بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیزعددی

حل عددی معادلات
انتگرال- دیفرانسیل فازی به روش تاو

مولف

آسیه ابوبی

استاد راهنما

دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور

دکترمحمود محسنی مقدم

شهریور ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: آسیه ابویی　　　　امضاء:

استاد راهنما: دکتر عظیم ریواز　　　　امضاء:

استاد مشاور: دکترمحمود محسنی مقدم　　　　امضاء:

داور اول : دکتر آزیتا تاج الدینی　　　　امضاء:

داور دوم: دکتر اسفندیار اسلامی　　　　امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر غلامرضا آقاملائی　　　　امضاء:

تقدیم به:

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران پشتیبان،

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس هست و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید،

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند،

این کوشش را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم. مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به عزیز زندگیم:

صاحب زیباترین و پرمعناترین واژه هستی که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بوده و تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من می‌باشد.

تشکر و قدردانی

اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر تو را دارم و نه توان تشکر از بندگان تو، و اما بر حسب وظیفه به مصداق "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق" از تمام عزیزانی که مرا در پیمودن این راه یاری نمودند، مراتب تشکر و سپاس را به جای آورم.

در ابتدا از پدر و مادر و خانواده عزیزم که در این مرحله همانند سایر مراحل سخت و دشوار زندگی بزرگترین حامی و پشتیبانم بودند سپاسگزارم و بهترین ها را برایشان آرزومندم. شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر عظیم ریواز که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم. با سپاس فراوان از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر محمود محسنی مقدم که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، همواره مشاور و راهگشایم در اتمام و اکمال این رساله بوده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و تواضع و فروتنی ایشان را منشأ جاودانه می‌نهم که آنچه از ایشان آموختم همه لطف و مهربانی بود. از اساتید محترم خانم دکتر آزیتا تاج الدینی و آقای دکتر اسفندیار اسلامی که زحمت مطالعه و تصحیح این رساله را بر عهده داشته و باعث پیشبرد هر چه بهتر این رساله بوده‌اند، نهایت سپاسگذاری و تشکر را دارم و از خداوند منان برای ایشان توفیق روزافزون و طول عمر پر برکت را خواستارم. همچنین از جناب آقای دکتر غلامرضا آقاملائی نماینده محترم تحصیلات تکمیلی به دلیل قبول زحمت این پایان نامه، صمیمانه تشکر می‌نمایم. از تمامی دوستان و عزیزانی که مرا در تکمیل و به نتیجه رسیدن این رساله یاری رساندند سپاسگزارم و از خداوند منان کسب موفقیت و کامیابی را در تمامی مراحل زندگی‌اشان خواستارم.

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا تاریخچه‌ای از مفاهیم اولیه فازی و معادلات انتگرال فازی را بیان کرده، سپس در فصل دوم به روشهای حل عددی معادلات انتگرال فازی می‌پردازیم. فصل سوم را، که حاوی نتایج تحقیقات شخصی می‌باشد، به روشهای حل عددی معادلات انتگرال- دیفرانسیل فازی اختصاص داده که از جمله این روشها، روش تاو می‌باشد.

کلمات کلیدی: *معادلات انتگرال فازی، معادلات انتگرال- دیفرانسیل فازی، روش تاو*

مقدمه

معادلات انتگرال- دیفرانسیل در سال‌های اخیر حجم وسیعی از مطالعات را به خود اختصاص داده است. در سال ۱۹۸۱ روش تاو اولین بار توسط اورتیز [۱] و سمرا [۲] برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به کار گرفته شد. از سال ۱۹۹۹ شهمراد، حسینی، رحیمی، اردبیلی و عبادی این روش را برای حل عددی انواع معادلات انتگرال و معادلات انتگرال- دیفرانسیل خطی و غیرخطی مورد بحث قرار دادند.

ما در این پایان نامه این روش را برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل فازی به کار می‌بریم. برای این منظور روش نیوتن را برای خطی سازی یک معادله انتگرال- دیفرانسیل غیرخطی فازی به کار می‌بریم. سپس معادله انتگرال- دیفرانسیل فازی خطی را به روش تاو حل می‌کنیم.

