دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

مدول‌های دوم روی حلقه‌های تعویض‌ناپذیر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

علی‌اصغر زارعان

استاد راهنما

دکتر عاطفه قربانی

۱۳۹۳

با سپاس از سه موجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرما بخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

فهرست مطالب

چکیده:

فرض کنیم R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. یک R−مدول راست یکانی ناصفر M دوم نامیده می‌شود هرگاه همه‌ی تصویر همریخت‌های ناصفر آن پوچساز یکسان در حلقه‌ی R داشته باشند. نشان داده می‌شود اگر R یک حلقه باشد به طوری که برای هر ایدآل P از R، حلقه‌ی R/P گلدی چپ کراندار چپ باشد، آنگاه R−مدول راست M دوم است اگر و تنها اگر $Q = \mathrm{ann}_R(M)$ یک ایدآل اول از R و M یک R/Q−مدول راست بخش‌پذیر باشد. اگر R در ACC روی ایدآل‌های دوطرفه صدق کند، آنگاه هر R−مدول ناصفر دارای تصویر همریختی است که یک مدول دوم است. هر مدول ناصفر آرتینی شامل زیرمدول دوم است و فقط تعداد متناهی زیرمدول دوم ماکسیمال دارد. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R−مدول راست ناصفر باشد که شامل زیرمدول سره‌ی N است به طوری که M/N یک مدول دوم باشد و عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد که M دارای بعد میان‌تهی n است، در این صورت عدد صحیح مثبت $k \leq n$ و ایدآل‌های اول P_i $(1 \leq i \leq k)$ موجودند به طوری که اگر L یک زیرمدول سره از M با M/L مدول دوم باشد، آنگاه $1 \leq i \leq k$ وجود دارد که M/L دارای پوچساز P_i است. هر زیرمدول دوم از یک مدول آرتینی یک مجموع متناهی از زیرمدول‌های دوم میان‌تهی است.

رده‌بندی موضوعی: ۱۶L۹۹ ؛۱۶L۶۰ ؛۱۶L۳۰ ؛۱۶N۶۰ ؛۱۶D۱۰

کلمات کلیدی: ایدآل اول الحاقی، بعد میان‌تهی، مدول دوم، حلقه‌های نیم‌موضعی.

مقدمه

مفهوم مدول‌های دوم، مفهوم جدیدی است که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. در سال ۱۹۷۳ مکدونالد [1] مفهوم یک مدول ثانویه روی حلقه‌های تعویض‌پذیر را معرفی کرد. یک R-مدول ناصفر M ثانویه نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in R$ همریختی $\mu_a : M \longrightarrow M$ با ضابطه‌ی $\mu_a(m) = ma$ پوشا باشد یا پوچ‌توان.
مدول‌های دوم و زیرمدول‌های دوم روی حلقه‌های تعویض‌پذیر، نخستین بار توسط یاسمی [2] در سال ۲۰۰۱ معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. یاسمی نشان داد مجموع مدول‌های P-دوم، یک مدول P-دوم است. همچنین حاصلضرب مدول‌های P-دوم، P-دوم است. در همان سال ابراهیمی آتانی[3] مدول‌های ثانویه‌ی تجزیه‌ناپذیر روی دامنه‌های ددکیند موضعی را دسته‌بندی کرد و ارتباطی بین مدول‌های ثانویه‌ی تجزیه‌ناپذیر و مدول‌های تزریقی محض تجزیه‌ناپذیر روی یک دامنه‌ی دلخواه را برقرار کرد. آنین[4] در سال ۲۰۰۸ نظریه‌ی مکدونالد را به مدول‌های روی حلقه‌های تعویض‌ناپذیر تعمیم داد. تعریف اول‌های الحاقی از یک R-مدول راست و همچنین اثبات برخی از خواص اساسی اول‌های الحاقی از جمله کارهای آنین در این زمینه بوده است. انصاری طرقی[5] و فرشادیفر[6] در سال ۲۰۱۱ دوگان مفاهیم "به طور قوی اول " ، " به طور ضعیف اول " ، " نیم‌اول " و " زیرمدول‌های اولیه " که در واقع این مفاهیم " به طور قوی دوم " ، " به طور ضعیف دوم " ، " نیم‌دوم " و " زیرمدول‌های ثانویه " هستند را معرفی کردند.
در سال ۲۰۱۳، سکن [7] و آلکان [8] با همکاری اسمیت [9]، در مقاله‌ای با عنوان مدول‌های دوم روی حلقه‌های تعویض‌ناپذیر این موضوع را بررسی کردند. این پایان‌نامه بر اساس این مرجع تنظیم شده است.
تمرکز ما در این پایان‌نامه روی مدول‌های دوم است. دوگان مدول‌های دوم یعنی مدول‌های اول را نیز به طور مختصر خواهیم دید. به همین دلیل تاریخچه‌ای از مدول‌های اول را بیان می‌کنیم.

