دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

گروه‌های بنیادین فضاهای یک بعدی وحشی و گوشواره هاوایی

استاد راهنما:

آقای دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور:

خانم دکتر فاطمه هلن قانع

نگارش:

زهره وثاق

تابستان ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحيم

تشکر و قدردانی

سپاس می‌گویم خداوند را که به اینجانب توفیق به اتمام رساندن این پایان‌نامه را عطا فرمود و در این راه درس‌های بسیاری به من آموخت؛ باشد که آن‌ها را چراغ راه خویش قرار دهم و به عهدی که با او دارم پایبند بمانم.

در طول انجام این پایان‌نامه تجربه‌های بسیاری آموختم که بخش عظیمی از آن‌ها را مدیون عزیزانی هستم که شمردن نام همهٔ آن‌ها بدون تردید ممکن نخواهد بود. حمایت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر مشایخی همواره پشتیبانم بود. ایشان با دقت نظر و نگاه موشکافانه همواره مرا یاری نمودند و در این راه از راهنمایی‌های استاد ارجمندم سرکار خانم دکتر قانع بی‌بهره نبودم.

امیدوارم بتوانم آموزه‌هایی که در عرصهٔ علم و عمل از اساتید ارجمندم دریافت کرده‌ام را حفظ کنم و لیاقت پاسداشت آن‌ها را داشته باشم.

این پایان‌نامه را تقدیم می‌کنم به همسر عزیزم، او که با دلی آکنده از محبت و راستی همواره در این راه همراه و همدلم بود.

زهره وثاق

شهریور ۱۳۸۷

فهرست مطالب

به نام یگانه هستی بخش

پیشگفتار

هدف اصلی توپولوژی جبری، برقراری ارتباط بین دو مبحث جبر وتوپولوژی می‌باشد. تاکنون برای یافتن تعابیر جبری مناسب برای مفاهیم توپولوژیکی تلاش‌های بسیاری شده است، از جمله نتایج این تلاش‌ها، پیدایش تابعگون‌های معروفی همچون π_nها و H_nها می‌باشد، که به نوعی نقش پل ارتباطی بین دنیای توپولوژی و دنیای جبری را بازی می‌کنند.

در این میان گروه بنیادین یکی از پرکاربردترین این تابعگون‌ها می‌باشد و فضای گوشواره هاوایی از جمله فضاهای مطرح در توپولوژی جبری است که مدت‌ها گروه بنیادین آن ناشناخته بوده است. دانشمندان بسیاری در خصوص گروه بنیادین این فضا و خواص آن مطالعه و تحقیق نموده‌اند.

کاتسویا اِدا از جمله علاقمندان به فضای گوشواره هاوایی است، وی در سلسله مقالاتی به بررسی رابطهٔ بین گروه بنیادین گوشواره هاوایی و گروه بنیادین فضاهای مختلف پرداخته است.

ادا در سال ۱۹۹۲ در [۴]، حاصل ضرب جدیدی به نام σ- حاصل ضرب آزاد گروه‌ها را معرفی نمود، او در این مقاله نشان داد که گروه بنیادین گوشواره هاوایی σ - حاصل ضرب آزاد $\mathbb{Z}$ها است.

وی در مقاله‌ای دیگر [۵] به اثبات این موضوع پرداخت که از گروه بنیادین فضاهایی معین چون X، به گروه بنیادین گوشواره هاوایی تکریختی وجود دارد. فضای X دارای خواص زیر می‌باشد:

مسیرهای $\{A_i; i \in I\}$ با نقاط انتهایی $\dot{A}_i = \{u_i, v_i\}$ و مجموعهٔ بسته D وجود دارند به طوری که

(i) $X = D \cup \bigcup_{i \in I} A_i$ و برای هر $i \in I$، $D \cap A_i = \dot{A}_i$.

(ii) برای هر $i \in I$، $A_i \setminus \dot{A}_i$ باز است و $u_i \neq v_i$.

(iii) D شامل هیچ مسیری نیست.

