دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی
ریاضی محض گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

انحنا و همگنی خمینه‌های لورنتس سه بعدی

استادان راهنما

دکتر ابراهیم پوررضا — دکتر ادواردو گارسیا ریو

استادان مشاور

دکتر مگردیچ تومانیان — دکتر محمد چایچی رقیمی

پژوهشگر

علی حاجی بدلی

سال ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سَرِ فکرتِ ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، وبه رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.
گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد(ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.
پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.
خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

خانواده‌ام

و مَن لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر ابراهیم پوررضا و دکتر ادواردو گارسیا ریو، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر مگردیچ تومانیان و دکتر محمد چایچی که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقایان دکتر غفار فرزدی ، دکتر ناصر بروجردیان و دکتر میر محمد رضایی که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از تمامی دوستان دوران تحصیلم و هم اتاقی های عزیزم مخصوصاً آقایان رمضان ضرغامی، جعفر اعظمی و حسین پیری تشکر می کنم بی تردید آنها نقش بسزایی در پیشرفت من داشتند، تشکر ویژه من از دوست عزیزم مرتضی فغفوری است که برای من همچون برادر آکادمیک بودند و خدا را شاکرم که از نخستین سالهای حضورم در دانشگاه توفیق آشنایی با ایشان را داشتم و در این مدت چیزهای زیادی از ایشان آموختم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

علی حاجی بدلی
بهار ۱۳۸۷

نام خانوادگی دانشجو: حاجی بدلی نام: علی

عنوان: انحنا و همگنی خمینه‌های لورنتس سه بعدی

استادان راهنما: دکتر ابراهیم پوررضا – دکتر ادواردو گارسیا ریو

استادان مشاور: دکتر مگردیچ تومانیان – دکتر محمد چایچی رقیمی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده‌ی علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: سال ۱۳۸۷ تعداد صفحه: ۹۲

کلید واژه‌ها: عملگر ریچی، عملگر انحنایی شبه متقارن، متر والکر، خمینه های موضعاً همگن و متقارن لورنتس، خمینه های IP.

چکیده

یکی از مسائل اساسی در هندسه دیفرانسیل توسعهٔ خواص جبری تانسور انحنای ریمان به هندسه خمینه هاست. کار کردن با تانسور انحنا (به عنوان (۰,۴)–میدان تانسوری) خیلی سخت می‌باشد. بنابراین، با توجه به پیچیدگی کار با تانسور انحنا، تحقیقات معمولاً منتهی به بررسی ساختار جبری برخی عملگر های طبیعی می شود، عملگر ژاکوبی و عملگر انحنایی شبه متقارن از جمله این مثال ها تلقی می شوند. گاهی این مفاهیم توابع حقیقی می‌باشند که روی فضای مناسب تعریف می‌شوند، مانند انحنای مقطعی (که دامنه آن ۲–صفحه‌های گراسمان می باشد) و انحنای اسکالر (که روی خمینه به عنوان تعمیم انحنای گاوس مطرح می‌شود). در طول سالهای گذشته تحقیقات منتهی به بررسی رفتار برخی عملگرهای ویژه وابسته به تانسور انحنا شده است.

هدف نهایی ما در این رساله طبقه‌بندی خمینه‌های لورنتس ۳–بعدی از نقطه نظر خواص انحنایی آنها می‌باشد. خمینه‌های لورنتس ۳–بعدی که عملگر انحنای شبه متقارن آن دارای مقدار ویژه ثابت می‌باشد مورد بررسی قرار می‌گیرند. یک طبقه‌بندی کلی جبری بیان می‌شود که منتهی به طبقه‌بندی کامل از خمینه‌های لورنتس سه بعدی می شود که در عین حال همگن یا متقارن نیز می‌باشند. همچنین خمینه های لورنتس ۳–بعدی با عملگر انحنایی

جابجایی مورد بررسی قرار می‌گیرند. یک طبقه‌بندی کامل جبری بیان می‌شود. نتایج بدست آمده را برای هندسه خمینه ها بکار می‌گیریم که باز منجر به طبقه‌بندی کامل از خمینه‌های لورنتس ۳−بعدی با عملگر انحنا− ریچی جابجایی می‌شود که در عین حال همگن یا متقارن نیز می‌باشند.

