دانشگاه الزهراء(س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان

بعدهای همولوژیک گرنشتاین

استاد راهنما
دکتر کامران دیوانی آذر

استاد مشاور
دکتر ناهید هادیان دهکردی

دانشجو
شیرین ملکی

دی ماه سال ۱۳۸۸

چکیده

یک R ـ مدول M پروژکتیو گرنشتاین نامیده می‌شود اگر یک تحلیل پروژکتیو کامل $\mathcal{P} = \ldots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \ldots$ وجود داشته باشد به طوری که $M \cong Im\ (P_0 \to P^0)$.

مدول‌های انژکتیو گرنشتاین و یکدست گرنشتاین نیز به صورت بالا قابل تعریف است.

در این پایان‌نامه نتایجی را که در رابطه با مدول‌های پروژکتیو گرنشتاین و بعد پروژکتیو گرنشتاین بدست می‌آید، بررسی می‌کنیم. هم‌چنین به اثبات قضایای زیر می‌پردازیم:

(۱) فرض کنید $\mathcal{X}$ یک کلاس از R ـ مدول‌ها است که یا حلال پروژکتیوی یا حلال انژکتیوی باشد. اگر $\mathcal{X}$ تحت جمع‌های مستقیم شمارا یا تحت ضرب‌های مستقیم شمارا بسته باشد، آن‌گاه $\mathcal{X}$ تحت جمعوندهای مستقیم بسته است.

(۲) یک R ـ مدول M پروژکتیو گرنشتاین است اگر و فقط اگر M متعلق به کلاس متعامد چپ $^{\perp}P(R)$ باشد و یک $P(R)$ ـ تحلیل راست هم‌سره داشته باشد.

(۳) کلاس $GP(R)$ (همه R ـ مدول‌های پروژکتیو گرنشتاین) حلال پروژکتیوی است. به علاوه $GP(R)$ تحت جمع‌های مستقیم دلخواه و تحت جمعوندهای مستقیم بسته است.

(۴) فرض کنید M یک R ـ مدول با بعد پروژکتیو گرنشتاین متناهی n باشد. آن‌گاه M یک پیش‌پوش پروژکتیو گرنشتاین پوشا $\varphi : G \twoheadrightarrow M$ می‌پذیرد که

$pd_R(Ker\varphi) = n - 1$.

قضایای ذکر شده در بالا برای مدول‌های انژکتیو گرنشتاین نیز برقرار است.

(۵) اگر R نوتری باشد، آن‌گاه کلاس $GF(R)$ (همه R ـ مدول‌های یکدست گرنشتاین) حلال پروژکتیوی است. به علاوه کلاس $GF(R)$ تحت جمع‌های مستقیم دلخواه و تحت جمعوندهای مستقیم بسته است.

(٦) فرض کنید R نوتری باشد. اگر T یک R ـ مدول یکدست گرنشتاین باشد، آن‌گاه $Ext_R^i(T, K) = 0$ برای همه $i > 0$ و همه R ـ مدول‌های هم‌تاب K با بعد یکدست متناهی .

کلمات کلیدی: مدول پروژکتیو گرنشتاین، مدول انژکتیو گرنشتاین، مدول یکدست گرنشتاین، کلاس عمود، حلال پروژکتیوی، حلال انژکتیوی، پیش‌پوش، پیش‌پوشش، هم‌سره، سره، هم‌تاب.

مقدمه

در سراسر این مقاله R یک حلقه شرکت پذیر غیر بدیهی جابجایی است. همه مدول‌ها، R ـ مدول چپ هستند. وقتی R نوتری باشد، اسلاندر [۱] و بریجیر [۲] در [۱]، $G-dim_RM$ را برای هر R ـ مدول با تولید متناهی M معرفی کردند. آن‌ها نامساوی $G-dim_RM \leq pd_RM$ را اثبات کردند و ثابت کردند که تساوی $G-dim_RM = pd_RM$ برقرار است هرگاه pd_RM متناهی باشد. به علاوه آن‌ها مشابه فرمول اسلاندر—باکسبام [۳] را برای $G-dimension$ اثبات کردند. روی یک حلقه کلی R، ایناکس [۴] و جندا [۵] بعد پروژکتیو گرنشتاین، $Gpd_R(-)$، را برای مدول‌های دلخواه در [۳] تعریف کردند. در قضیه ۴.۲.۶ [۲] ثابت شده است که یک مدول با تولید متناهی روی یک حلقه نوتری، پروژکتیو گرنشتاین است اگر و فقط اگر $G-dim_RM = ۰$.