[۱] E.L.Ortiz

[۲] H.Samara

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه ریاضیات فازی و معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی [۱] شاخه‌ای از ریاضیات است که بنیانگذار آن پروفسور لطفی عسکر زاده [۲] دانشمند ایرانی تبار می‌باشد. این نظریه از زمان ارائه آن، یعنی سال ۱۹۶۵ تاکنون گسترش و تعمیق زیادی در جنبه‌های نظری و کاربردی داشته است.

واژه ً فازی ً در فرهنگ آکسفورد به صورت مبهم، گنگ نادقیق و نامشخص تعریف شده است، لذا آن را فازی یا مشکک ترجمه می‌کنیم، که در این پایان نامه از واژه فازی استفاده شده است.

نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان که قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌های را که نادقیق هستند، صورت بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم کند. نظریه مجموعه‌های فازی کاربردهای متعددی در عرصه‌های تصمیم گیری درباره مسائل مربوط به مدیریت، هوش مصنوعی و فرآیندهای کنترل دارد، کاربردهای فزآینده آن یکی از عوامل پیشرفت جهشی این نظریه است.

تفاوت نظریه مجموعه‌های معمولی با نظریه مجموعه‌های فازی در این است که اولی دارای این ویژگی است که هر مجموعه و هر شیء را در نظر بگیریم می‌توانیم تعیین کنیم که این شیء عضو این مجموعه است یا نه، اما دومی این ویژگی را ندارد و مسئله را می‌توان تنها با در نظر گرفتن درجه عضویتی بین ۰ و ۱ برای هر شیء بررسی کرد.

---

[۱] Fuzzy

[۲] Lotfi A. Zadeh

۲.۱ ساختار مجموعه‌های فازی

۱.۲.۱ مجموعه معمولی و مجموعه فازی

در مجموعه‌های معمولی، عناصر یک مجموعه بر اساس یک ویژگی خوش تعریفی مشخص می‌شوند و خوش تعریفی به این معنی است که دقیقاً می‌توان مشخص کرد که هر عنصر، متعلق به این مجموعه هست یا نه. در این صورت اگر عنصری دارای ویژگی خوش تعریف مجموعه باشد عضو آن مجموعه است، در غیر اینصورت عضو آن مجموعه نیست.
این خوش تعریفی را می‌توان به صورت زیر:

$$A = \{x \in X : P(x)\}$$

نمایش داد که در آن $P(x)$ خاصیت مجموعه است.
لذا اگر X مجموعه مرجع باشد، آنگاه زیر مجموعه معمولی A از X دسته‌ای از عناصر است که دقیقاً مشخص شده باشند. اما در بسیای از موارد دیگر P دارای خاصیت خوش تعریف نیست و در تعیین عناصر A دچار مشکل می‌شویم. چنین خاصیت‌های ناخوش تعریف، مجموعه‌های فازی را به وجود می‌آورند.

۲.۲.۱ تابع عضویت مجموعه‌های فازی

فرض کنید X مجموعه مرجع باشد و A زیر مجموعه معمولی از آن باشد. برای این تابع می‌توان تابعی بنام تابع مشخصه یا نشانگر بصورت زیر تعریف کرد:

$$\chi_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$$

$$\chi_A = \begin{cases} ۱ & x \in A \text{ اگر} \\ ۰ & x \notin A \text{ اگر} \end{cases}$$

با توجه به تعریف تابع مشخصه $\chi_A(x)$ یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را برای هر $x \in X$ می‌گیرد. بنا به توصیه پروفسور لطفی عسکر زاده، برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه بسته $[۰, ۱]$ توسعه می‌دهیم، در این صورت تابعی خواهیم داشت که به هر عضو x از X عددی از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد. در این حالت مجموعه را مجموعه فازی می‌نامیم و با $\widetilde{A}$ نشان می‌دهیم و این تابع را تابع عضویت $\widetilde{A}$ می‌نامیم و باμ_A نشان می‌دهیم. همچنین به ازای هر $x \in X$،$\mu_A(x)$ را درجه عضویت x در مجموعه $\widetilde{A}$ می‌نامیم.

بنابراین یک مجموعه فازی، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن به طور پیوسته از بازه $[۰, ۱]$ اختیار می‌شوند. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ به طور کامل و یکتا توسط تابع عضویت $\mu_A(x)$ مشخص می‌شود. در واقع تابع عضویت به هر عضو، وابسته به میزان دارا بودن صفت مورد نظر، درجه ای که عددی بین ۰ و ۱ است، را نسبت می‌دهد. $\mu_A(x)$ را می توان درجه پذیرش x به عنوان عضوی از $\widetilde{A}$ در نظر گرفت.