---

[1] Macdonald
[2] Yassemi
[3] Ebrahimi-Atani
[4] Annin
[5] Ansari-Toroghy
[6] Farshadifar
[7] Ceken
[8] Alkan
[9] Smith

مدول‌های اول و زیرمدول‌های اول از مدول‌ها، طی ۳۰ سال گذشته مورد مطالعه قرار گرفته است. دانس[۱۰]، اسمیت[۱۱]، لو[۱۲]، مک‌کاسلند[۱۳] ، مور[۱۴] ، آلکان[۱۵] ، تایراس[۱۶] ، کرم‌زاده[۱۷]، بهبودی[۱۸] و کوهی[۱۹] از جمله افرادی هستند که روی مدول‌های اول مطالعه داشته‌اند.

قبل ازشروع بحث اصلی و بیان مطالب مربوط به آن، لازم است برخی مفاهیم و حقایق اساسی در نظریه حلقه‌ها و نظریه مدول‌ها را که به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، بیان کنیم. فصل اول را به این موضوع اختصاص می‌دهیم. هر چند این مباحث بسیار گسترده هستند، اما در این‌جا در حد ضرورت به آن‌ها می‌پردازیم.

فصل دوم و سوم، مباحث اصلی را در بر می‌گیرند. در فصل دوم، مدول‌های دوم و اول و زیرمدول‌های دوم و اول را معرفی می‌کنیم. در این فصل به بیان مثال‌هایی از مدول دوم می‌پردازیم و شرایطی را بیان می‌کنیم که حاصلضرب مستقیم مدول‌های دوم، یک مدول دوم باشد. همچنین به معرفی ایدآل اول الحاقی از یک مدول می‌پردازیم و برخی از ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم. زیرمدول دوم ماکسیمال از یک مدول و مفهوم دوگان آن یعنی زیرمدول اول مینیمال از یک مدول از مطالبی است که در این فصل بیان شده است.

در فصل سوم که فصل پایانی این پایان‌نامه است، زیرمدول هم‌مستقل، بعد میان‌تهی از یک مدول و مدول $AB5^*$ را معرفی کرده و ارتباط آن را با مدول‌های دوم بیان می‌کنیم. نشان داده می‌شود اگر M یک مدول با بعد میان‌تهی n باشد، آن‌گاه M حداکثر دارای n تا ایدآل اول الحاقی است. سرانجام نشان می‌دهیم هر متمم ناصفر در یک مدول P-دوم، P-دوم است.

در سراسر متن، حلقه‌ها یکدار و مدول‌ها یکانی هستند. مدول‌ها به عنوان مدول راست در نظر گرفته می‌شوند، مگر آن که خلاف آن ذکر شود.

[۱۰] Dauns

[۱۱] Smith

[۱۲] Lu

[۱۳] McCasland

[۱۴] Moore

[۱۵] Alkan

[۱۶] Tiras

[۱۷] Karamzadeh

[۱۸] Behboodi

[۱۹] Koohy

فصل ۱

پیش‌نیازها

این فصل به پیش‌نیازهایی از نظریه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها اختصاص دارد. در بخش نخست، مدول‌های تزریقی و بخش‌پذیر را در حد نیاز معرفی می‌کنیم. بخش دوم، بخش کوتاهی در مورد مدول‌ها و حلقه‌های نوتری و آرتینی است. بخش سوم، مربوط به حلقه‌ها و مدول‌های نیم‌ساده است. بخش چهارم شامل حلقه‌های اول، نیم‌اول و اولیه‌ی راست خواهد بود. در بخش پنجم، به بیان زیرمدول‌های اساسی و مکمل می‌پردازیم. بخش ششم، اختصاص به حلقه‌ی گلدی راست دارد. در دو بخش پایانی، به بررسی حلقه‌ی کامل راست و مدول‌های تخت می‌پردازیم.

۱.۱ مدول‌های تزریقی و بخش‌پذیر

مدول‌های تزریقی و بخش‌پذیر مفهومی آشنا و بسیار مهمی در نظریه‌ی مدول‌هاست. در این بخش کوتاه، این نوع مدول‌ها را در حد نیاز بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۱. برای R-مدول E شرایط زیر معادلند:

(۱) E یک R-مدول تزریقی است؛

(۲) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه $0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ از R-مدول‌ها شکافته می‌شود؛

(۳) به ازای هر توسیع از E مانند E'، زیرمدولی مثل K از E' موجود است که $E' = E \oplus K$.

اثبات. قضیه‌ی ۹۰۱۱ از مرجع [۲۹]. ■

تعریف ۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. گوییم عنصر $c \in R$ منظم راست است، هرگاه برای هر عنصر ناصفر r در R داشته باشیم $cr \neq 0$. به طور مشابه می‌توان عنصر منظم چپ را تعریف کرد. گوییم عنصر c از R منظم است، هرگاه منظم راست و چپ باشد.