در فصل ۲ ابتدا کلاس‌های حلال و کلاس‌های عمود را معرفی می‌کنیم: کلاس همه مدول‌های پروژکتیو گرنشتاین حلال است به این معنی که اگر $۰ \to M' \to M \to M'' \to ۰$ یک رشته دقیق کوتاه از R ـ مدول‌ها باشد که M'' پروژکتیو گرنشتاین است، آن‌گاه M' پروژکتیو گرنشتاین است اگر و تنها اگر M

۱ Auslander

۲ Bridger

۳ Buchsbaum

۴ Enochs

۵ Jenda

پروژکتیو گرنشتاین باشد.
برای هر کلاس $\mathcal{X}$ از R ـ مدول ها، M متعلق به کلاس عمود چپ (${}^{\perp}\mathcal{X}$) است، اگر $Ext^i_R(M,X)=0$ برای همه $i>0$ و همه $X\in\mathcal{X}$. هم چنین N متعلق به کلاس عمود راست ($\mathcal{X}^{\perp}$) است، اگر $Ext^i_R(X,N)=0$ برای همه $i>0$ و همه $X\in\mathcal{X}$.
در ادامه برای دو نوع $\mathcal{X}$ ـ تحلیل چپ و راست، به معرفی $\mathcal{X}$ ـ تحلیل چپ سره و $\mathcal{X}$ ـ تحلیل راست هم‌سره می‌پردازیم.
در فصل ۳ با بعد پروژکتیو گرنشتاین، $Gpd_R(-)$، سروکار داریم و هم‌چنین پیش‌پوش پروژکتیو گرنشتاین را تعریف می‌کنیم به این صورت که: یک پیش‌پوش پروژکتیو گرنشتاین از یک مدول M یک همومورفیسم از مدول‌ها، $G\to M$، است که G پروژکتیو گرنشتاین و رشته

$$Hom_R(Q,G)\to Hom_R(Q,M)\to 0$$

برای هر مدول پروژکتیو گرنشتاین Q دقیق است. هم‌چنین نشان می‌دهیم که هر مدول M با بعد پروژکتیو گرنشتاین متناهی یک پیش‌پوش پروژکتیو گرنشتاین می‌پذیرد.
تعریف می‌کنیم:

$$FGPD(R)=\sup\{Gpd_RM \mid M \text{ یک } R- \text{ مدول با بعد پروژکتیو گرنشتاین متناهی است}\}$$

و نشان می‌دهیم که یک تساوی بین بعد پروژکتیو محدود شده معمولی، $FPD(R)$، و بعد پروژکتیو گرنشتاین محدود شده، $FGPD(R)$، از حلقه R وجود دارد. در بالا فقط به بعد پروژکتیو گرنشتاین برای یک R ـ مدول M اشاره کردیم. دوگان آن‌ها یعنی بعد انژکتیو گرنشتاین، Gid_RM، نیز تعریف می‌شود.
در فصل ۴ به بررسی مدول‌های یکدست گرنشتاین و بعد یکدست گرنشتاین، $Gfd_R(-)$، همانند آن‌چه که برای مدول‌های پروژکتیو گرنشتاین و بعد پروژکتیو گرنشتاین در فصل ۳ بیان کردیم، می‌پردازیم.