فضاهایی همچون واشر سرپینسکی، فرش سرپینسکی و اسفنج منجر، اشکال خود متشابه‌ای هستند که شباهت ظاهری بسیاری به فضاهای معین فوق دارند.

اکنون این سئوال مطرح می‌شود:

آیا یک تکریختی از گروه بنیادین فضاهای یک بعدی وحشی همچون واشر سرپینسکی، فرش سرپینسکی و اسفنج منجر به گروه بنیادین گوشواره هاوایی وجود دارد؟

در این پایان نامه با توجه به مقالهٔ ادا [۶] به پرسش مطرح شده، پاسخ منفی خواهیم داد.

مطالب این پایان نامه در پنج فصل گردآوری شده است.

فصل اول، فصل پیشنیازها است، همان طور که از نامش پیداست این فصل به یادآوری و مرور مطالب مورد نیاز در فصل‌های بعد خواهد پرداخت. این فصل از چهار بخش تشکیل گردیده است که در بخش اول به طور مفصل به گروه بنیادین و قضایای پیرامون آن پرداخته‌ایم. در این پایان نامه خواننده باید مهارت کافی در ترکیب کلمات را داشته باشد، بنابراین در بخش دوم حاصل ضرب آزاد گروه‌ها را یادآوری کرده‌ایم. در بخش سوم این فصل به مرور مفاهیمی همچون حد مستقیم و حد معکوس پرداخته‌ایم و برای رستهٔ فضاهای توپولوژیک حد مستقیم و حد معکوس را معین کرده‌ایم. دراین پایان نامه با فضاهای یک بُعدی سرو کار داریم بنابراین در بخش چهارم، بخش پایانی این فصل به بُعد توپولوژیک پرداخته‌ایم و به بُعد برخی از فضاها مورد نیاز در فصول آینده را نیز پرداخته‌ایم.

در فصل دوم مطالبی از دو مقالهٔ ادا [۴] و [۳] بیان می‌شود. این فصل مشتمل بر سه بخش است، بخش اول کلمات نامتناهی و σ- حاصل ضرب آزاد گروه‌ها، بخش دوم گروه‌های n- ترکه‌ای و بخش سوم همریختی استاندارد. در واقع این فصل به تفصیل به σ- حاصل ضرب آزاد گروه‌ها و همریختی‌های بین این گروه‌ها و قضایای آن می‌پردازد. این فصل کمک شایانی به فصل چهارم، فصل اصلی این پایان نامه خواهد داشت.

فصل سوم با عنوان فضاهای توپولوژیک خاص، به بررسی برخی از فضاهای توپولوژیکی می‌پردازد. در بخش اول الحاق فضاهای توپولوژیک و گروه بنیادین الحاق فضاهای توپولوژیکی را مطالعه می‌کنیم و در بخش دوم همانند بخش اول الحاق ضعیف فضاهای توپولوژیک و گروه بنیادین آن را بررسی می‌کنیم. در بخش سوم با توجه به دو بخش قبل به مطالعهٔ گوشواره هاوایی و گروه بنیادین آن می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که گوشواره هاوایی الحاق ضعیف دایره‌ها می‌باشد. در بخش انتهایی این فصل، دیگر فضاهای مورد نیاز در فصل چهارم یعنی فضاهای وحشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بخش فرکتال‌های معروفی همچون واشر سرپینسکی، فرش سرپینسکی و اسفنج منجر را به تفصیل معرفی می‌کنیم.

فصل چهارم در واقع فصل اصلی این پایان نامه به شمار می‌رود. در بخش اول آن قضیه‌ای کلی را بیان و اثبات می‌کنیم و در بخش دوم با توجه به قضیهٔ مطرح شده در بخش اول به پرسش مطرح شده در ابتدای مقدمه پاسخ منفی می‌دهیم.

