصلی پایان نامه ی حاضر بررسی مقاله ای تحت عنوان " موجک های چارچوب پارسوال نیمه متعامد و آنالیز چند تجزیه ای تعمیم یافته " $[B1]$ است که توسط دمیر بکیچ[1] نوشته شده است.

علاوه بر این مقاله ، به بررسی مقاله ای دیگر تحت عنوان" موجک های چارچوب نیمه متعامد و موجک های چارچوب پارسوال وابسته به $GMRA(V_j)$ " $[LHWJ]$ که توسط ژانوی لیو[2] و همکارانش نوشته شده است، در این مقاله با روشی جدید بعضی از قضایای مقاله قبل را ساده تر اثبات کرد ه است.

این پایان نامه شامل سه فصل است.

در فصل اول تعاریف و مفاهیمی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار گرفته بررسی می شوند. مفاهیمی نظیر اندازه لبگ، تبدیل فوریه، موجک ها، فضای انتقال پایا، و آنالیز چند تجزیه ای که در این پایان نامه کاربرد خواهند داشت. در این فصل ساختار آنالیز چند تجزیه ای ( $MRA$ )و آنالیز چند تجزیه ای تعمیم یافته( $GMRA$ )، توصیف می شود. ساختار $MRA$ همواره موجک های متعامد یکه را می سازد در حالی که ساختار $GMRA$ تنها موجک های نیمه متعامدرا می سازد، واین تفاوت اساسی بین $MRA$ و $GMRA$ است.

فصل دوم به معرفی موجک های چارچوب پاسوال وابسته به $GMRA(V_j)$ اختصاص دارد. در این فصل ابتدا یک روش استاندارد برای ساختن موجک ها از ساختار $GMRA(V_j)$ را بیان می کنیم.

سپس دو سؤال مطرح می شود، که هدف اصلی پاسخ دادن به آنهاست و با تعاریف و قضایایی که در این فصل آورده شده به این دو سؤال پاسخ داده می شود.

---

[1] Bakić
[2] Liu

سؤال(۱) توصیف همه ی موجک های چارچوب پارسوال وابسته به $(Vj)$است، کـه طبـق قـضیه ی۲-۲-۴ همه ی موجـک هـای چـارچوب پارسـوال نیمـه متعامـد بـا همـه ی موجـک هـای چـارچوب پارسـوال $GMRA$برابرند. از این رو همه ی موجک های $GMRA$در مجموعه ای از همه ی موجک هـای چـارچوب نیمه متعامد قرار می گیرند.

سؤال(۲) پیدا کردن روشی برای ساختن همه ی موجک های چارچوب پارسوال وابسته به $(Vj)$ اسـت، کـه چنین موجک هایی طبق قضیه ی ۲-۴-۳ ساخته می شوند، این قضیه در دو حالت، متناهی و نامتناهی اثبات می شود. در بخش ۲-۷، طبق قضیه ۲-۷-۱روشی برای ساختن $GMRA$ ها ارائـه مـی کنـیم و سـپس در پایان این فصل، با استفاده از همین قضیه و قضیه ۲-۴-۳ با ارائه مثال، موجک متعامد یکـه $journ'$ را روی خط حقیقی، می سازیم.

در فصل سوم، به معرفی موجک های چارچوب نیمه متعامـد و موجـک هـای چـارچوب پارسـوال وابـسته به $GMRA(V_j)$ می پردازیم، در این فصل تعاریف وگاهی قضایایی شبیه به فصل قبل آورده شـده اسـت. در این فصل با قضایایی ساده تر، توانسته ایم موجک چارچوب پارسوال نیمه متعامد ی بسازیم. در اینجا بـرای ساختن $GMRA$ ازفضا های $W_j$ استفاده کرده وسپس تفاوت بین فضاهای $V_j$و $W_j$ در فضای $L^2(\mathbb{R})$ بیان شده است.

در بخش ۳-۱ موجک های چارچوب نیمه متعامد را با بیان دو قضیه مورد بررسـی قـرار داده ایـم، قبـل از معرفی موجک ها، چارچوب ها معرفی شده اند. چارچوب ها تعمیمـی از پایـه هـای متعامـد یکـه ی فـضای

هیلبرت هستند و ابتدا شرط لازم و کافی برای اینکه موجک های چارچوب، موجک های چارچوب نیمه متعامد شوند را بیان می کنیم. سپس در قضیه ۳-۲-۱ شرط لازم برای به دست آوردن موجک های چارچوب نیمه متعامد، مطرح می شود. در بخش ۳-۲ موجک های چارچوب پارسوال وابسته به $GMRA(V_j)$ را مورد بررسی قرار داده ایم. در این بخش با استفاده از لم ۳-۲-۲ و قضیه ۳-۲-۳، برهان ساده ای برای قضیه ۲-۴-۳ که در فصل دوم بیان شده ، آورده می شود.