یک ارتباط بین مدول‌های یکدست گرنشتاین و انژکتیو گرنشتاین (برای حلقه نوتری R، یک R ـ مدول M یکدست گرنشتاین است اگر و فقط اگر $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ یک R ـ مدول انژکتیو گرنشتاین باشد.) ما را قادر می‌سازد که ثابت کنیم کلاس مدول‌های یکدست گرنشتاین حلال پروژکتیوی است.
هم چنین برای یک R ـ مدول M، بعد یکدست محدود شده بزرگ، Rfd_RM، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Rfd_RM = \sup\{i \geq 0 \mid \text{یک } R - \text{ مدول } L \text{ با بعد یکدست متناهی موجود است که } Tor_i^R(L, M) \neq 0\}$$

فاکسبی [6] ثابت کرد که اگر Gfd_RM متناهی باشد، آن‌گاه $Rfd_RM = Gfd_RM$.
کریس تنسن [7] در قضیه ۵.۴.۸ [۲]، آن را برای حلقه‌های کوهن — مکالی، نوتری و موضعی ثابت کرد. حال تعمیم زیر را داریم:
برای هر R ـ مدول M نامساوی زیر وجود دارد:

$$Rfd_RM \leq Gfd_RM \leq fd_RM$$

حال فرض کنیم که R نوتری باشد. اگر Gfd_RM متناهی باشد، آن‌گاه

$$Rfd_RM = Gfd_RM$$

اگر fd_RM متناهی باشد، آن‌گاه $Rfd_RM = Gfd_RM = fd_RM$.
در ادامه ثابت می‌کنیم که با شرط نوتری بودن R، هر R ـ مدول M با بعد یکدست گرنشتاین متناهی یک پیش‌پوش یکدست گرنشتاین می‌پذیرد. به علاوه نشان می‌دهیم برای یک حلقه R، بعد یکدست محدود شده معمولی، $FFD(R)$، مساوی با بعد یکدست گرنشتاین محدود شده، $FGFD(R)$، است.

---

[6] Foxby

[7] Christensen

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ همبافت‌ها و فانکتورهای همولوژی

تعریف ۱.۱.۱ یک همبافت یا زنجیر در $R-Mod$ عبارت است از یک رشته از R ـ مدول‌ها و R ـ همومورفیسم‌ها مانند،

$$X_{.} = \cdots \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-2} \to$$

به طوری که $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad d_{n-1} o\, d_n = 0$.

یک بافت یا هم‌زنجیر در $R-Mod$ عبارت است از یک رشته از R ـ مدول‌ها و R ـ همومورفیسم‌ها مانند،

$$X^{\cdot} = \cdots \to X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} X^{n+2} \to$$

به طوری که $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad d^{n+1} o\, d^n = 0$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید (X, d^X) یک همبافت در $R-Mod$ باشد:

۱) به هسته $d_n : X_n \to X_{n-1}$، n ـ دور گویند و با نماد $Z_n(X_.)$ نشان می‌دهند.

۲) به تصویر $d_{n+1} : X_{n+1} \to X_n$، n ـ مرز گویند و با نماد $B_n(X_.)$ نشان می‌دهند.

نکته ۱.۱ فرض کنید $X_.$ یک همبافت در $R-Mod$ باشد، به ازای هر n داریم:

$$B_n(X_.) \subseteq Z_n(X_.) \subseteq X_n$$

به $H_n(X_.) := \frac{Z_n(X_.)}{B_n(X_.)}$، n ـ امین مدول همولوژی $X_.$ گویند.

نکته ۲.۱ فرض کنید $X_.$ یک زنجیر در $R-Mod$ باشد. شرایط زیر معادلند:

۱) $X_.$ دقیق است.

۲) $Z_n(X_.) = B_n(X_.)$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$.