فصل اول:

پیشنیازها

مقدمه

در این فصل تلاش می‌کنیم تا مطالبی را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است (پیشنیازها) تا حد امکان مورد بررسی قرار دهیم. این فصل مشتمل بر چهار بخش است، بخش ۱-۱ به یادآوری گروه‌های بنیادین و قضایای آن می‌پردازد و بخش ۱-۲ مروری بر حاصل ضرب آزاد و خواص آن دارد. در بخش ۱-۳ به حد مستقیم و حد معکوس پرداخته‌ایم و در آخر، در بخش ۱-٤ بعد توپولوژیک فضاهای مورد نیاز در فصل‌های آینده را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

امیدواریم که این فصل تا حد امکان، آمادگی لازم برای ورود به مباحث فصل‌های آینده را فراهم نماید.

۱-۱ گروه‌های بنیادین

در واقع توپولوژی جبری پلی ارتباطی بین توپولوژی و جبر است و آن را مخلوطی از جبر و توپولوژی باید دانست. ایدهٔ اصلی برای خلق آن، تبدیل مسائل فضاهای توپولوژیک و توابع پیوسته به مسائل جبری آسان با ابزارهای جبری (مانند گروه‌ها و حلقه‌ها و فضاهای برداری) و همریختی‌های آنان است. به عبارت دیگر ترفند اصلی توپولوژی جبری یافتن روش‌هایی برای تبدیل معماهای توپولوژی به مسائل جبری و بررسی آنان در دنیای جبر است. این تبدیل هنگامی موفق است که مسئلهٔ جبری از مسئلهٔ توپولوژیکی آسانتر باشد، هرچند این ارتباط وظیفهٔ اصلی توپولوژی جبری است و ابزارهای زیادی در این رابطه وجود دارند، از جمله گروه‌های همولوژی ، گروه‌های هموتوپی مراتب بالاتر و ... . اما گروه‌های بنیادین اولین وپرکاربردترین آنهاست که نتایج جالبی را به همراه داشته است که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به رده‌بندی کلیهٔ سطوح فشرده اشاره کرد.

گروه‌های بنیادین به تنهایی شاخهٔ وسیعی از توپولوژی جبری را تشکیل می‌دهند. مفهوم گروه بنیادین اولین بار توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی *هانری پوانکاره*[۱] در سال ۱۸۹۵ مطرح شد، این که او گروه‌های بنیادین را کشف یا ابداع کرد، به دیدگاه ما بستگی دارد، اما آنچه مهم است ظهور این پدیده به عنوان یک نقطهٔ شروع در توپولوژی جبری می‌باشد.

تعریف پوانکاره از گروه بنیادین، دقیق اما مبتنی بر شهود بود. پوانکاره با طرح این مفهوم، شالودهٔ عظیم توپولوژی هموتوپیک را پایه‌ریزی کرد و پیشرفت‌های بعدی این نظریه با نام دانشمندانی چون *براور*[۲] و سپس *هاپف*[۳] ، *هرویچ*[۴] و فهرست طویلی از ریاضیدانان دیگر همراه است.

خاطر نشان می‌کنیم که گروه‌های هموتوپی، گروه‌هایی که مفهوم گروه بنیادین را به ابعاد دلخواه تعمیم می‌دهند، نخست در سال ۱۹۳۲ توسط توپولوژیدان معروف، *ای.چخ(ای.چک)*[۵] ارائه گردید، هرچند او این موضوع را مورد بررسی بیشتر قرار نداد و این افتخار به هرویچ تعلق گرفت.

---
[۱] H.Poincare
[۲] Brouwer
[۳] Hopf
[۴] Hurewicz
[۵] E. Céch

هرویچ بسیاری از کاربردهای گروه‌های بنیادین و نیز شکل کلی‌تر آن‌ها، گروه‌های هموتوپی مرتبه n را در سال ۱۹۳۵ به دقت مورد مطالعه قرار داد. مطالعات با ارزش هرویچ باعث تثبیت و گسترش این شاخه شد.

در این بخش ابتدا به مفهومی به نام هموتوپی پرداخته و سپس گروه بنیادین را با روشی ساده و شهودی با استفاده از این مفهوم معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که ساختار گروه‌های بنیادین یک فضای توپولوژیک یک خاصیت توپولوژیکی آن فضا است، یعنی دو فضای *همسان ریخت*[۶]، دارای گروه‌های بنیادین یکریخت هستند.