تعریف ۳.۱. گوییم عنصر ناصفر $a \in R$ یک مقسوم علیه راست صفر است، هرگاه یک عضو ناصفر $b \in R$ وجود داشته باشد که $ba = 0$. عنصر ناصفر $a \in R$ یک مقسوم‌علیه چپ صفر است، هرگاه یک عضو ناصفر $b \in R$ وجود داشته باشد که $ab = 0$.

تعریف ۴.۱. گوییم یک R-مدول راست X بخش‌پذیر است، هرگاه برای هر عنصر منظم c در R داشته باشیم $X = Xc = \{xc \mid x \in X\}$.

گزاره ۵.۱. هر R-مدول تزریقی یک مدول بخش‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم E یک R-مدول تزریقی باشد. همچنین فرض کنیم e عضو دلخواهی از E، و $r \in R$ مقسوم علیه چپ صفر نباشد. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم. تابع $f : rR \to E$ را به صورت $f(rs) = es$ تعریف می‌کنیم $(s \in R)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & rR \arrow[r, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

اگر $rs = rs'$، آن‌گاه $r(s - s') = 0$ و از این‌که r مقسوم علیه چپ صفر نیست، داریم: $s - s' = 0$. بنابراین

$$es = es'$$

این نشان می‌دهد f خوش‌تعریف است. به سادگی می‌توان دید f، یک R-همریختی است. چون E تزریقی است همریختی $g : R \to E$ موجود است به طوری که $g|_{rR} = f$. در نتیجه:

$$e = f(r) = g(r) = g(1)r.$$

این نشان می‌دهد E بخش‌پذیر است. ■

در ادامه مفهوم پوچساز یک مدول را بیان می‌کنیم.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد.

(۱) مجموعه‌ی

$$\{r \in R \mid Mr = (0)\}$$

یک ایدآل از حلقه‌ی R است، که آن را پوچساز M در R می‌نامیم و با نماد $\mathrm{ann}_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

(۲) اگر I یک ایدآل چپ از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی

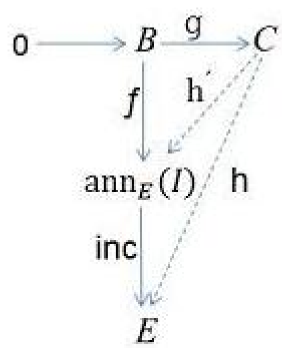
$$\{m \in M \mid mI = (0)\}$$

یک زیرمدول از M است که آن را پوچساز I در M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{ann}_M(I)$ نمایش می‌دهیم.

(۳) فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. گوییم M وفادار است، هرگاه $\mathrm{ann}_R(M) = (0)$.

گزاره ۷.۱. فرض کنیم I یک ایدآل دوطرفه از حلقه‌ی R و E یک R-مدول راست تزریقی باشد. در این صورت $\mathrm{ann}_E(I)$ به عنوان R/I-مدول تزریقی است.

اثبات. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم که B و C، R/I-مدول، f و g، R/I-همریختی مدولی و g تکریختی است. B،



C و $\mathrm{ann}_E(I)$ را می‌توان به عنوان R-مدول در نظر گرفت، وقتی f و g، R-همریختی هستند. چون E تزریقی است نمودار بالا توسط R-همریختی h کامل می‌شود. فرض کنیم $r \in I$ و $c \in C$. در این صورت $h(c)r = h(cr) = 0$ ودر نتیجه:

$$h(C) \subseteq \mathrm{ann}_E(I).$$

در نتیجه ما می‌توانیم R-همریختی h' را همان‌گونه که در نمودار نشان داده شده است قرار دهیم. بنابراین نمودار جابه‌جایی است. به علاوه h' یک R/I-همریختی است. این نشان می‌دهد $\mathrm{ann}_E(I)$ به عنوان R/I-مدول تزریقی است. ■

۲.۱ مدول‌ها و حلقه‌های نوتری و آرتینی

در این بخش مطالب کوتاهی در مورد این مدول‌ها آورده‌ایم که بعداً مورد استفاده قرار می‌گیرد. با وجود گستردگی مطلب در مورد مدول‌های نوتری (آرتینی)، در اینجا به طور مختصر به این موضوع می‌پردازیم.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم $\{C_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد. گوییم خانواده‌ی $\{C_i\}_{i\in I}$ در شرط زنجیر صعودی (ACC) صدق می‌کند، هرگاه شامل هیچ زنجیر اکیداً صعودی نامتناهی نباشد. به طور معادل، هر زیرخانواده‌ی ناتهی از آن دارای عضو ماکسیمال (نسبت به رابطه‌ی شمول) باشد.
گوییم خانواده‌ی $\{C_i\}_{i\in I}$ در شرط زنجیر نزولی (DCC) صدق می‌کند، هرگاه شامل هیچ زنجیر اکیداً نزولی نامتناهی نباشد. به طور معادل هر خانواده‌ی ناتهی از آن دارای عضو مینیمال (نسبت به رابطه‌ی شمول) باشد.

