بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی
(گرایش کاربردی)

درباره جواب تیخونف منظم مسئله کمترین مربعات

از:

ملیحه بهبودی کاهو

استاد راهنما:

دکتر سعید کتابچی

استاد مشاور:

دکتر مازیار صلاحی

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به بزرگ بانوی مهر، برترین زن عالم هستی، دختر پیامبر، دلیل پیدایش همه هستی. تقدیم به مهر تو، تقدیم به عشق تو، تقدیم به نگاه تو. سپاس و درود پروردگار بر تو و صبر زیبایت ای سنگ صبور من. فاطمه جان این رساله و همه وجود خود که در برابر مهر تو هیچ نیست، با همه کاستی هایش به تو تقدیم می‌کنم.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خداوندی را که زبان از عنایت شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز، او که آغاز و پایانی ندارد. پروردگار متعال را شاکرم که عنایت پیدا و پنهانش در تمام زندگی‌ام جریان داشته‌است. اکنون که با لطف او مرحله دیگری از تحصیلاتم را به پایان می‌رسانم بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را از اساتید علمی و اخلاقی، خانواده و دوستان خود خواستارباشم.

ابتدا از مادر مهربان و بزرگوارم سپاسگزارم که با شکیبایی و تلاش خود همواره امیدبخش و پشتیبان من در راه کسب دانش بوده‌است. هم او که جلوه مهر الهی است، وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر. توانش رفت تا به توانی برسم و مویش سپید گشت تا رویم سپید بماند. او که راست قامتی‌ام در شکستگی قامتش تجلی یافت. در برابر وجودش زانوی ادب بر زمین می‌گذارم و با دلی مملو از عشق و ارادت بر دستانش بوسه می‌زنم. همچنین از برادرم ابراهیم که همواره پشتیبان و یاورم بود سپاسگزارم.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات و تلاش‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر سعید کتابچی و استاد مشاورم جناب آقای دکتر مازیار صلاحی تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی آقای دکتر فتحی و داوران این رساله آقایان دکتر تقی‌زاده و دکتر کیانپور تشکر می‌کنم که با راهنمایی های خود مرا در تصحیح این رساله یاری نمودند.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد گرانقدر و ارجمند جناب آقای دکتر ورسه‌ای کمال تشکر و امتنان را داشته‌باشم. خداوند را سپاسگزارم در دوره‌ای توفیق شاگردی ایشان که یکی از نوابغ و نوادر روزگار هستند، را داشتم. از ایشان که مهمترین و مشکل‌ترین درس زندگی، درس آزاد زیستن و آزاد اندیشیدن را به من آموختند به اندازه تمام لحظات زندگی‌ام سپاسگزارم.

فهرست مطالب

چکیده

درباره جواب تیخونف منظم مسئله کمترین مربعات
ملیحه بهبودی کاهو

مجموع کمترین مربعات روشی برای بحث درباره دستگاه معادلات خطی فرامعین $Ax \simeq b$ است، که در این دستگاه داده‌های ماتریس A و بردار b دارای خطا هستند. منظم سازی تیخونف بر روی مجموع کمترین مربعات منجر به یک مسئله مینیمم سازی با تابع هدفی شامل دو تابع کسری و درجه دوم، می‌شود. این مسئله نامحدب تبدیل به مسئله مینیمم سازی تابع تک متغیره ϕ بر روی یک بازه بسته می‌شود. محاسبه مقدار این تابع و مشتق آن در هر نقطه نیازمند حل یک زیر مسئله ناحیه اعتماد است.

واژه‌های کلیدی: منظم سازی تیخونف، مجموع کمترین مربعات، مسئله کسری، مسئله نامحدب، زیر مسئله ناحیه اعتماد.

Abstract

On the solution of Tikhonov regularization of least squares problem

M. Behboodi Kahoo

Total least squares (TLS) is a method for treating on overdetermined system of linear equtions $Ax \simeq b$, where both the matrix A and the vector b are contaminated by noise. Tikhonov regularization of the TLS (TRTLS) leads to an optimazation problem of minimizing the sum of fractional quadratic and quadratic functions. As such, the problem is nonconvex. We show how to reduce the problem to a single variable minimization of a function ϕ over a closed interval. Computing a value and a derivative of ϕ consists of solving a single trust region subproblem.