به طور خلاصه گروه بنیادین *تابعگونی*[۷] از *رستهٔ*[۸] فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار به رستهٔ گروه‌ها است، که به هر فضای توپولوژیکی نقطه‌دار، گروهی به نام گروه بنیادین آن فضا نسبت می‌دهد. بنابراین با توجه به خواص تابعگون، ما می‌توانیم بجای بررسی خصوصیات فضاهای توپولوژیک و توابع پیوسته، خواص جبری و همریختی‌های القایی آن‌ها را مورد مطالعه قرار دهیم.

ما در این بخش سعی داریم تا حد امکان درک خوبی از مفهوم گروه بنیادین و کاربردهای آن را به خواننده القا کنیم.

مفاهیم و قضایای مرتبط با هموتوپی را از [۱۸] بیان می‌کنیم، علاقمندان برای مشاهده اثبات قضایا به فصل اول مرجع ذکر شده، مراجعه نمایند.

تعریف ۱-۱-۱ اگر X و Y دو فضای توپولوژیک و f_0 و f_1 دو نگاشت پیوسته از X به Y باشند، آنگاه گوییم f_0 با f_1 *هموتوپیک*[۹] است و آن را با نماد $f_0 \simeq f_1$ نشان می‌دهیم، هرگاه نگاشت پیوستهٔ $F: X \times I \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که

$$F(x,0) = f_0(x) \quad , \quad F(x,1) = f_1(x) \quad \forall x \in X$$

[۶] Homeomorphism
[۷] Functor
[۸] Category
[۹] Homotopic

نگاشت F را *هموتوپی*[۱۰](*هموتوپی آزاد*[۱۱]) می‌نامیم. برای تاکید بیشتر بر نگاشت هموتوپی مفهوم فوق را به صورت $F: f_0 \simeq f_1$ نیز نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۲ هموتوپی یک رابطهٔ هم ارزی بر روی مجموعهٔ تمام نگاشت‌های پیوسته از X به Y است.

اکنون با توجه به قضیهٔ فوق، می‌توان *رده‌های هموتوپی*[۱۲] را به صورت زیر تعریف کرد.

$$[f] = \left\{ g: X \to Y;\ \ g \text{ پیوسته است } \&\ \ g \simeq f \right\}$$

خانواده تمام رده‌های هموتوپی به شکل فوق را با نماد $[X, Y]$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۳ فرض کنیم $f_0, f_1: X \to Y$ و $g_0, g_1: Y \to Z$ نگاشت‌های پیوسته باشند. اگر $f_0 \simeq f_1$ و $g_0 \simeq g_1$ آنگاه $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. به عبارت دیگر $[g_0 \circ f_0] = [g_1 \circ f_1]$.

با توجه به قضیهٔ فوق می‌توان یک *رستهٔ خارج قسمتی*[۱۳] تعریف کرد که آن را *رستهٔ هموتوپی*[۱٤] می‌نامیم و با نماد $hTop$ نشان می‌دهیم. در واقع اشیاء این رسته، فضاهای توپولوژیک و مورفیسم‌های $X \to Y$ ، رده‌های هموتوپی $[f]$ می‌باشند، که در آن f از X به Y می‌باشد و ترکیب نیز به صورت $[g][f] = [g \circ f]$ می‌باشد.

تعریف ۱-۱-٤ نگاشت پیوسته $f: X \to Y$ را *هم ارز هموتوپی*[۱۵] گوییم، هرگاه نگاشت پیوسته $g: Y \to X$ وجود داشته باشد به طوری که $g \circ f \simeq 1_X$ و $f \circ g \simeq 1_Y$.

دو فضای X و Y را از یک *نوع هموتوپی*[۱٦] می‌گوییم هرگاه هم ارزی هموتوپی $f: X \to Y$ وجود داشته باشد.

---

[۱۰] Homotopy
[۱۱] Free homotopy
[۱۲] Homotopy classes
[۱۳] Quotient category
[۱٤] Homotopy category
[۱۵] Homotopy equivalence
[۱٦] Same homotpy type

تعریف ۱-۱-۵ نگاشت پیوسته $f: X \to Y$ را *پوچ هموتوپیک*[۱۷] می‌نامیم، هرگاه نگاشت ثابت $c: X \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که $f \simeq c$.