۳) $H_n(X_.) = 0$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $(X_., d^X)$ و $(Y_., d^Y)$ دو زنجیر در $R-Mod$ باشند. به گردایه $f_. = \{X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از R ـ هومومورفیسم‌ها یک مورفیسم همبافت‌ها از $X_.$ به $Y_.$ گوییم، هرگاه دیاگرام زیر جابجایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & {d_n}^X & & & \\
\cdots & \to & X_n & \to & X_{n-1} & \to & \cdots \\
 & f_n & \downarrow & & \downarrow & f_{n-1} & \\
\cdots & \to & Y_n & \to & Y_{n-1} & \to & \cdots \\
 & & & {d_n}^Y & & &
\end{array}$$

نکته ۱.۳ فرض کنید $X_. = (X, d^X)$ و $Y_. = (Y, d^Y)$ و $Z_. = (Z, d^Z)$ سه زنجیر در $R - Mod$ و $f_. : X_. \to Y_.$ و $g_. : Y_. \to Z_.$ دو مورفیسم زنجیرها باشند. قرار می‌دهیم: $g_.of_. := \{g_n of_n : X_n \to Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. آن‌گاه $g_.of_. : X_. \to Z_.$ یک مورفیسم زنجیرهاست.

لم ۱.۱.۱ فرض کنید $f_. = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : X_. = (X, d) \to Y_. = (Y, e)$ یک مورفیسم همبافت‌ها باشد و فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$. تعریف می‌کنیم:

$$H_n(f_.) : H_n(X_.) \to H_n(Y_.)$$

$$H_n(f_.)(x + Imd_{n+1}) = f_n(x) + Ime_{n+1}$$

اثبات. به [۶] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۴.۱.۱ مورفیسم $f_. : X_. \to Y_.$ در $R - Mod$ را یک شبه ایزومورفیسم نامند هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $H_n(f_.) : H_n(X_.) \to H_n(Y_.)$ یک R ـ ایزومورفیسم باشد.

نکته ۱.۴ فرض کنید $f_. : X_. \to Y_.$ یک ایزومورفیسم در $R - Mod$ باشد. در این صورت $f_.$ یک شبه ایزومورفیسم است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید $f_. : B_. \to C_.$ یک مورفیسم همبافت‌ها باشد. نگاشت مخروطی از $f_.$ از درجه n برابر با $B_{n-1} \oplus C_n$ است.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید $f_. : X_. \to Y_.$ یک مورفیسم همبافت‌ها باشد. در این صورت $f_.$ یک شبه ایزومورفیسم است اگر و تنها اگر نگاشت مخروطی $f_.$ دقیق باشد.

اثبات. به [٦] مراجعه کنید. □

تعریف ٦.۱.۱ فرض کنید $X_.$ و $Y_.$ دو همبافت در $R-Mod$ باشند و $f_. : X_. \to Y_.$ و $g_. : X_. \to Y_.$ دو مورفیسم همبافت‌ها باشند. گوییم $f_.$ و $g_.$ هموتوپیک‌اند، هرگاه یک دنباله $S_n : X_n \to Y_{n+1}$ از R ـ همومورفیسم‌ها موجود باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم: $f_n - g_n = e_{n+1}S_n + S_{n-1}d_n$.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنید $g_. : X_. \to Y_.$ و $f_.$ دو مورفیسم هموتوپیک باشند. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $H_n(f_.) : H_n(X_.) \to H_n(Y_.)$ و $H_n(g_.) : H_n(X_.) \to H_n(Y_.)$ دو R ـ همومورفیسم برابرند.

اثبات. به [٦] مراجعه کنید. □

تعریف ۷.۱.۱ یک مورفیسم $f_. : X_. \to Y_.$ در $R-Mod$ را هم‌ارزی هموتوپیک گویند، هرگاه یک مورفیسم $g_. : Y_. \to X_.$ موجود باشد به قسمی که $g_.of_. : X_. \to X_.$ و $1_{X_.}$ هموتوپیک باشند و $f_.og_. : Y_. \to Y_.$ و $1_{Y_.}$ هموتوپیک باشند. هرگاه بین دو همبافت یک هم‌ارزی هموتوپیک موجود باشد، آن‌گاه آن‌ها را هم‌ارز هموتوپیک نامند.