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از مسائل اساسی در هندسه دیفرانسیل توسعهٔ خواص جبری تانسور انحنای ریمان به هندسه خمینه‌هاست. کار کردن با تانسور انحنا (به عنوان (۴ ,۰) —میدان تانسوری) معمولاً خیلی سخت می‌باشد. بنابراین، با توجه به پیچیدگی کار با تانسور انحنا، تحقیقات معمولاً منتهی به بررسی ساختار جبری برخی عملگرهای طبیعی می شود، عملگر ژاکوبی و عملگر انحنایی شبه متقارن از جمله این مثال ها تلقی می شوند. گاهی این مفاهیم توابع حقیقی می‌باشند که روی فضای مناسب تعریف می‌شوند، مانند انحنای مقطعی (که دامنه آن ۲—صفحه‌های گراسمان می باشد) و انحنای اسکالر (که روی خمینه به عنوان تعمیم انحنای گاوس مطرح می‌شود).

در طول سالهای گذشته تحقیقات منتهی به بررسی رفتار برخی عملگرهای ویژه وابسته به تانسور انحنا شده است. عملگر ژاکوبی (که دارای مفهوم هندسی واضحی می‌باشد، زیرا آن انحراف ژئودزیک را اندازه‌گیری می‌کند) و عملگر انحنای شبه‌متقارن (که تنها مفهوم نزدیک به هندسه دایره‌ها نمی باشد اما شامل عنصر اساسی در تعیین هولونومی خمینه‌ها تحت شرایطی می‌باشد). علارغم این عملگرهای زیادی وجود دارند که منعکس کننده خواص زیادی می‌باشند: عملگرهای سزابو، عملگر ژاکوبی از مرتبه بالا، عملگر ژاکوبی مختلط و غیره.

به عنوان یک برنامه کلی، تحقیقات ما بر خواص جبری عملگرهای انحنا و سعی در تعیین هندسه از فرضیات مختلف جبری می‌شود. بنابراین نخست توجه خود را به خمینه‌های شبه‌ریمانی که عملگرهای ریچی آنها دارای مقادیر ویژه ثابت (در دامنه مورد نظر) می‌باشند معطوف می‌کنیم. این کار منجر به بررسی انواع مختلف از خمینه‌های اوزرمن و مسایل مرتبط می‌شود.

سپس ما روابط ممکن بین انواع مختلف از عملگرهای انحنا با فرض خواص جابجایی معیّن را بررسی می‌کنیم. برخی از این شرایط تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال خمینه‌های ریچی نیمه متقارن به طور کامل برای مترهای موضعاً همدیس تخت مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

هدف اصلی این کار مطالعه مترهای لورنتس ۳−بعدی با در نظر گرفتن برنامه بالا می‌باشد. خمینه‌های لورنتس ۳−بعدی از نقطه نظر انحنایی استثنایی می‌باشند، با توجه به اینکه تانسور ریچی به طور کامل تانسور انحنا را تعیین می‌کند (خاصیتی که در هر بعد بالا برای مترهای موضعاً همدیس تخت نیز درست می‌باشد). بعلاوه خمینه‌های لورنتس ۳−بعدی در فیزیک نیز از اهمیت خاصی برخودارند. اگرچه فضاگونه‌ها در بعد ۴ از اهمیت ویژه برخوردارند اما گاهاً بررسی مترهای لورنتس ۳−بعدی به منظور کسب نتایج در حالت ۴−بعدی مفید واقع می‌شود. با یک روش دقیق این کار به صورت زیر جمع بندی می‌شود. فصل ۱ مقدمه مختصری بر موضوع می‌باشد. ما برخی نمادهای اساسی را به منظور به کار گیری در سراسر این پایان نامه یادآوری می‌کنیم.

در فصل ۲ خمینه‌های لورنتس ایوانف−پتروفای ۳−بعدی بررسی می‌شوند. نخست یک توصیف کامل جبری را به صورت زیر ارایه می‌دهیم.

قضیه. فرض کنید A تانسور انحنای جبری در فضای برداری ۳− بعدی لورنتس $(V, \langle\, , \rangle)$ باشد. آنگاه A دارای شرط IP است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) A دارای انحنای مقطعی ثابت باشد.

(۲) عملگر ریچی Ric_A قطری شدنی با مقادیر ویژه $\{0, 0, \kappa\}$ باشد.

(۳) عملگر ریچی Ric_A پوچ توان از مرتبه ۲ باشد.