اکنون به یادآوری تعاریف زیر می‌پردازیم.

(i) فضای X را *همبند مسیری*[۱۸] می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه a و b از X، مسیری از a به b در X وجود داشته باشد.

(ii) *مولفه‌های مسیری* [۱۹] فضای X، زیر فضاهای همبند مسیری بیشین فضای X می‌باشند.

(iii) فضای X را *همبند مسیری موضعی*[۲۰] می‌نامیم، هرگاه برای هر نقطهٔ $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x، مجموعهٔ باز V وجود داشته باشد، به طوری که $x \in V \subset U$ و هر دو نقطه از V توسط مسیری در U به یکدیگر متصل شوند.

تعریف ۱-۱-٦ فضای X را *انقباض‌پذیر*[۲۱] گوییم، هرگاه 1_X (نگاشت همانی بر X) پوچ هموتوپیک باشد.

اکنون احکام زیر را بیان می‌کنیم.

(i) هر مجموعهٔ محدب، انقباض‌پذیر است.

(ii) فضای X انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر با فضای تک نقطه‌ای از یک نوع هموتوپی باشد.

(iii) هر فضای انقباض‌پذیر، همبند است.

(iv) انقباض‌پذیری فضا یک خاصیت توپولوژیکی است. به عبارت دیگر اگر X و Y دو فضای *همسان ریخت*[۲۲] باشند و یکی از این دو فضا انقباض‌پذیر باشد، دیگری نیز انقباض‌پذیر خواهد بود.

---
[۱۷] nullhomotopic
[۱۸] Path connected
[۱۹] Path component
[۲۰] Locally path connected
[۲۱] Contractible

(v) اگر فضای X انقباض‌پذیر باشد، آنگاه هر دو نگاشت از X به Y هموتوپیک هستند.

(vi) هر فضای انقباض‌پذیر، همبند مسیری است.

قضیه ۱-۱-۷ فضای X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر مولفه‌های مسیری زیر مجموعه‌های باز آن، باز باشند. بویژه اگر فضای X همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه مولفه‌های مسیری آن باز است.

با توجه به قضیه ۱-۱-۷ تعریف همبند مسیری موضعی را اینگونه نیز می‌توان بیان کرد.

فضای X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر برای هر نقطهٔ $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x، مجموعهٔ همبند مسیری و باز V وجود داشته باشد، به طوری که $x \in V \subset U$.

قضیه ۱-۱-۸ اگر فضای X همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه مولفه‌های هر مجموعهٔ باز آن بر مولفه‌های مسیری منطبق است. بویژه مولفه‌های فضای X با مولفه‌های مسیری فضای X یکسان است.

باتوجه به قضیه ۱-۱-۸ نتیجهٔ زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱-۱-۹ اگر فضای X همبند و همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه همبند مسیری است.

اکنون مقدمات لازم برای تعریف گروه بنیادین مهیا است، تعاریف زیر را از [۱۸] بیان می‌کنیم، برهان قضایا را می‌توان در فصل سوم مرجع ذکر شده، مشاهده نمود.

تعریف ۱-۱-۱۰ فرض کنیم $f, g: I \to X$ دومسیر باشند که $f(1) = g(0)$. ضرب دو مسیر عبارت است از مسیر $f * g: I \to X$ که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & if\ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & if\ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

[۲۲] Homeomorphic

فرض کنیم $A \subset X$ و $f, g: X \to Y$ دو نگاشت پیوسته باشند که $f|A = g|A$. نماد

$$f \simeq g \; rel \; A$$

را هنگامی بکار می‌بریم که نگاشتی پیوسته مانند $F: X \times I \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که $F: f \simeq g$ و برای هر $t \in I$ و هر $a \in A$ رابطهٔ $F(a,t) = f(a) = g(a)$ برقرار باشد. هموتوپی F را *هموتوپی نسبی*[۲۳] نسبت به A می‌نامیم.