تعریف ۹.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. گوییم M یک مدول نوتری است، هرگاه خانواده‌ی تمام زیرمدول‌های M در ACC صدق کند.
گوییم R یک حلقه‌ی نوتری راست (چپ) است، هرگاه R به عنوان یک R-مدول راست (چپ) نوتری باشد.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. گوییم M یک مدول آرتینی است، هرگاه خانواده‌ی تمام زیرمدول‌های M در DCC صدق کند.
گوییم R یک حلقه‌ی آرتینی راست (چپ) است، هرگاه R به عنوان R-مدول راست (چپ) آرتینی باشد.

۳.۱ مدول‌ها و حلقه‌های نیم‌ساده

در این بخش به بررسی حلقه‌ها و مدول‌های نیم‌ساده می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول راست باشد.

(۱) گوییم M ساده است، هرگاه $M \neq (0)$ و M زیرمدولی به جز خودش و صفر نداشته باشد.

(۲) گوییم M نیم‌ساده است، هرگاه هر زیرمدول از M، یک جمعوند مستقیمی از آن باشد.

(۳) گوییم M نیم‌ساده‌ی همگن است، هرگاه M جمع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده‌ی دو به دو یکریختش باشد.

قضیه ۱۲.۱. برای حلقه‌ی R شرایط زیر معادل است:

(۱) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از R-مدول‌ها شکافته می‌شود؛

(۲) همه‌ی R-مدول‌های راست نیم‌ساده هستند؛

(۳) همه‌ی R-مدول‌های راست متناهی تولید نیم‌ساده هستند؛

(۴) همه‌ی R-مدول‌های راست دوری نیم‌ساده هستند؛

(۵) R به عنوان R-مدول راست، نیم‌ساده است.

اثبات. قضیه‌ی ۲۰۵ از مرجع [۱۵]. ■

تعریف ۱۳.۱. گوییم حلقه‌ی R نیم‌ساده‌ی راست است، هرگاه R در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی ۱۲.۱ صدق کند.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. گوییم R ساده است، هرگاه تنها ایدآل (دوطرفه‌ی) سره‌ی آن ایدآل صفر باشد.

قضیه‌ی زیر که به قضیه‌ی ودربرن-آرتین [۱] معروف است، ساختار حلقه‌های نیم‌ساده را به طور کامل مشخص می‌کند.

قضیه ۱۵.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی راست باشد. در این صورت اعداد $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ و حلقه‌های تقسیم $D_1, ..., D_r$ وجود دارند به طوری که

$$R \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times ... \times \mathrm{Mat}_{n_r}(D_r)$$

به علاوه عدد r و زوج‌های (n_1, D_1) و ... و (n_r, D_r) در حد جابه‌جایی یکتا هستند و دقیقاً r تا مدول راست ساده‌ی نایکریخت روی R وجود دارد.

اثبات. قضیه‌ی ۳۰۵ از مرجع [۱۵]. ■

نتیجه ۱۶.۱. حلقه‌ی R یک حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی راست است اگر و تنها اگر نیم‌ساده‌ی چپ باشد.

اثبات. چون قضیه‌ی ۱۵.۱ برای مدول‌های چپ نیز همانند مدول‌های راست برقرار است، نتیجه واضح است. ■

با توجه به نتیجه‌ی فوق، از این پس در مورد حلقه‌ها، اشاره‌ای به نیم‌ساده‌ی چپ و راست نمی‌کنیم و به طور ساده می‌گوییم R یک حلقه‌ی نیم‌ساده است.

۴.۱ حلقه‌های اول، نیم‌اول و اولیه راست

در این بخش حلقه‌های اول، نیم‌اول و اولیه را که نقش مهمی در نظریه‌ی حلقه‌ها ایفا می‌کنند، معرفی کرده و برخی از خواص آن‌ها را که در فصل‌های آینده به آن‌ها نیازمندیم، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. گوییم ایدآل P از حلقه‌ی R اول است، هرگاه $P \neq R$، و برای ایدآل‌های A و B از R،

$$AB \subseteq P \Longrightarrow A \subseteq P \text{ یا } B \subseteq P.$$

[۱] Wedderburn-Artin theorem

تعریف ۱۸.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. گوییم ایدآل C از حلقه‌ی R نیم‌اول است، هرگاه برای هر ایدآل A از R،

$$A^{۲} \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C.$$

برای مثال یک ایدآل اول همیشه نیم‌اول است.

