بسم الله الرحمن الرحیم

**دانشگاه آزاد اسلامی**

**واحد تهران مرکزی**

**دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی**

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

**گرایش :** آنالیز عددی

**عنوان :**

# تخمین خطا برای معادله گرمای بد وضع غیر خطی

**استاد راهنما :**

دکتر محمدعلی  فریبرزی عراقی

**استاد مشاور :**

دکتر جلیل رشیدی نیا

**پژوهشگر:**

الهام مرندی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

# تشکر و قدردانی :

در تهیه پایان نامه ای که در دست شماست استاد عزیزم جناب آقای دکتر فریبرزی عراقی با سعه صدر ارشاد و راهنماییم نمودند ضمنا جناب آقای دکتر رشیدی نیا نیز مشاوره ام نمودند.

در اینجا لازم می دانم کمال تشکر و قدر دانی را از این دو بزرگوار به عمل بیاورم.

از جناب آقای دکتر امیر فخریان که در طول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد زحمات فراوانی را از جانب من قبول کردند نیز کمال تشکر را دارم.

همچنین از همسر عزیزم آقای سورنا مهری به خاطر همکاری هایشان سپاسگزارم.

بسمه تعالی

**تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد**

اینجانب الهام مرندی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی-آنالیز عددی با شماره دانشجویی 89066825000 اعلام می نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان : تخمین خطا برای معادله گرمای بد وضع غیر خطی

حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم، طبق ضوابط و رویه های جاری، آنرا ارجاع داده و در فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده ام. علاوه بر آن تاکید می نماید که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح،پایین تر یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آنرا بپذیرم

تاریخ و امضاء :

بسمه تعالی

درتاریخ : **1391 / 6/ 14**

دانشجوی کارشناسی ارشد خانم الهـام مرنـدی از پایـان نامـه خـود دفـاع نمـوده و بـا نمـره**5 /17**

بحروف هفده و نیم و با درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

## فصل دوم : معرفی روش منظم سازی فوریه



## فصل سوم : حل معادله گرمای غیر خطی بد وضع

## چکیده

موضوع مهم در این کار تحقیقاتی بدست آوردن یک روش منظم سازی مناسب برای مسئله گرمای غیر خطی پسرو می باشد به علاوه تخمین خطا برای این روش یک قاعده انتخاب برای پارامتر منظم سازی را فراهم می کند و این روش نتایج قبلی را اصلاح می کند.

در این کار تحقیقاتی معادله گرمای پسرو غیر خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$u_t - u_{xx} = f\big(x, t, u(x,t)\big) \quad , \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \in (0,T)$$

$$u(x,T) = \varphi(x) \quad , \quad x \in (0,\pi)$$

که از جمله مسائل بد وضع مشهور است و روش های منظم سازی برای آن مورد نیاز است.

## مقدمه

بررسی معادلات دیفرانسیل توجه بسیاری از ریاضی دانان سه قرن اخیر را جلب کرده است امروزه مبحث معادلات دیفرانسیل زمینه ای پویا است و هنوز در این زمینه سوال های جالبی بدون پاسخ مانده است.

پدیده های غیر خطی نقش مهمی در ریاضیات کاربردی و فیزیک و همچنین در مسائل مهندسی دارند حل مسائل غیر خطی ممکن است مولف را به شناخت فرایندهای توصیف شده هدایت کند که عمیقا و بعضی اوقات منجر به شناخت بعضی حقایق می شود که این حقایق به آسانی و از طریق مشاهدات معمولی قابل فهم نیست.

پدیده های پراکندگی امواج ، انتشار و انتقال بسیار مهم اند و ما می توانیم آنها را با انواع معادلات غیر خطی نمایش دهیم.

به منظور دست یابی به برخی اطلاعات راجع به سیستم فیزیکی راه حل نسبتا موجود این معادلات بایستی ارائه شود اما الگوهای راه حل ها کاملا کم هستند و برخی محدودیت ها را دارند.

بسیاری از مسائل مهندسی ، علوم طبیعی و علوم اجتماعی چون به زبان ریاضی بیان می شوند به مدلی می انجامند که مشتق یا مشتق هایی از تابع مجهول را در بر دارد.

چنین مدلی را معادله دیفرانسیل می نامند منظور از حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یافتن تابعی است که قیود معادله دیفرانسیل را براورده کند.

هرگاه تابع مجهول در یک معادله یک متغیر مستقل داشته باشد تنها مشتق های معمولی در معادله دیفرانسیل ظاهر می شوند در این حالت معادله دیفرانسیل را معمولی $(O.D.E)$ و چنانچه شامل بیش از یک متغیر باشد آن را معادله دیفرانسیل جزئی $(P.D.E)$ می نامند.

معادله گرما از جمله معادلات دیفرانسیل جزئی اساسی در علوم فنی و مهندسی است و ارائه روش های

جدید برای حل این نوع از معادلات حائز اهمیت می باشد به ویژه معادله دیفرانسیل گرمای بد وضع که به دلیل ماهیت بد وضعی آن به کار گیری روش های کلاسیک برای حل این نوع از معادلات مقدور نیست و باید با روش های قوی تر و کاراتری نظیر منظم سازی روی این دسته از معادلات کار کرد .