به آسانی همانند قضیه ۱-۱-۲ می‌توان نشان داد که برای مجموعهٔ ثابت $A \subset X$، هموتوپی نسبی یک رابطهٔ هم ارزی بر روی مجموعهٔ نگاشت‌های پیوسته از X به Y است.

تعریف ۱-۱-۱۱ فرض کنیم $\dot{I} = \{0,1\}$ مرز بازه I در $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت رده هم ارزی مسیر $f: I \to X$ را نسبت $\dot{I}$، را *رده مسیری*[۲۴] f نامیده و با نماد $[f]$ نشان می‌دهیم.

قضیهٔ زیر بیان می‌کند که رده‌های مسیری، نسبت به ضرب مسیرها پایا است.

قضیه ۱-۱-۱۲ فرض کنیم f_0 و f_1 و g_0 و g_1 مسیرهایی در X باشند که $f_0 \simeq f_1 \; rel \; \dot{I}$ و $g_0 \simeq g_1 \; rel \; \dot{I}$. اگر $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0)$، آنگاه $f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1 \; rel \; \dot{I}$

اکنون با توجه به قضیهٔ ۱-۱-۱۲ می‌توان ضرب رده‌های هم ارزی مسیرها را با استفاده از ضرب نماینده‌هایشان، البته در صورت امکان، به صورت زیر تعریف کرد.

$$[f] * [g] := [f * g]$$

تعریف ۱-۱-۱۳ اگر f یک مسیر باشد، آنگاه $f(0) = x$ را ابتدای f و $f(1) = y$ را انتهای f می‌نامیم و به ترتیب با نمادهای $\alpha(f) = x$ و $\omega(f) = y$ نشان می‌دهیم و f را مسیری از x به y می‌گوییم. f را *مسیر بسته*[۲۵] یا *طوقه*[۲۶] می‌نامیم، هرگاه ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند.

[۲۳] Relative homotopy
[۲۴] Path class
[۲۵] Closed path
[۲۶] Loop

اگر $p \in X$، آنگاه تابع ثابت $i_p: I \to X$ با ضابطهٔ $i_p(t) = p$ برای هر $t \in I$، را مسیر ثابت در نقطه p می‌نامیم. اگر $f: I \to X$ یک مسیر باشد، مسیر معکوس f را با نماد $f^{-1}: I \to X$ نشان می‌دهیم و با ضابطه $f^{-1}(t) = f(1-t)$، برای هر $t \in I$ تعریف می‌کنیم. نماد f^{-1} را به اختصار با f^{-} نیز نشان می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۱٤ اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه مجموعهٔ تمام رده‌های مسیر در X تحت عمل دوتایی $[f][g] := [f * g]$ یک دستگاه جبری تشکیل می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کند.

(i) اگر $[f]$ رده مسیر باشد، آنگاه $p, q \in X$ وجود دارد به طوری که $\alpha[f] = p$ و $\omega[f] = q$ می‌باشد و همچنین

$$[i_p]\,[f] = [f] = [f][i_q].$$

(ii) هرگاه عمل دوتایی فوق قابل تعریف باشد، عملی شرکت‌پذیر است.

(iii) اگر $\alpha[f] = p$ و $\omega[f] = q$، آنگاه

$$[f][f^{-1}] = [i_p]\;\&\;[f^{-1}][f] = [i_q].$$

قضیهٔ ۱-۱-۱٤ نشان می‌دهد که عمل دوتایی ذکر شده همواره قابل تعریف نیست، برای رفع این مشکل به مسیرهای بسته محدود می‌شویم.

تعریف ۱-۱-۱۵ $x_0 \in X$ را ثابت در نظر می‌گیریم و آن را *نقطهٔ پایه*[۲۷] می‌نامیم. گروه *بنیادین*[۲۸] X را با نقطهٔ پایه x_0 را به صورت

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{[f]; f: I \xrightarrow{\text{پیوسته}} X \;\&\; \alpha[f] = x_0 = \omega[f]\right\}$$

[۲۷] Base point
[۲۸] Fundamental group

تعریف می‌کنیم که با عمل دوتایی مذکور در قضیهٔ ۱-۱-۱۴ تشکیل گروه می‌دهد، پس گروه بنیادین نامگذاری مناسب برای مجموعهٔ فوق است.