Key words: Tikhonov regularization, total least squares, fractional programing, nonconvex problem, trust region subproblem.

مقدمه

با توجه به اهمیت و کاربرد فراوان دستگاه معادلات خطی $Ax = b$، بحث در باره این دستگاه معادلات همیشه مورد توجه بوده است. اگرچه محققین و ریاضیدانان بسیاری به ابعاد مختلف این بحث پرداخته‌اند، اما اهمیت و گستردگی موضوع به‌اندازه‌ای است که هم اکنون نیز موضوع بسیاری از تحقیقات، پژوهش‌ها و پایان نامه‌های دانشجویی برخی از ابعاد آن است. این رساله نیز با تکیه بر مفاهیم بهینه سازی به بحث درباره دستگاه معادلات خطی نشدنی می‌پردازد.

مدل‌سازی بسیاری از مسائل منجر به حل دستگاه معادلات خطی می‌شود، اما برخی از این دستگاه معادلات خطی به دلیل خطایی که در اندازه‌گیری و مدل سازی وجود دارد، دارای جواب نیستند، که در اصطلاح نشدنی (یا ناسازگار) گفته می‌شوند.

در این رساله با تبدیل این دستگاه به نزدیک‌ترین دستگاه شدنی، سعی در حل این مشکل و بدست آوردن جواب مسئله جدید می‌نماییم. بدین منظور نیازمند تعاریف و قضایای مقدماتی خواهیم بود که در فصل اول به بیان آنها می‌پردازیم. در فصل دوم، تلاش جهت یافتن دستگاه شدنی با اعمال تغییرات بر دستگاه اولیه خواهد بود. این تلاش به سه صورت انجام می‌گیرد. در هر مورد به مسائل مینیمم سازی غیر مقید برمی‌خوریم. یکی از این موارد مسئله کمترین مربعات کلاسیک است که در فصل دوم به صورت کامل در باره خود مسئله و روشهای حل آن بحث شده است. اما در دو مورد دیگر مسائل کسری و درنتیجه نامحدب خواهند بود. بنابراین برای حل آنها ناگزیریم روشهایی را به کار گیریم تا مسئله از حالت کسری خارج گردد. در این راستا در فصل سوم برای حل این مسئله آن را تبدیل به مسئله مینیمم سازی تابع تک متغیره بر روی بازه $(1, \infty]$ می‌کنیم؛ و برای یافتن مینیم این تابع، خواص پیوستگی و مشتق پذیری آن را بررسی خواهیم کرد. علاوه بر این برای مینیمم تابع تک متغیره بازه تردید می‌یابیم، تا بتوانیم روش تنصیف را برای بدست آوردن نقطه مینیمم بکاربریم. در پایان فصل سوم الگوریتم این روش ارائه می‌شود. اما با توجه به این که در هر تکرار روش تنصیف، نیازمند مقدار تابع تک متغیره در وسط بازه هستیم، و این حقیقت که این مقدار خود وابسته به حل مسئله درجه دوم مقیدی به صورت زیر مسئله ناحیه اعتماد است، در فصل چهارم به معرفی این دسته از مسائل می‌پردازیم. مرجع اصلی این پایان نامه [۱] می‌باشد.

فصل اول

قضایا و مقدمات اولیه

۱–۱ تعاریف و قضایایی از جبرخطی

در این رساله به تعاریف و قضایایی از جبرخطی نیازمندیم. به همین منظور در این بخش به بیان آن در حد نیاز می‌پردازیم. بیشتر تعاریف و قضایای بیان شده از [۲] انتخاب گردیده است.

زیر فضا

تعریف ۱–۱–۱ مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ در R^n را بردارهای وابسته خطی گویند، اگر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ای وجود داشته باشد که $c_i \neq 0$ و همچنین داشته باشیم : $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$. در غیر این صورت این مجموعه از بردارها را مستقل خطی گویند.

تعریف ۱–۱–۲ (زیرفضا) S را مجموعه‌ای از بردارهای $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. اگر هر ترکیب خطی از بردارهای S در خودش باشد، مجموعه S را زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ گویند.

فضای $\mathbb{R}^n$ زیر فضای خودش است.

تعریف ۱–۱–۳ (پایه و بعد) برای هر زیر فضای S از $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای از بردارهای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که اولاً مستقل خطی هستند، ثانیاً هر بردار S را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای آن مجموعه نوشت . به آن مجموعه پایه و به تعداد بردارهای مجموعه بعد زیر فضای S گویند. بعد زیر فضای S را با $dim(S)$ نشان می‌دهند.