۳.۲.۱ عملگرهای مجموعه‌ای

در این بخش عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی تعریف می‌شوند. در تمامی موارد زیر، X یک مجموعه مرجع و $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ زیر مجموعه‌های فازی آن به ترتیب با تابع عضویت $\widetilde{A}(x)$ و $\widetilde{B}(x)$ می‌باشند.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را تهی گوییم اگر برای هر $x \in X$ ، $\widetilde{A}(x) = ۰$.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را تام می‌گوییم اگر برای هر $x \in X$ ، $\widetilde{A}(x) = ۱$.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را زیر مجموعه فازی $\widetilde{B}$ گوییم و می‌نویسیم $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ اگر برای هر $x \in X$ ، $\widetilde{A} \leqslant \widetilde{B}$.

تعریف ۴.۲.۱. دو مجموعه فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ را مساوی گوییم و می‌نویسیم $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ اگر برای هر $x \in X$ ، $\widetilde{A}(x) = \widetilde{B}(x)$.

تعریف ۵.۲.۱. اگر $\widetilde{A}_{1},\cdots,\widetilde{A}_n$ به ترتیب زیر مجموعه‌های فازی از $X_{1},\cdots,X_n$ باشند، حاصلضرب دکارتی $\widetilde{A}_{1},\cdots,\widetilde{A}_n$ که با $\widetilde{A}_{1}*\cdots*\widetilde{A}_n$ نشان داده می‌شود به صورت زیر مجموعه فازی از فضای حاصلضرب $X_{1},\cdots,X_n$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\Big(\widetilde{A}_{1}*\cdots*\widetilde{A}_n\Big)\Big(x_{1},\cdots,x_n\Big)=min\Big\{\widetilde{A}_i(x_i)\Big\}\quad i=1,\cdots,n$$

۳.۱ α- برشها و اتحاد تجزیه

در این بخش به معرفی یکی از مفاهیم مفید و مهم که بیانگر نوعی رابطه بین یک مجموعه فازی و مجموعه‌های معمولی است می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. زیر مجموعه (معمولی) عناصری از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ حداقل به بزرگی α ($\alpha>0$) باشد، α - برش $\widetilde{A}$ (یا مجموعه تراز α) وابسته $\widetilde{A}$ گوئیم و با $\widetilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهیم. پس

$$\widetilde{A}_\alpha=\Big\{x\in X|\ \widetilde{A}(x)\geq\alpha\Big\}$$

و α - برش قوی را بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\widetilde{A}_{\alpha^\cdot}=\Big\{x\in X|\ \widetilde{A}(x)>\alpha\Big\}$$

قضیه ۲.۳.۱. *خانواده* $\Big\{\widetilde{A}_\alpha|\ \alpha\in[0,1]\Big\}$ *یکنواست یعنی:*

۱. $\widetilde{A}_\beta\subseteq\widetilde{A}_\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad 0<\alpha\leq\beta\leq 1$

۲. $\widetilde{A}_\alpha\subseteq\widetilde{B}_\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$

۳. $\Big(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\Big)_\alpha=\widetilde{A}_\alpha\cup\widetilde{B}_\alpha$

۴. $\Big(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\Big)_\alpha=\widetilde{A}_\alpha\cap\widetilde{B}_\alpha$

برهان. ر.ک.[۳۱،۳۳]. □

اکنون به بیان و تشریح یک رابطه اساسی، موسوم به اتحاد تجزیه می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۳. *(اتحاد تجزیه): هر مجموعه فازی مانند $\widetilde{A}$ را می‌توان بصورت زیر بر حسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد:*

$$\widetilde{A}(x) = \sup \ \alpha \ \chi_{\widetilde{A}_\alpha}(x) \qquad \alpha \in [۰, ۱]$$

که در اینجا $\chi_{\widetilde{A}_\alpha}$ تابع مشخصه $\widetilde{A}_\alpha$ است.

برهان. ر.ک.[۳۳]. □

حال با توجه به نماد گذاری می توان اصل تجزیه را به صورت زیر بیان کرد. اگر $\widetilde{A} \in F(x)$ آنگاه:

$$\widetilde{A} = \cup \ \alpha \ \widetilde{A}_\alpha \qquad \alpha \in [۰, ۱]$$

۴.۱ کمیت‌های فازی محدب

در نظریه مجموعه‌های فازی، مفهوم تحدب نقش مهم و کاربردی ایفا می‌کند. تعریف کمیت‌های فازی محدب بصورت زیر است.