برای آشنایی بیشتر با گروه بنیادین، خواص آن را که در [۱۸] فصل سوم می‌توان یافت، به صورت احکام زیر ذکر می‌کنیم.

احکام ۱-۱-۱٦

(i) برای هر $x_0 \in X$، $\pi_1(X, x_0)$ یک گروه است.

(ii) فرض کنیم $x_0 \in X$ و X_0 مولفهٔ مسیری از X باشد که شامل x_0 است، آنگاه

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_0, x_0)$$

(iii) اگر X همبند مسیری باشد و $x_1, x_0 \in X$، آنگاه

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

در واقع اگر γ مسیری از x به y باشد، آنگاه $\varphi_\gamma: \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ با ضابطهٔ $\varphi_\gamma([f]) = [\gamma^- f \gamma]$ یکریختی است.

(iv) اگر (X, x_0) و (Y, y_0) دو فضای نقطه‌دار باشند، آنگاه

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big)$$

(v) $\pi_1: Top_* \to Groups$ یک تابعگون همورد است و همچنین اگر $h, k: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ و $h \simeq k \; rel \; \{x_0\}$ ، آنگاه $\pi_1(h) = \pi_1(k)$ ، که در آن $\pi_1(h): \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ با ضابطه زیر می‌باشد.

$$\pi_1(h)([f]) = [h \circ f]$$

(vi) در حکم (v) معمولاً $\pi_1(h)$ را با نماد h_* نشان می‌دهیم و آن را *نگاشت القایی*[۲۹] h می‌نامیم.

---

[۲۹] Induced map

(vii) حکم (v) را می‌توان اینگونه نیز تعبیر کرد که ساختار گروه‌های بنیادین، یک پایای توپولوژیکی است. به عبارت دیگر اگر دو فضای X و Y همسان ریخت باشند، آنگاه گروه‌های بنیادین نظیرشان نیز یکریخت است.

(viii) با توجه به حکم (v)، می‌توان رستهٔ خارج قسمتی را در نظر گرفت، که آن را *رستهٔ هموتوپی نقطه‌دار*[۳۰] یا به اختصار $hTop_*$ می‌نامیم، در واقع اشیاء این رستهٔ فضاهای نقطه‌دار (X,x_0) و مورفیسم‌های $(X,x_0)\to(Y,y_0)$، رده‌های هموتوپی نسبی $[f]$ می‌باشند، که در آن $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$ یک نگاشت نقطه‌دار است و ترکیب نیز به صورت $[h][f]=[h\circ f]$ می‌باشد.

(ix) با توجه به این که هر مسیر بسته $f\colon(I,\dot{I})\to(X,x_0)$ را می‌توان به شکل نگاشت نقطه‌دار $f'\colon(S^1,1)\to(X,x_0)$ تصور کرد و بالعکس، در نتیجه گروه بنیادین به صورت زیر نیز تعریف می‌شود.

$$\pi_1(X,x_0)=\left\{[f'];f'\colon(S^1,1)\xrightarrow{\text{پیوسته}}(X,x_0)\right\}$$

(x) با توجه به نکتهٔ فوق می‌توان گروه هموتوپی با مرتبه بالاتر را نیز تعریف کرد.

$$\pi_n(X,x_0)=\left\{[f'];f'\colon(S^n,1)\xrightarrow{\text{پیوسته}}(X,x_0)\right\}$$

در فصل یازدهم [۱۸] خواص بیشتری از این گروه‌ها را می‌توان دید.

(xi) اگر $\beta\colon X\to Y$ یک هم ارزی هموتوپی باشد، آنگاه برای هر $x_0\in X$ نگاشت القایی آن، $\beta_*\colon\pi_1(X,x_0)\to\pi_1\big(Y,\beta(x_0)\big)$ یکریختی است.