در پایان، یک ویژگی مهم تابع $[.,.]$ توسط فضاهای انتقال پایای اصلی نشان داده می شود. سپس با ارائه یک مثال موجک چارچوب پارسوال نیمه متعامد را می سازیم. این پایان نامه بر اساس مقاله های $[B1]$ و $[LHWJ]$ تهیه شده است.

# فصل اول

## تعاریف و پیش نیازها

در این فصل به ذکر مقدمات لازم برای فصل های بعدی می پردازیم که به دلیل پرهیز از حجم زیاد، قضایای این فصل بدون اثبات بیان شده است و خواننده ی علاقمند می تواند برای اثبات به مراجع ذکر شده رجوع نماید.

## ۱-۱ پیش نیازها:

۱-۱-۱ تعریف: (آ) گردایه ی $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه های مجموعه ی $X$ را یک $\sigma-$جبر در $X$نامیم هر گاه $\mathfrak{M}$ در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $X \in \mathfrak{M}$؛

(ب) هرگاه $A \in \mathfrak{M}$، آن گاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن $A^c$ متمم $A$ نسبت به $X$ است؛

(ج) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، و به ازای $n = 1, 2, 3 \ldots$، $A_n \in \mathfrak{M}$، آن گاه $A \in \mathfrak{M}$.

(ب)هرگاه $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در $X$ باشد، آن گاه $X$ را یک فضای اندازه پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه های اندازه پذیردر $X$ می نامیم.

(پ) هر گاه $X$ یک فضای اندازه پذیر، $Y$یک فضای توپولوژیک، و $f$نگاشتی از $X$ به توی $Y$باشد، آن گاه گوییم $f$اندازه پذیر است اگر به ازای هر مجموعه ی باز $V$ در $Y$، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه ی اندازه پذیر در $X$ باشد.

به عنوان مثال تابع مشخصه روی مجموعه ی اندازه پذیر $E$ یک تابع اندازه پذیر است.

۱-۱-۲ تعریف: فرض کنید $E$ یک زیر مجموعه از اعداد حقیقی است. فرض کنید $\mu$ تابع مجموعه ای تعریف شده بر زیر مجموعه های اعداد حقیقی باشد. $\mu$ را اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر بازه مانند $I$، $\mu(I)=\ell(I)$ که در آن $\ell$ طول بازه می باشد؛

(ب) هرگاه $A \subset B \subset \mathbb{R}$، آن گاه $o \le \mu(A) \le \mu(B) \le \infty$؛

(ج) پایا تحت انتقال: برای هر زیر مجموعه $A$ از $\mathbb{R}$ و برای هر نقطه $x_o \in \mathbb{R}$ تعریف می کنیم:

$$A+x_o=\{x+x_o : x\in A\}$$

آن گاه

$$\mu(A+x_o)=\mu(A)$$

(د) جمعی شمارش پذیر: هر گاه $A$ و $B$ دو زیر مجموعه ی مجزا از $\mathbb{R}$ باشند، آن گاه

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$$

هرگاه $\{A_i\}$ گردایه ای شمارشپذیر واز هم جدا از اعضای $\mathbb{R}$ باشد، آن گاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\{A_i\} \ .$$

۱-۱-۳ **تعریف:** فضای $L^1(\mathbb{R}^d)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L^1(\mathbb{R}^d)=\left\{f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C};\ \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx<\infty\right\}$$

برای $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ تعریف می کنیم:

$$\|f\|_1=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dx$$

که آن را نرم $L^1$ نامیم.

۱-۱-۴ **تعریف:** فضای ضرب داخلی $H$ را یک فضای هیلبرت نامیم، هر گاه $H$ نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، کامل باشد.

**تذکر:** کامل یعنی هر دنباله ی کشی در $H$ همگرا باشد.

نرم فضای ضرب داخلی $H$، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|x\|=<x,x>^{\frac{1}{2}}.$$

۱-۱-۵ **تعریف:** فضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L^2(\mathbb{R}^d)=\left\{f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C};\ \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx<\infty\right\}$$

$L^2(\mathbb{R}^d)$ با جمع نقطه ای توابع و ضرب معمولی در یک تابع، یک فضای برداری است.

برای $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ تعریف می کنیم:

$$<f,g>=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\overline{g(x)}dx\ ,$$