۱–۲ بردار و ماتریس

تعریف ۱–۲–۱ تعداد سطرهای (ستونهای) مستقل خطی ماتریس A را رتبه ماتریس A گویند که با $rank(A)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱–۲–۲ فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد. A را یک ماتریس کامل گویند ، هرگاه $rank(A) = min\{m, n\}$. در غیر این صورت A را ماتریس ناقص گویند.

تعریف ۱–۲–۳ ماتریس $n \times n$، A را نامنفرد گویند اگر بعد آن n باشد. در غیر این صورت A را ماتریس منفرد گویند.

تعریف ۱−۲−۴ (دترمینان ماتریس)

برای هر ماتریس مربعی A، دترمینان آن یک عدد حقیقی است، که با $det(A)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای ماتریس 1×1، $det(A) = a_{11}$؛ و برای ماتریس 2×2، $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$؛ و برای ماتریس 3×3، $det(A) = a_{11}det(A_{11}) - a_{12}det(A_{12}) + a_{13}det(A_{13})$ که در آن A_{1i} یک زیر ماتریس 2×2 از A است که با حذف سطراول و ستون i ام ماتریس A بدست آمده‌است.

در حالت کلی برای یک ماتریس $n \times n$، $A = (a_{ij})$، دترمینان A به صورت

$$det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}det(A_{i2}) + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}det(A_{in})$$

تعریف می‌شود، که در آن A_{ij} زیر ماتریس$(n-1) \times (n-1)$ از A است که با حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A بدست آمده‌است.

تعریف ۱−۲−۵ زیر فضای S از $\mathbb{R}^n$ را زیر فضای تولید شده توسط مجموعه بردارهای $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ گویند، اگر هر ترکیب خطی از بردارهای $a_1, a_2, \ldots, a_m$ در S باشد و علاوه بر این هر عضو S را بتوان به صورت ترکیب خطی از بردارهای $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ نوشت. در این تعریف به ازای هر $i \in \{1, \ldots, m\}$، $a_i \in \mathbb{R}^n$ است. زیر فضای S را به صورت $span\{a_1, \ldots, a_n\}$ یا $< a_1, \ldots, a_n >$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱−۲−۶ فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ موجود باشد به طوریکه برای ماتریس A و بردار$x \neq 0$ داشته باشیم $Ax = \lambda x$ ، در این صورت λ را یک مقدار ویژه A وبردار x را بردار ویژه متناظرλ گویند.

نکته ۱−۲−۷ اگر x بردار ویژه متناظر مقدار ویژه λ برای ماتریس A باشد، آنگاه به ازای هر $\alpha \neq 0$، αx نیز بردار ویژه متناظر λ خواهد بود.

نکته ۱−۲−۸ اگر x بردار ویژه متناظر مقدار ویژه λ برای ماتریس A باشد، x بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $\alpha - \lambda$، وابسته به ماتریس $(A - \alpha I)$ است.

قرارداد: در این رساله مقادیر ویژه یک ماتریس را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم، یعنی اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند، داریم $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

تعریف ۱—۲—۹ فضای حاصل از تمام ماتریسهای $m \times n$ را با $L(R^n, R^m)$ نمایش می‌دهیم .

ماتریس های خاص

تعریف ۱—۲—۱۰ فرض کنیدA ماتریس $m \times n$ باشد . ترانهاده ماتریس A که با A^T نمایش داده می‌شود، ماتریسی $n \times m$ است، که از تعویض سطرهای ماتریس A با ستونهای آن بدست می آید. به عبارت دیگر اگر $A = [a_{ij}]$ آنگاه $A^T = [a_{ji}]$.

تعریف ۱—۲—۱۱ ماتریس مربعی A را قطری گویند، اگر تمام مؤلفه‌های آن به جزء مؤلفه‌های قطر اصلی صفر باشند. ماتریس قطری را معمولاً به صورت $D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ نمایش می‌دهند که

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} .$$

تعریف ۱—۲—۱۲ اگر همه درایه‌های روی قطر اصلی یک ماتریس قطری برابر ۱ باشد، ماتریس را همانی گویند؛ و با I نشان می‌دهند.