تعریف ۱۹.۱. گوییم حلقه‌ی R اول (نیم‌اول) است، هرگاه (۰) یک ایدآل اول (نیم‌اول) از R باشد.

از تعریف قبل بلا فاصله می‌توان نتیجه گرفت، برای هر ایدآل A، R/A حلقه‌ی اول (نیم‌اول) است اگر و تنها اگر A یک ایدآل اول (نیم‌اول) از R باشد.

قضیه ۲۰.۱. برای هر حلقه‌ی R، شرایط زیر معادل است:

(۱) حلقه‌ی R نیم‌ساده است؛

(۲) حلقه‌ی R نیم‌اول و آرتینی چپ است؛

(۳) حلقه‌ی R نیم‌اول و DCC روی ایدآل‌های اصلی چپ دارد.

اثبات. قضیه‌ی ۲۴ ۰ ۱۰ از مرجع [۱۵] ■

گزاره ۲۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی دلخواه باشد. در این صورت R یک حلقه‌ی نیم‌اول است اگر و تنها اگر ایدآل پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد.

اثبات. گزاره‌ی ۱۶ ۰ ۱۰ از مرجع [۱۵]. ■

در ادامه در حد نیاز به بررسی ایدآل اولیه‌ی راست می‌پردازیم.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. گوییم R اولیه‌ی راست (اولیه‌ی چپ) است، هرگاه R–مدول راست (چپ) ساده و وفاداری وجود داشته باشد.

تعریف ۲۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $I \trianglelefteq R$. گوییم I اولیه‌ی راست (اولیه‌ی چپ) است، هرگاه R/I حلقه‌ی اولیه‌ی راست (چپ) باشد.

قضیه ۲۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $I \trianglelefteq R$. در این صورت I اولیه‌ی راست است اگر و تنها اگر R–مدول راست ساده‌ای مانند M موجود باشد به طوری که $\mathrm{ann}_R(M) = I$.

اثبات. فرض کنیم I اولیه‌ی راست باشد. در این صورت R/I اولیه‌ی راست است. پس R/I–مدول راست ساده و وفاداری مانند M موجود است. چون M یک R/I–مدول است، M یک R–مدول است و $MI = (۰)$. به سادگی می‌توان نشان داد M یک R–مدول ساده است و $\mathrm{ann}_R(M) = I$.

برعکس فرض کنیم R–مدول راست ساده‌ای مانند M موجود باشد که $\mathrm{ann}_R(M) = I$. در نتیجه $MI = (۰)$،

و بنابراین M، یک R/I-مدول است. به سادگی می‌توان بررسی کرد M به عنوان R/I-مدول ساده است، و $\mathrm{ann}_{R/I}(M) = (\circ)$. این نشان می‌دهد R/I حلقه‌ی اولیه‌ی راست و I یک ایدآل اولیه‌ی راست است. ■

گزاره ۲۵.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرتینی راست باشد. شرایط زیر معادلند:

(۱) حلقه‌ی R ساده است؛

(۲) حلقه‌ی R یک حلقه‌ی اولیه‌ی راست است؛

(۳) حلقه‌ی R اول است.

اثبات. (۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم R یک حلقه‌ی ساده باشد. چون R یک حلقه است پس ایدآل راست ماکسیمال دارد. در نتیجه مدول راست ساده‌ای مانند M_R موجود است. از طرفی $\mathrm{ann}_R(M)$ یک ایدآل دوطرفه در R است. چون R ساده است

$$\mathrm{ann}_R(M) = R \text{ یا } \mathrm{ann}_R(M) = (\circ)$$

از آن‌جایی که M یک R-مدول ساده است پس

$$\mathrm{ann}_R(M) \neq R$$

در نتیجه $\mathrm{ann}_R(M) = (\circ)$. این نشان می‌دهد R یک حلقه‌ی اولیه‌ی راست است.
(۳) $\Leftarrow$ (۲): فرض کنیم R یک حلقه‌ی اولیه‌ی راست باشد. در این صورت R-مدول راست ساده و وفاداری مانند M موجود است. فرض کنیم A یک ایدآل ناصفر R باشد. با توجه به ویژگی وفادار بودن M، داریم $MA \neq (\circ)$. حال چون M ساده است و $MA \leq M$ ،

$$M = MA$$

به طور مشابه اگر B یک ایدآل ناصفر R باشد، آن‌گاه

$$M = MB$$

در نتیجه

$$M(AB) = (MA)B = MB \neq (\circ) \Longrightarrow AB \neq (\circ)$$

این نشان می‌دهد R یک حلقه‌ی اول است.
(۱) $\Leftarrow$ (۳): فرض کنیم R یک حلقه‌ی اول و آرتینی راست باشد. در نتیجه طبق ۲۰.۱، حلقه‌ی R نیم‌ساده است. از طرفی R اول است، پس بیش از یک مولفه‌ی ساده ندارد. این نشان می‌دهد R حلقه‌ی ساده است. ■

در پایان این بخش مفهوم حلقه‌های نیم‌موضعی را در حد نیاز بیان می‌کنیم. پیش از آن لازم است رادیکال جیکوبسن یک حلقه را تعریف کنیم.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت اشتراک تمام ایدآل‌های راست ماکسیمال R را رادیکال جیکوبسن R گوییم و آن را با نماد $\mathrm{J}(R)$ نمایش می‌دهیم.
نشان داده می‌شود که $\mathrm{J}(R)$، اشتراک تمام ایدآل‌های چپ ماکسیمال می‌باشد.