سپس نتایج حاصل در قسمت هندسی مورد بررسی قرار می‌گیرند، و یک توصیف کامل از مترهای لورنتس ایوانف−پتروفای ۳−بعدی را که در عین حال موضعاً متقارن یا همگن می‌باشند ارایه می‌دهیم. بعلاوه مترهای IP موضعاً همدیس تخت به صورت زیر بیان می‌شوند.

قضیه. خمینه لورنتس ۳−بعدی موضعاً همدیس تخت IP است اگر وتنها اگر دارای انحنای ثابت باشد یا یک میدان خطی تبهگون موازی و تانسور متر داده شده توسط (۸.۲) وجود داشته باشد به طوری که در آن تابع f به صورت زیرمی‌باشد:

$$f(t, x, y) = tP(y) + x^2Q(y) + xS(y) + \xi(y)$$

که در آن P، Q، S و ξ توابع دلخواه که تنها وابسته به y می باشند.

فصل ۳ مربوط به بررسی خواص جابجایی عملگر انحنا می‌شود. با توجه به کارهای قبلی ما روی شرایط انحنا—ریچی جابجایی و انحنا—انحنا جابجایی توجه می‌کنیم. هر دو شرط وقتی در حالت جبری مشخص می‌شوند، اساساً منتهی به عملگرهای ریچی از رتبه ۱ و یا پوچ توان از مرتبه ۲ می‌شوند (قضیه (۱.۱.۳) و قضیه (۴.۱.۳)). سپس یک توصیف کامل از تمام خمینه‌های لورنتس ۳—بعدی در حالت موضعاً متقارن که در آن شرایط صدق می‌کنند به صورت زیر ارایه می‌شود.

قضیه. فرض کنید (M,g) خمینه لورنتس ۳—بعدی موضعاً متقارن و از انحنای ناثابت باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) (M,g) انحنا—ریچی جابجایی است.

ب) (M,g) انحنا—انحنا جابجایی است.

ج) یا (M,g) موضعاً به صورت حاصلضرب یک بازه باز و یک رویه از انحنای گاوس ثابت است، یا میدان خطی تبهگون موازی و متری مانند

$$g = dt \otimes dy + dy \otimes dt + dx \otimes dx + f(t,x,y) dy \otimes dy,$$

وجود دارد، که در آن تابع f به صورت

$$f(t,x,y) = tP(y) + x^2 Q(y) + xS(y) + \xi(y)$$

که در آن ξ ، S توابع هموار دلخواه و توابع هموار دلخواه P و Q که در رابطه $Q' + PQ = 0$ صدق می کنند.

یک طبقه بندی کامل از متر های لورنتس ۳—بعدی همگن بطوریکه انحنا—ریچی جابجایی یا انحنا—انحنا جابجایی می‌باشند ارایه می‌شود.

قضیه. فرض کنید (M,g) یک خمینه نامتقارن لورنتس همگن همبند ساده و کامل ۳—بعدی همبند باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) (M,g) انحنا—ریچی جابجایی است.

۲) (M,g) انحنا—انحنا جابجایی است.

۳) (M,g) دارای عملگر ریچی پوچ توان از مرتبه ۲ است.

۴) (M,g) یک گروه لی ۳—بعدی مانند G می باشد که توسط یکی از جبرهای لی زیر بیان می شود:

الف) اگر $\mathfrak{g}$ تک مدولی باشد، آنگاه پایه متعامد یکه $\{e_1, e_2, e_3\}$ از علامت $(-++)$ برای $\mathfrak{g}$ وجود دارد چنانچه آن متناظر با یکی از حالتهای زیر است:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - (\beta - \frac{1}{2})e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\beta + \frac{1}{2})e_2 - \frac{1}{2}e_3, \\ [e_2, e_3] = 0, \quad \beta \neq 0, \end{cases}$$

یا

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \quad [e_2, e_3] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3.$$

ب) اگر $\mathfrak{g}$ تک مدولی نباشد، آنگاه یک پایه شبه متعامد $\{e_1, e_2, e_3\}$ وجود دارد (مولفه های غیر صفر متر برابرند با $\langle e_1, e_1\rangle = 1$ و $\langle e_2, e_3\rangle = -1$) چنانچه:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \delta e_2, \\ \alpha(\alpha - \delta)\delta \neq 0, \quad \alpha + \delta \neq 0. \end{cases}$$

از این رساله دو مقاله با عناوین زیر تهیه شده و به چاپ رسیده است:

1. Lorentzian three-manifolds with special curvature operators, *Classical and Quantum Gravity* (2008)

2. Lorentzian 3-manifolds with commuting curvature operators, *International journal of geometric method in modern physics,* **V5**. **N4**, (2008).