تعریف ۱—۲—۱۳ ماتریس $n \times n$، $T = [t_{ij}]$ را ماتریس سه قطری[1] گویند، هرگاه به ازای هر i, j که $i > j + 1$ و $j > i + 1$؛ $t_{ij} = 0$ باشد.

مثال ۱—۲—۱۴ ماتریس زیر یک ماتریس سه قطری متقارن است

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

[1] Tridiagonal

تعریف ۱—۲—۱۵ ماتریس $n \times n$، $A = [a_{ij}]$ را ماتریس هزنبرگ بالایی[۲] گویند، هرگاه به ازای هر i که $i > j + ۱$، $a_{ij} = ۰$ باشد. به‌طور مشابه ماتریس مربعی A را هزنبرگ پایینی[۳] گویند، هرگاه به ازای هر j که $j > i + ۱$، داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

مثال ۱—۲—۱۶ ماتریس زیر یک ماتریس هزنبرگ بالایی است

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۹ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱—۲—۱۷ ماتریس مربعی A را متقارن گویند، هرگاه داشته باشیم: $A^T = A$.

تعریف ۱—۲—۱۸ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. A را ماتریسی معکوس پذیر گویند، هر گاه ماتریس B، $n \times n$، وجود داشته باشد، که $AB = I$. ماتریس B را معکوس (وارون) ماتریس A گویند و آن را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱—۲—۱۹ اگر A ماتریس $m \times n$، $n \geq m$ و بعد آن n باشد، ماتریس $A^{\dagger} = (A^T A)^{-۱} A^T$ را شبه‌معکوس[۴] A، می‌نامند. علاوه بر این نام به آن Moore-Penrose،A نیز گفته می‌شود.

تعریف ۱—۲—۲۰ ماتریس متقارن A را معین مثبت گویند، هرگاه $\forall x \neq ۰ : x^T A x > ۰$. همچنین ماتریس متقارن A را نیمه معین مثبت گوییم، هرگاه $\forall x : x^T A x \geq ۰$.

قرارداد: در این رساله، نیمه معین بودن ماتریس A را به صورت $A \succeq ۰$، و همچنین معین مثبت بودن آن را به صورت $A \succ ۰$، نمایش می‌دهیم.

---

[۲] Upper Hessenberg

[۳] Lower Hessenberg

[۴] Pseudoinverse

قضیه ۱-۲-۲۱

الف) اگر A معین مثبت باشد، A^{-1} نیز معین مثبت است .

ب) اگر A ماتریس $m \times n$ $(m \geq n)$ کامل باشد، A^TA معین مثبت است .

مثال ۱-۲-۲۲ : $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}$ یک ماتریس معین مثبت است.

اگر $x = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$، آنگاه

$$x^TAx = (\,x_۱ \quad x_۲\,) \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = ۲(x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲)^۲ + \frac{۹}{۲}x_۲^۲ > ۰.$$

نکته ۱-۲-۲۳ مقادیر ویژه ماتریس نیمه معین مثبت، نامنفی و مقادیر ویژه ماتریس معین مثبت، مثبت هستند.

قضیه ۱-۲-۲۴ ماتریس متقارن معین مثبت A را می‌توان به صورت $A = MM^T$ نوشت ، که در آن M ماتریس پایین مثلثی است. به این تجزیه، تجزیه چولسکی[۵] گویند.

برای توضیحات بیشتر و الگوریتم این تجزیه به[۲] مراجعه شود.

نرم‌ها

تعریف ۱-۲-۲۵ فرض کنید x یک بردار n بعدی باشد. نرم بردار x که با $\|x\|$ نشان داده می شود، یک مقدار حقیقی است، که توسط یک تابع پیوسته از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ تعریف می شود و دارای خواص زیر است :

الف) برای هر بردار دلخواه x داریم $\|x\| \geq ۰$، و $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

ب) برای هر بردار دلخواه x و هر اسکالرα داریم: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

ج) برای هر بردار دلخواه x و y داریم: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

قسمت ج به نامساوی مثلثی مشهور است .