قضیه ۲۷.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت رادیکال جیکوبسن R مساوی اشتراک پوچسازهای M است که M به عنوان R-مدول راست ساده است.

اثبات. نتیجه‌ی ۲۰۴ از مرجع [۱۵]. ■

با توجه به قضیه‌ی قبل، $\mathrm{J}(R)$ یک ایدآل دوطرفه از حلقه‌ی R است.

تعریف ۲۸.۱. گوییم حلقه‌ی R نیم‌موضعی است، هرگاه $R/\mathrm{J}(R)$ آرتینی باشد.
گوییم حلقه‌ی R موضعی است، هرگاه R تنها یک ایدآل (راست) ماکسیمال داشته باشد.

گزاره ۲۹.۱. اگر R حلقه‌ی نیم‌موضعی باشد، آن‌گاه R فقط تعداد متناهی ایدآل اولیه‌ی راست دارد.

اثبات. فرض کنیم R حلقه‌ی نیم‌موضعی باشد. در این صورت $R/\mathrm{J}(R)$ آرتینی است و بنابراین $R/\mathrm{J}(R)$ نیم‌ساده است. بنابر قضیه‌ی ودربرن-آرتین هر حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی آرتینی، تعداد ساده‌هایش تحت یکریختی متناهی است. اکنون هر ساده‌ای که روی R در نظر بگیریم چون جیکوبسن هر ساده را صفر می‌کند، به عنوان $R/\mathrm{J}(R)$-مدول ساده می‌شود. از طرفی تعداد ساده‌ها روی $R/\mathrm{J}(R)$ تحت یکریختی متناهی است. پس ساده‌های روی R نیز تحت یکریختی متناهی است. هر ایدآل اولیه‌ی راست از R، پوچساز یک R-مدول ساده است. چون ساده‌های روی R تحت یکریختی متناهی است و پوچساز R-مدول‌های یکریخت باهم برابر است، پس تعداد ایدآل‌های اولیه‌ی راست R متناهی است. ■

۵.۱ زیرمدول‌های اساسی و مکمل

در میان زیرمدول‌های یک مدول، بعضی از آن‌ها ویژگی‌های خاصی دارند که موجب اهمیت بیشتر آن‌ها نسبت به زیرمدول‌های دیگر می‌شود. در این بخش به بررسی چند دسته‌ی مهم از آن‌ها خواهیم پرداخت.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد و $N \leq M$. گوییم N یک زیرمدول اساسی از M است و آن را با نماد $N \leq_e M$ نشان می‌دهیم، هرگاه برای همه‌ی زیرمدول‌های ناصفر X از M داشته باشیم $N \cap X \neq (0)$.
اگر $N \leq_e M$، همچنین گوییم M یک توسیع اساسی از N است.
اگر یک ایدآل راست I از حلقه‌ی R، با تمام ایدآل‌های راست ناصفر R اشتراک ناتهی داشته باشد، آن‌گاه $I \trianglelefteq_e R_R$.

لم ۳۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی اول و I یک ایدآل ناصفر از R باشد. در این صورت $I \trianglelefteq_e R_R$.

اثبات. فرض کنیم A یک ایدآل راست دلخواه و ناصفر از R باشد. چون R حلقه‌ی اول است،

$$(0) \neq AI \subseteq A \cap I.$$

این نشان می‌دهد I یک ایدآل راست اساسی از R است. ■

لم ۳۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد و $N \leq_e M$. همچنین فرض کنیم $m \in M$ و $m^{-1}N = \{r \in R | mr \in N\}$. در این صورت $m^{-1}N \trianglelefteq_e R_R$.

اثبات. لم ۲۰۲۰۲ از مرجع [۲۲]. ■

تعریف ۳۳.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد و $N \leq M$. گوییم زیرمدول $L \leq M$ یک متمم برای N در M است، هرگاه $M = N + L$ و L نسبت به این خاصیت مینیمال باشد.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. گوییم زیرمدول $H \leq M$ یک متمم در M است، هرگاه زیرمدول G از M وجود داشته باشد به طوری که H یک متمم برای G در M باشد.

به عنوان دوگان زیرمدول‌های متمم، زیرمدول‌های مکمل را داریم.