تعریف ۱.۴.۱. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ را محدب گوییم، هرگاه به ازای هر α که عضو بازه $[۰, ۱]$ باشد α - برش $\widetilde{A}$ محدب باشد در غیر این صورت آن مجموعه را غیر محدب گوییم.

قضیه ۲.۴.۱. *مجموعه فازی $\widetilde{A}$ محدب است اگر و فقط اگر برای هر $y \in [x, z]$ داشته باشیم:*

$$\widetilde{A}(y) \geq min \left\{ \widetilde{A}(x), \widetilde{A}(z) \right\}$$

برهان. ر.ک.[۲۷]. □

قضیه ۳.۴.۱. *اگر $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ محدب باشند آنگاه $\widetilde{A}+\widetilde{B}$ و $-\widetilde{A}$ نیز محدب خواهند بود.*

تعریف ۴.۴.۱. یک کمیت فازی نیمه پیوسته بالایی است اگر α - برش هایش بسته باشند.

قضیه ۵.۴.۱. *یک کمیت فازی $\widetilde{A}$ نیمه پیوسته بالایی است اگر و فقط اگر برای هر $x \in \Re$ و $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $|x-y| < \delta$ نتیجه بدهد:*

$$\widetilde{A}(y) < \widetilde{A}(x) + \varepsilon$$

۵.۱ اعداد فازی

یک عدد فازی $\widetilde{u}$ یک کمیت فازی است که تعمیمی از یک عدد حقیقی مانند r را نمایش می‌دهد، تعریفی از عدد فازی را می توان به این صورت بیان کرد:

تعریف ۱.۵.۱. یک عدد فازی $\widetilde{u}$ یک کمیت فازی است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱. به طور دقیق یک x وجود داشته باشد که $\widetilde{u}(x) = ۱$.

۲. $supp\widetilde{u} = \{x| \ \ \widetilde{u}(x) \geq ۰\}$ یک مجموعه کراندار باشد.

۳. α - برش های $\widetilde{u}$ بازه‌های بسته باشند.

مجموعه همه اعداد فازی را با E نشان می‌دهیم.
البته باید توجه کنیم که تعاریف متفاوتی برای اعداد فازی بیان شده است و تعریف قبل، یک تعریف عمومی برای اعداد فازی نیست.

تعریف ۲.۵.۱. یک عدد فازی دلخواه به شکل پارامتری با یک زوج مرتب از توابع $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ نمایش داده می‌شود و شرایط زیر را دارا می‌باشد:

۱. $\underline{u}(r)$ تابعی کراندار، پیوسته چپ و صعودی روی بازه $[۰،۱]$ است.

۲. $\overline{u}(r)$ تابعی کراندار، پیوسته راست و نزولی روی $[۰،۱]$ است.

۳. برای هر $r \in [۰, ۱]$ ، $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$.

تعریف ۳.۵.۱ جمع و ضرب اعداد فازی دلخواه $u = (\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ و $v = (\underline{v}(r), \overline{v}(r))$ به صورت زیر می‌باشد. در روابط زیر $k \in \Re$ در نظر گرفته شده است.

$$(\overline{u+v})(r) = \overline{u}(r) + \overline{v}(r)$$

$$(\underline{u+v})(r) = \underline{u}(r) + \underline{v}(r)$$

$$(\overline{ku})(r) = k\underline{u}(r) \quad , \quad (\underline{ku})(r) = k\overline{u}(r)$$ اگر $k < ۰$ آنگاه

$$(\overline{ku})(r) = k\overline{u}(r) \quad , \quad (\underline{ku})(r) = k\underline{u}(r)$$ اگر $k > ۰$ آنگاه

تعریف ۴.۵.۱ فاصله بین اعداد فازی $v = (\underline{v}, \overline{v})$ و $u = (\underline{u}, \overline{u})$ به صورت زیر می‌باشد:

$$D(u,v) = max\left\{sup|\underline{u}(r) - \overline{v}(r)|, sup|\overline{u}(r) - \underline{v}(r)|\right\} \quad , ۰ \leq r \leq ۱$$

قضیه ۵.۵.۱ (E, D) *یک فضای متری کامل است.*

برهان. ر.ک.[۱۸]. □

تعریف ۶.۵.۱ هر تابع مانند $f : \Re \longrightarrow E$ را یک تابع فازی می‌گوییم.