۲.۱ تحلیل‌های پروژکتیو و انژکتیو

تعریف۱.۲.۱ فرض کنید M یک R ـ مدول و $P_.$ یک همبافت باشد به قسمی که به ازای $n<0$، $P_n=0$ و یک R ـ همومورفیسم $\varepsilon : P_0 \to M$ موجود باشد. هرگاه

$$\cdots \to P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

یک همبافت باشد، آن‌گاه $P_.$ را یک همبافت چپ M گویند. هرگاه $(*)$ دقیق باشد، آن‌گاه $P_.$ را یک تحلیل چپ M نامند. اگر هر P_i پروژکتیو (یکدست) باشد، آن‌گاه $P_.$ را یک تحلیل چپ پروژکتیو (یکدست) M نامند.

فرض کنید M یک R ـ مدول و $E^{\cdot}$ یک بافت باشد به قسمی که به ازای $n<0$، $E^n=0$ و یک R ـ همومورفیسم $\delta : M \to E^0$ موجود باشد. هرگاه

$$0 \to M \xrightarrow{\delta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \to \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \to \cdots \quad (*)$$

یک بافت باشد، آن‌گاه $E^{\cdot}$ را یک بافت راست M نامند. اگر $(*)$ دقیق باشد، آن‌گاه $(*)$ را یک تحلیل راست M نامند. هرگاه هر E^i انژکتیو باشد، آن‌گاه $E^{\cdot}$ را یک تحلیل راست انژکتیو M نامند.

۳.۱ فانکتورهای مشتق شده

تعریف۱.۳.۱ فرض کنید $T : R-Mod \to S-Mod$ یک فانکتور جمعی باشد. برای هر R ـ مدول M یک تحلیل راست انژکتیو $\varepsilon : M \to E_M$ و یک تحلیل چپ پروژکتیو $\delta : P_M \to M$ انتخاب و ثابت نگه می داریم:

a) فرض کنید T همورد و $n \geq 0$، n ـ امین فانکتور مشتق شده چپ T به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_nT : R - Mod \to S - Mod$$

$$L_nT(M) := H_n(T(P_M))$$

فرض کنید $f : M \to N$ یک R ـ هومومورفیسم باشد و $\varepsilon_N : P_N \to N$ تحلیل پروژکتیو ثابت نگه داشته شده N باشد، بنابراین یک مورفیسم همبافت‌های $f_. : P_M \to P_N$ روی f موجود است. حال $T(f_.) : T(P_M) \to T(P_N)$ یک مورفیسم همبافت‌ها روی S ـ هومومورفیسم $T(f) : T(M) \to T(N)$ است. از طرفی $H_n : S - Mod \to S - Mod$ یک فانکتور همورد جمعی است پس S ـ هومومورفیسم $H_n(T(f_.)) : H_n(T(P_M)) \to H_n(T(P_N))$ را داریم و تعریف می کنیم: $(L_nT)(f) := H_n(T(f_.))$

b) فرض کنید T پادورد و $n \geq 0$، n ـ امین فانکتور مشتق شده چپ T به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_nT : R - Mod \to S - Mod$$

$$(L_nT)(M) := H_n(T(E_M))$$

فرض کنید $f : M \to N$ یک R ـ هومومورفیسم باشد و $\delta_N : N \to E_N$ تحلیل انژکتیو ثابت نگه داشته شده N باشد، بنابراین یک مورفیسم بافت‌های $f^{\cdot} E_M \to E_N$ روی f موجود است. حال $T(f^{\cdot}) : T(E_N) \to T(E_M)$ یک مورفیسم بافت‌ها روی S ـ هومومورفیسم $T(f) : T(M) \to T(N)$ است. از طرفی $H_n : S - Mod \to S - Mod$ یک فانکتور همورد جمعی است، پس S ـ هومومورفیسم $H_n(T(f^{\cdot})) : H_n(T(E_N)) \to H_n(T(E_M))$ را داریم و تعریف می کنیم: $(L_nT)(f) := H_n(T(f^{\cdot}))$