تعریف ۳۵.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد و $L \leq M$. گوییم زیرمدول $C \leq M$ یک مکمل برای L در M است، هرگاه $C \cap L = (0)$ و C نسبت به این خاصیت ماکسیمال باشد.

با توجه به لم زرن [۲]، هر زیرمدول از M، دارای یک مکمل در M است. در واقع هر زیرمدول C_0 از M را که $C_0 \cap L = (0)$، می‌توان به یک مکمل برای L در M توسعه داد.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. گوییم زیرمدول $C \leq M$ یک مکمل در M است، هرگاه زیرمدول $N \leq M$ وجود داشته باشد به طوری که C یک مکمل برای N در M باشد.

تعریف ۳۷.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. گوییم زیرمدول $C \leq M$ به طور اساسی در M بسته است، هر گاه C، توسیع اساسی سره در M نداشته باشد. در این صورت به اختصار می‌گوییم C یک زیرمدول بسته از M است.

گزاره ۳۸.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد و $C \leq M$. در این صورت زیرمدول C مکمل در M است اگر و تنها اگر C (به طور اساسی) در M بسته باشد.

اثبات. گزاره‌ی ۶۰۳۲ از مرجع [۱۶]. ■

[۲] Zorn lemma

۶.۱ حلقه‌ی گلدی راست

در این بخش مدول یکنواخت، حلقه‌ی گلدی و حلقه‌ی کسرهای راست یک حلقه را معرفی کرده و برخی قضایایی که در فصل‌های آینده نیازمندیم بیان می‌کنیم.

تعریف ۳۹.۱. فرض کنیم U یک R-مدول راست باشد. گوییم U یکنواخت است، هرگاه $U \neq (0)$ و هر زیرمدول ناصفر از U، یک زیرمدول اساسی باشد.

تعریف ۴۰.۱. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. گوییم M دارای بعد یکنواخت متناهی است، هرگاه M شامل مجموع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های ناصفر نباشد.

توجه کنید اگر M دارای بعد یکنواخت متناهی باشد و $N \leq M$ آن‌گاه N، بعد یکنواخت متناهی دارد.

لم ۴۱.۱. اگر M دارای بعد یکنواخت متناهی باشد و $M \neq (0)$، آن‌گاه M شامل یک زیرمدول یکنواخت است.

اثبات. لم ۲۰۷ از مرجع [۲۲]. ■

تعریف ۴۲.۱. گوییم حلقه‌ی R حلقه‌ی گلدی راست است، هرگاه R دارای بعد یکنواخت راست متناهی باشد و R در ACC روی پوچسازهای راستش صدق کند. به طور مشابه حلقه‌ی گلدی چپ تعریف می‌شود. اگر R حلقه‌ی گلدی چپ و راست باشد، آن‌گاه R را یک حلقه‌ی گلدی می‌نامیم.

تعریف ۴۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی گلدی راست نیم‌اول باشد. گوییم R-مدول راست M فارغ از تاب است، هرگاه برای هر عنصر ناصفر $m \in M$ و هر عنصر منظم $c \in R$ داشته باشیم $mc \neq 0$.

تعریف ۴۴.۱. فرض کنیم R و S حلقه باشند. گوییم S یک حلقه‌ی کسرهای راست از R است، هرگاه:

(۱) $R \subseteq S$.

(۲) هر عنصر منظم از R دارای وارون دوطرفه در S باشد.

(۳) برای هر عنصر s از S، عنصر $r \in R$ و عنصر منظم $d \in R$ موجود باشد به طوری که $s = rd^{-1}$.

قضیه ۴۵.۱. حلقه‌ی R، دارای یک حلقه‌ی کسرهای راست نیم ساده است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی گلدی راست نیم‌اول باشد.

اثبات. قضیه‌ی ۱۰ ۵ از مرجع [۱۴]. ■

قضیه ۴۶.۱. فرض کنیم R دارای حلقه‌ی کسرهای راست S باشد. شرایط زیر معادلند:

(۱) هر R-مدول راست بخش پذیر و فارغ از تاب، تزریقی است؛

(۲) S نیم‌ساده است.

اثبات. قضیه‌ی ۳۰۳ از مرجع [۱۷]. ■

لم ۴۷.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$\{x \in R \mid xE = (\circ),\ \text{برای یک ایدآل راست اساسی } E \text{ در } R\}$$

که آن را با $\mathrm{Z}(R)$ یا $\mathrm{Z}(R_R)$ نشان می‌دهیم، یک ایدآل از R است.