---

[۵] Cholesky factorization

نکته ۱-۲-۲۶ برای هر بردار دلخواه x و y روابط زیر برقرار است :

$$\|x\| = \|-x\| \quad \text{و} \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|(x-y)\|.$$

تعریف ۱-۲-۲۷ نرم-۱ (نرم مجموع) برای هر $x \in R^n$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad .$$

تعریف ۱-۲-۲۸ نرم-۲(نرم اقلیدسی) برای هر $x \in R^n$ به صورت زیر است :

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad .$$

تعریف ۱-۲-۲۹ نرم-∞(نرم ماکسیمم) برای هر $x \in R^n$ به صورت زیر است :

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad .$$

تعریف ۱-۲-۳۰ در حالت کلی اگر p یک عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۱ باشد، آنگاه نرم $- p$(نرم Holder) به صورت زیر است:

$$\|x\|_p = (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \cdots + \|x_n\|^p)^{1/p} \quad .$$

مثال ۱-۲-۳۱ :فرض کنید $x = (1, 1, -2)^T$

$$\|x\|_1 = |1| + |1| + |-2| = 4,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6},$$

$$\|x\|_\infty = \max\{1, 1, 2\} = 2.$$

تعریف ۱-۲-۳۲ فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد، نرم ماتریس $\|A\|$، عددی حقیقی است که دارای خواص زیر باشد:

الف) $\|A\| > 0$ ، و $\|A\| = 0$ اگر وفقط اگر A ماتریس صفر باشد.

ب)برای هراسکالرα داشته باشیم $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.

ج)برای‌ماتریس های A و B داشته باشیم $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$.

تعریف ۱–۲–۳۳ (نرم وابسته ماتریس)

اگر A ماتریس $m \times n$ باشد ، نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|A\| = \max_{x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad .$$

که در آن نرم‌های سمت راست نرم برداری است.

درادامه فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد. از تعریف بالا می‌توان به‌سادگی نکات زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۱–۲–۳۴ : نرم –۱ (نرم ستونی) به صورت زیر بدست می آید:

$$\|A\|_{۱} = \max_{۱\le j\le n} \sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}| \quad .$$

قضیه ۱–۲–۳۵ نرم –∞ (نرم سطری) به صورت زیر بدست می آید:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{۱\le i\le m} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}| \quad .$$

قضیه ۱–۲–۳۶ نرم –۲ [۶] به صورت زیر است :

$$\|A\|_{۲} = \sqrt{\lambda_{max}}$$

که در آن λ_{max} بزرگترین مقدارویژه ماتریس A^TA است.

تعریف ۱–۲–۳۷ : نرم فروبنیوس [۷] به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_F = [\sum_{j=۱}^{n} \sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}|^{۲}]^{۱/۲} \quad .$$

---

[۶] Spectral norm

[۷] Frobenius

مثال ۱—۲—۳۸ فرض کنید $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$، آنگاه

$$\|A\|_۱ = \max\{۱+۲, ۵+۳\} = ۸,$$

$$\|A\|_\infty = \max\{۲+۵, ۱+۳\} = ۷,$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} ۵ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۳۴ \end{pmatrix}.$$

مقادیر ویژه A^TA برابر ۳۸/۹۷۴۳ و ۰/۰۲۵۷ است .

$$\|A\|_۲ = \sqrt{\max\{۳۸/۹۷۴۳, ۰/۰۲۵۷\}} = \sqrt{۳۸/۹۷۴۳} = ٦/۲۴۲۹,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{۲^۲+۱^۲+۵^۲+۳^۲} = ٦/۲۴۴۹.$$

نکته ۱—۲—۳۹ اگر A ماتریس $m \times n$ و x بردار n تایی باشد، آنگاه داریم

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p.$$

که در آن $\|A\|_p$ نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری p است.

نکته ۱—۲—۴۰ برای هر ماتریس A، $\|A^T\|_\infty = \|A\|_۱$ و $\|A^T\|_۱ = \|A\|_\infty$.

تعریف ۱—۲—۴۱ عدد شرطی ماتریسهای مربعی نامنفرد به صورت

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-۱}\|$$

و عدد شرطی ماتریسهای غیر مربعی کامل به صورت

$$cond(A) = \|A\| \|A^\dagger\|$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱—۲—۴۲ یک مسئله را بد وضع[۸] (بد حالت) گویند، اگر تغییرات کوچک در داده‌ها سبب تغییرات عمده در جواب شود. در غیر این صورت آن را خوش وضع[۹] (خوش حالت) گویند.

---

[۸] Ill-conditioned

[۹] Well-conditioned