۶.۱ تفاضل هوکوهارا [۱]

همانطور که می‌دانیم در محاسبات بازه ها داریم:

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

[۱] Hukuhara

بنابراین اگر داشته باشیم $A=[a,b]$، $(a\neq b)$ می‌بینیم که:

$$A-A=[a,b]-[a,b]=[a-b,b-a]\neq\{۰\}$$

در واقع می‌بینیم که $A-A\neq\{۰\}$ حال می‌خواهیم تفاضل هوکوهارا را بصورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم که A,B دو مجموعه غیر تهی باشند،در اینصورت اگر مجموعه ناتهی مانند C وجود داشته باشد به طوری که $A=B+C$ آنگاه C تفاضل هوکوهارا بین A,B نامیده می‌شود و می‌نویسیم:

$$A\Theta B=C$$

۷.۱ متر هاسدورف[۱]

فرض می‌کنیم که $x\in\Re$ و A,B دو زیر مجموعه ناتهی از $\Re$ باشند و

$$\rho(x,A)=inf\{|x-a|,a\in A\}$$

$$d(A,B)=sup\{\rho(a,B),a\in A\}$$

در این صورت تفاضل هاسدورف A,B که یک متر روی زیر مجموعه‌های فشرده و ناتهی از $\Re^n$ تعریف می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D(A,B)=max\{d(A,B),d(B,A)\}$$

با توجه به تعریف اعداد فازی می‌توان متر هاسدورف را برای هر $\widetilde{u},\widetilde{v}\in E$ تعریف کرد که به صورت زیر می‌باشد:

$$D(\widetilde{u},\widetilde{v})=\sup\max\{|\underline{u}(r)-\overline{v}(r)|,|\overline{u}(r)-\underline{v}(r)|\}\qquad ۰\leq r\leq ۱$$

[۱] Hausdorff

۸.۱ پیوستگی و مشتق توابع فازی

تعریف ۱.۸.۱. تابع فازی $\widetilde{f}:\Re \longrightarrow E$ را پیوسته گوییم اگر برای هر $x_{\cdot} \in \Re$ و $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد:

$$|x - x_{\cdot}| < \delta \Longrightarrow D(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x_{\cdot})) < \varepsilon$$

در این بخش می‌خواهیم فقط توابع فازی تعریف شده روی بازه نامتناهی $T \in \Re$ را در نظر بگیریم.

α - برش تابع فازی $\widetilde{f}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{f}_r(x) = \left[\underline{f}(x,r), \overline{f}(x,r)\right]$$

بنابراین نمایش پارامتری تابع فازی $\widetilde{f}$ به صورت $\widetilde{f}(x) = \left(\underline{f}(x,r), \overline{f}(x,r)\right)$ می‌باشد.
قضیه زیر را می‌توان معیاری برای پیوستگی توابع فازی در نظر گرفت. برای دیدن اثباتی از قضایا و نتایج این بخش می‌توانید به [۴،۵،۶،۲۱،۲۲،۳۴] رجوع کنید.

قضیه ۲.۸.۱. *تابع فازی $\widetilde{f}:T \longrightarrow E$ پیوسته است اگر و فقط اگر $\underline{f}(x,r), \overline{f}(x,r)$ روی $T * [0,1]$ پیوسته باشند.*

تعریف ۳.۸.۱. تابع فازی $\widetilde{f}:T \longrightarrow E$ مشتق‌پذیر سیکالا [۱] است اگر $\underline{f}(x,r), \overline{f}(x,r)$ در سه شرط تعریف ۲.۵.۱ صدق کنند که آنگاه می‌نویسیم:

$$\widetilde{f}'_r(x) = \left[\underline{f}'(x,r), \overline{f}'(x,r)\right]$$

در اینجا «پرایم» مشتق نسبت به x را نشان می‌دهد.

تعریف ۴.۸.۱. تابع فازی $\widetilde{f}:T \longrightarrow E$ در نقطه $x_{\cdot} \in T$ مشتق‌پذیر هوکوهارا است اگر $\widetilde{f}'(x_{\cdot}) \in E$ و

[۱] Seikkala