اثبات. چون R به عنوان یک ایدآل راست اساسی از خودش است، پس $\circ \in \mathrm{Z}(R)$ و در نتیجه $\mathrm{Z}(R) \neq \varnothing$. فرض کنیم $x, y \in \mathrm{Z}(R)$. در این صورت ایدآل‌های راست اساسی I و J از R موجودند به طوری که

$$xI = yJ = (\circ)$$

از طرفی $I \cap J$ یک ایدآل راست اساسی از R است، و

$$(x \pm y)(I \cap J) = (\circ)$$

در نتیجه

$$x \pm y \in \mathrm{Z}(R)$$

برای هر $t \in R$، بنابر لم ۳۲.۱، ایدآل راست

$$K = \{r \in R \mid tr \in I\}$$

اساسی است، و $xtK \leq xI$. بنابراین $xt \in \mathrm{Z}(R)$. همچنین بوضوح $tx \in \mathrm{Z}(R)$. این نشان می‌دهد $\mathrm{Z}(R)$ یک ایدآل است. ■

تعریف ۴۸.۱. ایدآل $\mathrm{Z}(R)$ در لم قبل، ایدآل منفرد راست از R نامیده می‌شود.

لم ۴۹.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد به طوری که در ACC روی پوچسازهای راستش صدق می‌کند. در این صورت ایدآل منفرد راست R، یعنی $\mathrm{Z}(R)$ پوچ‌توان است. به‌علاوه اگر R نیم‌اول باشد، آن‌گاه $\mathrm{Z}(R) = (\circ)$.

اثبات. قرار می‌دهیم $A = \mathrm{Z}(R)$. با در نظر گرفتن زنجیر $\mathrm{r.ann}_R(A) \subseteq \mathrm{r.ann}_R(A^۲) \subseteq \mathrm{r.ann}_R(A^۳) \subseteq \ldots$ وجود دارد $n > \circ$ به طوری که

$$\mathrm{r.ann}_R(A^n) = \mathrm{r.ann}_R(A^{n+۱})$$

فرض کنیم $A^{n+۱} \neq (\circ)$. مجموعه‌ی

$$C = \{\mathrm{r.ann}_R(a) \mid A^n a \neq (\circ)\}$$

را در نظر می‌گیریم. چون $A^{n+1} \neq (0)$ بنابراین $C \neq \varnothing$. از طرفی R حلقه‌ای است که در ACC روی پوچسازهای راستش صدق می‌کند. پس C عضو ماکسیمال دارد. یعنی a موجود است که $\mathrm{r.ann}_R(a)$ عضو ماکسیمال C است. اگر $b \in A$، آن‌گاه

$$\mathrm{r.ann}_R(b) \trianglelefteq_e R$$

بنابراین

$$aR \cap \mathrm{r.ann}_R(b) \neq (0)$$

از این رو $r \in R$ و $x \in aR$ موجودند به طوری که $x = ar$ و $ar \neq 0$. ولی چون $x \in \mathrm{r.ann}_R(b)$، لذا $bar = 0$. این نتیجه می‌دهد:

$$\mathrm{r.ann}_R(a) \subsetneqq \mathrm{r.ann}_R(ba)$$

این یک تناقض با انتخاب a است، مگر این‌که $A^n ba = (0)$. این نشان می‌دهد $A^{n+1}a = (0)$، و بنابراین طبق انتخاب n، $A^n a = (0)$. از این رو $A^{n+1} = (0)$.
برای اثبات قسمت دوم، از این که R یک حلقه‌ی نیم‌اول است گزاره‌ی ۲۱.۱ ایجاب می‌کند، R ایدآل پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد. از طرفی طبق قسمت قبل $\mathrm{Z}(R)$ یک ایدآل پوچ‌توان R است. بنابراین $\mathrm{Z}(R) = (0)$. ■

گزاره ۵۰.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول از بعد یکنواخت راست متناهی باشد و $\mathrm{Z}(R) = (0)$. همچنین فرض کنیم c یک عنصر منظم راست باشد. در این صورت c منظم است و $cR \trianglelefteq_e R$.

اثبات. گزاره‌ی ۴ . ۳ . ۲ از مرجع [۲۲]. ■

گزاره ۵۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم‌اول از بعد یکنواخت راست متناهی باشد و $\mathrm{Z}(R) = (0)$. همچنین فرض کنیم E یک ایدآل راست از R باشد. احکام زیر برقرار است:

(۱) E شامل یک عنصر c است به طوری که $\mathrm{r.ann}_R(c) \cap E = (0)$؛

(۲) E اساسی است اگر و تنها اگر E شامل یک عنصر منظم از R باشد.

اثبات. (۱): ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که E یکنواخت باشد. چون $E^2 \neq (0)$، عناصر $c, d \in E$ وجود دارند به طوری که $cd \neq 0$. قرار می‌دهیم

$$V = \mathrm{r.ann}_R(c) \cap E$$

و فرض می‌کنیم $V \neq (0)$. چون E یکنواخت است، $V \trianglelefteq_e E$ و بنابراین طبق لم ۳۲.۱،

$$d^{-1}V = \{r \in R \mid dr \in V\} \trianglelefteq_e R.$$