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

فصل نخست پایان نامه مروری بر منابع ذکر شده در بخش بررسی منابع و بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصلهای آتی می باشد. بنابراین در بخش نخست ما چهارچوب بحث را مشخص خواهیم کرد و سپس مفاهیم مرتبط با بحث را تعریف خواهیم کرد. مفاهیم و قضایای اولیه بدون اثبات بیان خواهند شد چرا که هدف ما یادآوری مفاهیمی است که بعداً به آنها نیاز خواهیم داشت.

ما بیشتر مطالب را به [۴۷] ارجاع خواهیم داد. با وجود این هر مقدمه‌ای بر هندسه شبه ریمانی مفید خواهد بود. برای مثال ما منابع [۵۵، ۴۴، ۴۲] را ذکر می کنیم، مخصوصاً کتابهای [۳۰، ۲۸، ۲۷] بسیار مفید خواهند بود. مفاهیم مودر نیاز که در بخش مقدمه بیان نشده‌اند بعداً در فصلهای مربوط بیان خواهند شد.

۱.۱ خمینه های شبه ریمانی

در این بخش مفاهیم مورد نیاز و کلی را مرور می کنیم. برخی قرارداد های مفید وجود دارند که در کل پایان نامه معتبر خواهند بود. اولین موضوع مورد توجه خمینه های شبه ریمانی می‌باشد.

تانسور متر g روی خمینه هموار M یک $(\circ, ۲)-$ میدان تانسوری ناتبهگون روی M از اندیس ثابت $0 \leq \nu \leq n = \dim M$ می باشد. اگر $\nu = 0$ خمینه M **ریمانی** است؛ در این صورت هر g_p ضرب داخلی معیّن مثبت روی $T_p(M)$ می باشد. اگر $\nu = 1$ و $n \geq 2$ آنگاه M خمینه **لورنتس** می باشد. خمینه های ریمانی تعمیم مستقیم قضیه گاوس و خمینه های لورنتس در ارتباط با نظریه نسبیت عمومی مطرح می شوند. بنابراین نماد $\mathcal{M} = (M, g)$ بیانگر خمینه n

بعدی M مجهز به تانسور متر g با علامت (p,q) می باشد.

قضیه ۱.۱.۱ برای خمینه هموار M شرایط زیر معادلند:

(۱) یک متر لورنتس روی M وجود دارد.

(۲) یک میدان خطی غیر صفر روی M وجود دارد.

(۳) M فشرده و دارای مشخصه اولر صفر می باشد و یا M فشرده نیست.

اثبات. برای اثبات ر. ک. [۴۷]. ■

برای مثال تنها رویه های فشرده لورنتس، چنبره و بطری کلاین می باشند. همچنین کره S^n یک متر لورنتس می پذیرد اگر و تنها اگر $n \geq 3$ و فرد باشد. فرض کنید TM کلاف مماسی و T_pM فضای مماسی در نقطه $p \in M$ باشد. فرض کنید $\mathfrak{X}(M)$ فضای تمام میدان های برداری مماس روی M باشد. به عنوان یک قاعده کلی میدان های برداری مماس را با حروف بزرگ X, Y, Z, U, V, W و با حروف کوچک x, y, z, u, v, w بردارهای مماس در یک نقطه از خمینه را نشان می دهیم.

فرض کنید x یک بردار غیر صفر در T_pM باشد. x **زمان گونه** است اگر $g(x,x) < 0$، **فضاگونه** است اگر $g(x,x) > 0$ و **تبهگون** یا **پوچ** است اگر $g(x,x) = 0$، به ویژه در حالت لورنتس، بردارهای پوچ همچنین **نورگون** نامیده می شوند. برای بردارهای یکه، فرض می کنیم $\varepsilon_x = g(x,x)$ باشد. فرض کنید

$$S_p(\mathcal{M}) := \{v \in T_p(M) : |g(v,v)| = 1\}.$$

و کلاف متناظر در TM عبارت است از $S(\mathcal{M}) = \bigcup_{p\in M} S_p(\mathcal{M})$. وقتی در حالت زمان گونه یا فضاگونه بحث می کنیم برای شبه کره نماد $S_p^{\pm}(\mathcal{M}) := \{v \in T_p(M) : g(v,v) = \pm 1\}$ و برای زیر کلاف های متناظر $S^{\pm}(\mathcal{M}) = \bigcup_{p\in M} S_p^{\pm}(\mathcal{M})$ را بکار می بریم.