(xii) با توجه به نکتهٔ (x)، اگر فضاهای X و Y همبند مسیری و از یک نوع هموتوپی باشند، آنگاه برای هر $x_0\in X$ و $y_0\in Y$ یکریختی زیر برقرار است.

$$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$$

[۳۰] Pointed homotopy category

(xiii) اگر فضای X انقباض‌پذیر باشد و $x_0 \in X$ ، آنگاه $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.

(xiv) $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

(xv) به سادگی حکم (iv) را برای هر تعداد حاصلضرب متناهی از فضاهای توپولوژیک می‌توان اثبات کرد. آیا می‌توان این قضیه را به حاصلضرب هر خانواده دلخواهی از فضاهای توپولوژیک تعمیم داد؟ با توپولوژی حاصل ضربی این مطلب برای هر خانواده از فضاهای توپولوژیک می‌توان تعمیم داد.

اکنون این سئوال مطرح می‌شود که گروه بنیادین اجتماع دو فضای توپولوژیک چیست؟ با گذاشتن شرایطی بر فضاهای توپولوژیک، ون کمپن به سئوال فوق پاسخ می‌دهد.

قبل از بیان این قضیه به بیان برخی تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱-۱-۱۷ فضای X را *همبند ساده*[۳۱] گوییم هرگاه در دو ویژگی زیر صدق کند.

(i) X همبند مسیری باشد.

(ii) گروه بنیادین X ، بدیهی باشد.

و فضای X را *همبند ساده موضعی*[۳۲] می‌نامیم، اگر پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های باز همبند ساده داشته باشد.

و همچنین فضای X را در x *همبند ساده نیم موضعی*[۳۳] گوییم، هرگاه همسایگی باز U از x وجود داشته باشد به طوری که هر مسیر بستهٔ دلخواه با نقطه پایه x در U، در X پوچ هموتوپیک باشد.

برای درک عمیق‌تر مفاهیم فوق و تفاوت آن‌ها نکات زیر را بیان می‌کنیم.

[۳۱] Simply connected
[۳۲] Locally simply connected
[۳۳] Semi locally simply connected

نکات ۱-۱-۱۸

(i) با توجه به احکام ۱-۱-۱۶ فضاهای انقباض‌پذیر همبند ساده هستند. البته عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست، مثلاً می‌توان ثابت کرد که S^nها برای $n \geq ۲$ همبند ساده‌اند، در حالی که انقباض‌پذیر نیستند.

(ii) واضح است که هر فضای همبند ساده موضعی، همبند مسیری موضعی نیز می‌باشد، چون طبق تعریف هر فضای همبند ساده، همبند مسیری است.

اکنون به بیان قضیه ون کمپن می‌پردازیم این قضیه را از [۱۲] فصل چهارم قضیه۲-۱ بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۱-۱۹ فرض کنیم U و V زیر مجموعه‌های باز و همبند مسیری از فضای X باشند، به طوری که $X = U \cup V$ و $U \cap V$ ناتهی و همبند مسیری باشد. همچنین نقطهٔ پایه‌ای $x_0 \in U \cap V$ را، برای تمام گروه‌های بنیادین ذکر شده در قضیه، انتخاب می‌کنیم.

فرض کنیم H گروهی دلخواه و نیز ρ_1 و ρ_2 و ρ_3 همریختی‌هایی هستند به طوری که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi_1(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & H \\
& \pi_1(V) \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

در این صورت همریختی منحصر به فرد $\sigma: \pi_1(X) \to H$ وجود دارد به طوریکه سه نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X) \arrow[d, "\sigma"] \\
\pi_1(U) \arrow[ur, "\psi_1"] \arrow[r, "\rho_1"'] & H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \pi_1(X) \arrow[d, "\sigma"] \\
\pi_1(V) \arrow[ur, "\psi_2"] \arrow[r, "\rho_2"'] & H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \pi_1(X) \arrow[d, "\sigma"] \\
\pi_1(U \cap V) \arrow[ur, "\psi_3"] \arrow[r, "\rho_3"'] & H
\end{tikzcd}$$