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است که در فصل یک به معرفی معادلات دیفرانسیل جزئی و حالت های مختلف معادله گرما و روش تجزیه آدمیان و روش تفاضلی اشمیت می پردازیم.

در این فصل تعاریف و مثال هایی برای آشنایی بیشتر با موضوع پایان نامه مطرح می شود.

در فصل دوم به معرفی یکی از روش های منظم سازی به نام روش منظم سازی فوریه می پردازیم.

در فصل سوم حل معادله گرمای غیر خطی بد وضع و تخمین خطای آن مورد بررسی قرار می گیرد و قضایا و تعاریفی در رابطه با آن مطرح می گردد.

# فصل اول:

## پیش زمینه ها

## معادلات دیفرانسیل

تقریبا تمام بخش های بنیادی ریاضی و فیزیک نظری و بسیاری از بخش های پیشرفته آن بر حسب معادلات دیفرانسیل (غالبا معادلات دیفرانسیل جزئی) فرمول بندی می شوند که طبق یک تقسیم بندی معادلات دیفرانسیل به دو نوع معمولی و جزئی تقسیم می شوند.

تعریف ۱.۱: رابطه ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می شود.[۱۳]

مثال ۱.۱: نمونه ای از معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر است:

$$\frac{d^{۳} u(x)}{dx^{۳}} - ۵ \, \frac{d^{۲} u(x)}{dx^{۲}} + ۴ \, \frac{d\, u(x)}{dx} = ۰$$

هدف از حل معادله دیفرانسیل معمولی یافتن تابعی است که به ازای هر $x$ در معادله صدق کند.[ 13]

تعریف ۱.۲: اگر معادله دیفرانسیل شامل مشتق های جزئی یک تابع دو متغیره و یا چند متغیره مستقل باشد آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامند. [۱۳]

مثال ۱.۲: نمونه ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی عبارتند از:[٦]

**معادله گرما[1]**

$$\alpha^{۲} \frac{\partial^{۲} u\,(x\,,t)}{\partial x^{۲}} = \frac{\partial\, u(x\,,t)}{\partial t}$$

**معادله موج[2]**

$$a^{۲} \frac{\partial^{۲}\, u(x\,,t)}{\partial x^{۲}} = \frac{\partial^{۲}\, u(x\,,t)}{\partial t^{۲}}$$

---

[۱] Heat equation
[۲] Wave equation

**معادله پواسن** [3]

$$\frac{\partial^{۲} u\,(x\,,y)}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}\, u(x\,,y)}{\partial y^{۲}} = f\,(x\,,y\,)$$

که در آنها $a$ و $\alpha$ مقادیر ثابتی هستند هر یک از معادلات فوق پدیده فیزیکی ویژه ای را توصیف می کنند و هر کدام دسته بزرگی از معادلات دیفرانسیل جزئی را شامل می شوند.

تعریف ۱.۳[ ۱۳ ] : صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای دو متغیرمستقل $x$ و $y$ و یک متغیر وابسته $z$ عبارتست از:

$$\mathrm{F}\,(x\,,y,\ \frac{\partial z}{\partial x}\,,\frac{\partial z}{\partial y}\,,\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}\,,\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}\,,\frac{\partial^{۲} z}{\partial x \partial y}\,,\dots) = ۰$$

و همچنین صورت کلی یک معادله دیفرانسیل برای $n$ متغیر مستقل $x_{۱}, \dots, x_n$ و متغیر وابسته $u$ عبارتست از:

$$F\left(x_{۱}\,,x_{۲}\,,x_{۳}\,,\dots,x_n\,,u_{x_{۱}}\,,u_{x_{۲}}\,,\dots,u_{x_n}\,,u_{x_{۱}x_{۱}}\,,u_{x_{۱}x_{۲}}\,,\dots\right) = ۰$$

تعریف ۱.٤ : بزرگترین مرتبه مشتق در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می نامند.[۱۳]

تعریف ۱.۵ : توان مشتق با بالاترین مرتبه را درجه معادله دیفرانسیل می نامند. [۱۳]

مثال ۱.۳: معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم:

$$۱)\,y'' + (\,y')^{۲} + y = ۰$$

$$۲)(\,y'')^{۳} + ۷\,(\,y')^{٤} + ۲x = ۰$$

[۳] Poisson equation

$$۳)\ \frac{\partial^۳ z}{\partial x^۳} + x\ (\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲})^۲ = ۰$$

معادله (۱) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی و درجه اول و معادله (۲) معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم و درجه سوم و معادله (۳) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه سوم و درجه اول است.

## معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و غیر خطی

تعریف ۱.۶ : یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی می نامند هرگاه متغیرهای وابسته و مشتقات آنها در معادله دیفرانسیل به صورت خطی ظاهر شود، معادله دیفرانسیل که خطی نباشد را غیر خطی می نامند[13]

مثال ۱.٤ : نمونه ای از معادله دیفرانسیل خطی و غیر خطی به صورت زیر می باشد :[ 13]

حالت خطی $i^{۲} = -۱$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + i\,\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} = ۰$$

حالت غیر خطی $i^{۲} = -۱$

$$i\,\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} = -\frac{1}{٤}\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + u\,cos^{۲}x + u^{۲}\bar{u}$$

به طور دقیق تر یک معادله خطی مرتبه دوم دو متغیره معادله ای است به شکل زیر:

$$A\,u_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

که در آن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ و $E$ و $F$ و $G$ می تواند ثابت یا توابعی از $x$ و $y$ باشند.

اگر در طرف راست $G(x\,,y)$ به ازای هر $x$ و $y$ متحد با صفر باشد، معادله را همگن و درغیر از اینصورت آن را نا همگن می نامند.

برای تسهیل کار در نماد گذاری داریم:

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}\,, \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad u_{xx} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}\,, \ldots$$

درمعادله ای که یک پارامتر آن زمان باشد متغیر $t$ به جای $y$ به کار می رود، اکثر قوانین طبیعی فیزیک، نظیر ماکسول، قانون نیوتن، معادله شرودینگر بر حسب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان شده اند، وجود مشتقات در این معادلات بدان خاطر است که مشتق ها کمیت های طبیعی مانند سرعت، شتاب، نیرو را نمایش می دهند.

معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی مرتبه اول با دو متغیر مستقل $x$ و $y$ در حالت کلی به شکل زیر نمایش داده می شود:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = f$$

که $f$ تابعی از یک یا دو متغیر مستقل $x$ و $y$ می باشد.

به طور مشابه معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل $x$ و $y$ به شکل زیر نشان داده می شود:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = f$$

معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی همگن نامیده می شود، اگر $f = ۰$ و ناهمگن نامیده می شود، اگر $f \neq ۰$ باشد[۱۳]

مثال ۱.۵ : نمونه ای از معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی مرتبه اول و دوم به شکل زیر است:

$u_t + ۲uu_x = ۰$ مرتبه اول

$u_t + uu_x - u_{xx} = ۰$ مرتبه دوم

## دسته بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

سه نوع از معادلات با مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم، معادلات سهموی، هذلولوی و بیضوی می باشند.[ 13]

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم به شکل زیر است:

$$a\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} + \ b\frac{\partial^{۲} z}{\partial x \partial y} + \ c\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} = f\ \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\ , \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$a$ و $b$ و $c$ می توانند توابعی از $x$ و $y$ باشند و $f$ تابعی کثیرالجمله از متغیرهای مفروض است سه حالت تمیز داده می شود.

در معادله خطی مرتبه دوم اگر $\Delta = ۰$ $(\Delta = b^{۲} - ۴ac)$ آنگاه معادله سهموی است که اینگونه معادلات روندهای شارش گرما و پخش را توصیف می کنند.

مثالی از معادله سهموی معادله گرما به صورت زیر است :

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

اگر $\Delta > ۰$ آنگاه معادلات هذلولوی است و در این معادلات دستگاه های مرتعش و حرکت موج را توصیف می کنند.

مثالی از معادله هذلولوی معادله موج به صورت زیر است :

$$u_{tt} = c^{۲} u_{xx}$$

اگر در معادله خطی مرتبه دوم $\Delta < ۰$ باشد آنگاه معادله بیضوی است و معادلات بیضوی پدیده های پایدار را بیان می کنند.

مثالی از معادله بیضوی معادله لاپلاس در فضای دو بعدی به صورت زیر است :

$$u_{xx} + u_{yy} = ۰$$

## معادله گرمای همگن

در معادله گرما مسئله فیزیکی که بررسی می شود به جریان گرما در امتداد یک میله نازک به طول L مربوط است که فرض می شود در هر مقطع عرض جسم دارای دماهای یکنواخت است به شرطی که میله در سطح کناری اش کاملا عایق دار باشد.

$$\alpha \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۱.۱)$$

$\alpha$ ثابت و ضریب گرمایی ماده ای که توانایی میله در انتقال گرما را می سنجد.

همچنین انتقال گرما در تمام نقاط میله یکسان می باشد.

و در اینجا است که برای مسئله جریان گرما توزیع اولیه گرما در میله را مشخص کرده :

$$u\,(x\,,\,\circ\,) = f(x)$$

و بیان می کنیم که در نقاط انتهایی میله چه رخ می دهد.

معادله گرما در حالت همگن به دو صورت زیر نوشته میشود :[ ۱۳]

$$u_t = \alpha u_{xx} \qquad \circ < x < L\;, \qquad t > \circ$$

$$u_t = \alpha u_{xx} - u \qquad \circ < x < L\;, \qquad t > \circ$$

## معادله گرمای ناهمگن

این نوع از معادلات اغلب به شکل زیر داده می شوند:

$$u_t = \alpha\, u_{xx} - g(x) \qquad \circ < x < L \quad \text{و} \quad t > \circ$$

که $g(x)$ منبع گرما نامیده می شود که مستقل از زمان می باشد.[۱۳]