ارتباط لوی چویتا روی $\mathcal{M}$ با ∇ نمایش داده می شود. مشخصه آن توسط فرمول کوزول به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y), \\ &+ g(X,[Z,Y]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]), \end{aligned}$$

به ازای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

همچنین با ∇ **عملگر گرادیان** روی $\mathcal{M}$ را نشان می دهیم. توجه کنید که **گرادیان** تابع $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ به صورت $g(\nabla f, X) = X(f)$ تعیین می شود. **دیورژانس** میدان برداری X به صورت $divX = \mathrm{tr}\nabla \mathrm{X}$ تعریف می‌شود. **تانسور هسیان** h_f یک تابع حقیقی به صورت $h_f(X) = \nabla_X \nabla f$ تعریف می‌شود و $H_f(X, Y) = g(h_f(X), Y)$ **فرم هسیان** f نامیده می‌شود. **لاپلاسین** را با تقریب علامت به صورت $\triangle f = \mathrm{tr}\ h_f = div \nabla f$ تعریف می کنیم.

مهمترین مفهوم در هندسه شبه ریمانی انحنا می‌باشد. انواع مختلفی از انحنا با اهمیت بسیار زیاد وجود دارند. تمام آنها از **تانسور انحنای ریمان** قابل محاسبه‌اند که با علامت مناسب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

و نیز تانسور انحنای ریمان از نوع (۰,۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V).$$

تانسور انحنای ریمان دارای خواص زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, V) &= -R(Y, X, Z, V) = R(Z, V, X, Y), \\ R(X, Y, Z, V) &+ R(Y, Z, X, V) + R(Z, X, Y, V) = 0. \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

خاصیت آخر در فرمول بالا به **اتحاد اوّل بیانکی** معروف است. همچنین تانسور انحنا در اتحاد زیر صدق می کند:

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, U, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, U, V) = 0,$$

که معمولاً به **اتحاد دوّم بیانکی** معروف است.

۲.۱ مقدمات جبری

وقتی مساله‌ای را در هندسه شبه ریمانی مطالعه می‌کنیم، اگر از دیدگاه جبری آن را مورد بررسی قرار دهیم گاهاً خیلی مفید واقع می‌شود. برای این منظور شرایط را روی فضای مماس در یک نقطه دلخواه از خمینه مورد بررسی قرار می دهیم، چنانچه بتوان روی فضای برداری کار کرد. خواهیم دید که این روش یک روش مفید می‌باشد. در این بخش ما اصطلاحات را در یک چهارچوب کاملاً جبری بیان می‌کنیم.

فرض کنید V فضای برداری حقیقی $n-$ بعدی مجهز به یک ضرب داخلی $\langle \cdot , \cdot \rangle$ با علامت (p, q) باشد. برای اینکه نمادهای بکار برده شده در بخش قبل معتبر باشند، $x, y, z, \ldots$ را برای نشان دادن بردارها در $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ بکار می‌بریم. بنابراین، برای $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ داده شده می‌توان شبه کره $S^{\pm}(V, \langle \cdot , \cdot \rangle) = \{x \in V : \langle\, x, x \,\rangle = \pm 1\}$ یا

$$S(V, \langle \cdot , \cdot \rangle) = \{x \in V : |\langle\, x, x \,\rangle| = 1\},$$

را تعریف کرد.

حال فرض کنید $(V, \langle\ ,\ \rangle, A)$ فضای برداری حقیقی V با متر $\langle\ ,\ \rangle$ از علامت (p, q) باشد؛ و فرض کنید $A \in \otimes^4(V^*)$ یک تانسور جبری روی V باشد، یعنی در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} A(X, Y, Z, V) &= -A(Y, X, Z, V) = A(Z, V, X, Y), \\ A(X, Y, Z, V) &+ A(Y, Z, X, V) + A(Z, X, Y, V) = 0. \end{aligned}$$

یادآوری می کنیم که انحنای مقطعی صفحه ناتبهگون $\pi = \langle\{X, Y\}\rangle$ به صورت $K_A(\pi) = \frac{A(X,Y,Z,V)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$ تعریف می‌شود. بعلاوه انحنای مقطعی K_A ثابت κ است اگر و تنها اگر $A = \kappa A^0$، بطوریکه

$$A^0(X, Y, Z, V) = \langle Y, Z\rangle\langle X, V\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, V\rangle.$$

در نتیجه یک **مدل جبری** $\mathcal{V} = (V, \langle \cdot , \cdot \rangle, A)$ سه تایی شامل یک فضای برداری V، یک ضرب داخلی و یک تانسور جبری A می‌باشد. بنابراین ما گاهاً نماد R را برای هر دوی تانسور انحنای یک خمینه و تانسور جبری یک مدل جبری بکار می‌بریم، که مفهوم آن از متن مشخص خواهد بود.

۱.۲.۱ تجزیه جبری تانسور انحنا

در ادامه ما برخی عملگرهای وابسته به تانسور انحنا را معرفی می‌کنیم. چون تمام این مفاهیم به صورت موضعی تعریف می‌شوند، ما در یک نقطه دلخواه p از یک خمینه شبه ریمانی $\mathcal{M}$ مفاهیم را مطرح می‌کنیم. در نتیجه این تعریف ها به طور خودکار به حالت جبری محض از مدل $\mathcal{V}=(V,\langle\cdot,\cdot\rangle,A)$ ترجمه می‌شوند.

تانسور انحنای ریچی و انحنای اسکالر به ترتیب به صورت $\rho_A(x,y)=\mathrm{tr}\{z\mapsto A(x,z)y\}$ و $\tau_A=\mathrm{tr}\rho_A$ تعریف می‌شوند. به ازای پایه مشخص $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ از یک میدان برداری، قرار می‌دهیم $g_{ij}=g(e_i,e_j)$ و فرض می کنیم (g^{ij}) ماتریس معکوس آن را نشان دهد. آنگاه تانسور ریچی ρ_A و تانسور انحنای اسکالر τ_A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_A(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}A(x,e_i,y,e_j),\qquad \tau_A=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\rho_A(e_i,e_j). \tag{۲.۱}$$

همچنین Ric_A عملگر ریچی وابسته به تانسور A را نشان می‌دهد که به صورت $\langle Ric_AX,X\rangle=\mathrm{tr}\,\{Y\mapsto A(X,Y)X\}$ تعریف می‌شود.

با بکار بردن نمادهای بکار رفته در بالا، تانسور وایل W_A به ازای هر $x,y,z,v\in T_pM$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} W_A(x,y,z,v) &= A(x,y,z,v)+\tfrac{\tau_A}{(n-1)(n-2)}\{g(x,z)g(y,v)-g(y,z)g(x,v)\}\\ &\quad-\tfrac{1}{n-2}\{\rho_A(x,z)g(y,v)-\rho_A(y,z)g(x,v)\\ &\quad+\rho_A(y,v)g(x,z)-\rho_A(x,z)g(y,z)\}, \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

معمولاً از نوشتن اندیس خودداری خواهیم کرد. بعلاوه در مواردی بسیار مناسب است که نماد اندیسی را برای هر تانسور در پایه متناظر به کار ببریم، به عنوان مثال، $\rho_{ij}=\rho(e_i,e_j),\ R_{ijkl}=R(e_i,e_j,e_k,e_l),\ldots$

حال مفاهیم مفید زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید B و D دو میدان تانسوری متقارن از نوع (۰,۲) بر M باشند. حاصلضرب کالکارنی— نومیزو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (B\bullet D)(X,Y,Z,V) &:= D(X,Z)B(Y,V)+D(Y,V)B(X,Z)\\ &\quad -D(X,V)B(Y,Z)-D(Y,Z)B(X,V), \end{aligned}$$

برای هر $X,Y,Z,V\in\mathfrak{X}(M)$.

تبصره ۲.۲.۱ برای هر دو میدان تانسوری متقارن B و D از نوع (۲ ,۰)، حاصلضرب کالکارنی- نومیزو $B \bullet D$، یک تانسور انحنای جبری نتیجه می‌دهد. به ویژه توجه کنید که $g \bullet g = 2R_0$. بعلاوه فضای تمام تانسورهای انحنای جبری توسط مولفه هایی به صورت $B \bullet B$ تولید می‌شوند (برای مشاهده اثبات های مختلف رجوع کنید به [۲۸، ۲۴، ۲۲]).

قضیه بعدی یک تجزیه با معنی از تانسور انحنا را توجیه می‌کند.

قضیه ۳.۲.۱ هر تانسور انحنای جبری A به صورت $A=\mathfrak{U}+\mathfrak{Z}+W$ تجزیه می‌شود، به طوریکه:

$$\mathfrak{U} = \frac{\tau}{n(n-1)} g \bullet g, \qquad \mathfrak{Z} = \frac{1}{n-2}(\rho - \frac{\tau}{n} g) \bullet g, \qquad W = R - \mathfrak{U} - \mathfrak{Z} = R - C \bullet g,$$

که در آن $C = \frac{1}{n-2}(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g)$ تانسور اسکوتون می‌باشد.

اثبات. ر.ک.[۴۲]. ■

تبصره ۴.۲.۱ می‌توان تانسور انحنا را در فضای ۲- فرم های $\Lambda^2(V)$ تعبیر کرد. تحت این اصطلاحات، مولفه های $\mathfrak{Z}$، $\mathfrak{U}$ و W داده شده در قضیه (۳.۲.۱) برای عملگرهای B, D در $\Lambda^2(V)$ نسبت به متر زیر متعامد می‌باشند:

$$\langle B, D \rangle := tr(B \circ D),$$

همچنین هر کدام از مولفه های $\mathfrak{Z}$، $\mathfrak{U}$ و W دارای تعابیر هندسی می‌باشند:

- مولفه $\mathfrak{U}$ تصویر متعامد روی فضای با تانسور انحنای مقطعی ثابت می‌باشد.
- خمینه شبه ریمانی $\mathcal{M}$ اینشتنی است اگر تانسور ریچی آن حاصلضرب اسکالر از متر باشد. در این حالت داریم $\rho = \frac{\tau}{n} g$. بنابراین شرط اینشتن برابر است با $\mathfrak{Z} = 0$.
- خمینه شبه ریمانی $\mathcal{M} = (M, g)$ موضعاً همدیس تخت نامیده می‌شود اگر برای هر نقطه $p \in M$ یک همسایگی باز U و $p \in U$، و یک تبدیل همدیس $e^\sigma, \sigma : U \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد چنانچه $g = e^\sigma g_0$ که در آن g_0 متر اقلیدسی می‌باشد. خمینه‌های موضعاً همدیس

تخت توسط خواص تانسورهای وابسته به انحنا که وابسته به بعد خمینه می‌باشند تعیین می‌شوند. گاوس در سال ۱۸۲۲ میلادی نشان داد که هر رویه موضعاً همدیس تخت می‌باشد. همچنین می‌دانیم که یک خمینه ۳—بعدی موضعاً همدیس تخت می‌باشد اگر و تنها اگر تانسور اسکوتون آن کودازی باشد (توجه کنید که در بعد سه W متحد صفر می‌باشد). یعنی داشته باشیم:

$$(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z).$$

برای بعد $n \geqslant 4$ ، خمینه شبه ریمانی موضعاً همدیس تخت می‌باشد اگر و تنها اگر تانسور وایل آن، یعنی W صفر باشد.

۳.۱ عملگر های انحنا

انتقال خواص جبری تانسور انحنای ریمان به فضای زمینه خمینه‌ها یک مساله اساسی در هندسه دیفرانسیل می‌باشد. با توجه به مشکل بودن کار با کل تانسور انحنا، تحقیقات معمولاً منتهی به بررسی ساختاز جبری برخی عملگرهای طبیعی معیّن می‌شود، عملگر ژاکوبی و تانسور انحنای شبه متقارن نمونه‌هایی از آن جمله می‌باشند [۲۸].

در این بخش ما برخی تعریف ها که در ارتباط با عملگرهای مختلف می‌باشند را یادآودی می‌کنیم. اگرچه برخی تعاریف در زمینه جبری بیان می‌شوند، آنها به طور خودکار به زمینه هندسی ترجمه می‌شوند.

عملگرهای انحنا از دو دیدگاه مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرند. اولین دیدگاه به بررسی طیف هایی از عملگرهای انحنا (که منجر به مطالعه خمینه‌های اوزرمن و ایوانف—پتروفا می شود) مربوط می‌شود. درحالی که دیدگاه دیگر روی رفتار فضاهای ویژه عملگر انحنا، با توجه ویژه به خواص جابجایی آنها تاکید دارد (سنکوف، شبه سنکوف، ریچی نیم متقارن و غیره).