c) فرض کنید T همورد و $n \geq 0$، n ـ امین فانکتور مشتق شده راست T به صورت زیر تعریف می شود:

$$R^nT : R - Mod \to S - Mod$$

$$(R^nT)(M) := H^n(T(E_M))$$

فرض کنید $f : M \to N$ یک R ـ هomomorfیسم باشد و $\delta_N : N \to E_N$ تحلیل انژکتیو ثابت نگه داشته شده N باشد، بنابراین یک مورفیسم بافت‌های $f^{\cdot} : E_M \to E_N$ روی f موجود است. حال $T(f^{\cdot}) : T(E_M) \to T(E_N)$ یک مورفیسم بافت‌ها روی S ـ همومورفیسم $T(f) : T(M) \to T(N)$ است. از طرفی $H_{\cdot} : S - Mod \to S - Mod$ یک فانکتور همورد جمعی است پس S ـ همومورفیسم $H^n(T(f^{\cdot})) : H^n(T(E_M)) \to H^n(T(E_N))$ را داریم و تعریف می کنیم: $(R^nT)(f) := H^n(T(f^{\cdot}))$

d) فرض کنید T پادورد و $n \geq 0$، n ـ امین فانکتور مشتق شده راست T به صورت زیر تعریف می شود:

$$R^nT : R - Mod \to S - Mod$$

$$(R^nT)(M) := H^n(T(P_M))$$

فرض کنید $f : M \to N$ یک R ـ همومورفیسم باشد و $\varepsilon_N : P_N \to N$ تحلیل پروژکتیو ثابت نگه داشته شده N باشد، بنابراین یک مورفیسم همبافت‌های $f_{\cdot} : P_M \to P_N$ روی f موجود است. حال $T(f_{\cdot}) : T(P_N) \to T(P_M)$ یک مورفیسم همبافت‌ها روی S ـ همومورفیسم $T(f) : T(N) \to T(M)$ است. از طرفی $H_{\cdot} : S - Mod \to S - Mod$ یک فانکتور همورد جمعی است پس S ـ همومورفیسم $H^n(T(f_{\cdot})) : H^n(T(P_N)) \to H^n(T(P_M))$ را داریم و تعریف می کنیم: $(R^nT)(f) := H^n(T(f_{\cdot}))$

۴.۱ Ext

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید M و N دو R ـ مدول باشند:

۱) قرار می‌دهیم: $Ext_R^i(M,-) := R^i(Hom_R(M,-))$ به ازای هر $i \geq 0$. برای هر R ـ هومومورفیسم $f: X \to Y$ تعریف می‌کنیم:

$$Ext_R^i(M,f) = R^i(Hom_R(M,-))(f) : Ext_R^i(M,X) \to Ext_R^i(M,Y)$$

۲) قرار می‌دهیم: $Ext_R^i(-,N) := R^i(Hom_R(-,N))$

$$Ext_R^i(f,1_N) := Ext_R^i(f,N) = R^i(Hom_R(-,N))(f)$$

لم ۱.۴.۱

۱) $Ext_R^0(M,-)$ و $Hom_R(M,-)$ به طور طبیعی هم‌ارزند. برای هر R ـ مدول انژکتیو E و هر $i \geq 0$ داریم: $Ext_R^i(M,E) = 0$

۲) $Ext_R^0(-,N)$ و $Hom_R(-,N)$ به طور طبیعی هم‌ارزند. برای هر R ـ مدول پروژکتیو P و هر $i \geq 1$ داریم: $Ext_R^i(P,N) = 0$

اثبات. به [٦] مراجعه کنید. □

نکته ۵.۱ فرض کنید M و N دو R ـ مدول باشند و $i \in \mathbb{N}_0$. R ـ مدول $Ext_R^i(M,N)$ به هر کدام از دو طریق زیر قابل تعریف است:

$$Ext_R^i(M,N) = R^i(Hom_R(-,N))(M)$$
$$Ext_R^i(M,N) = R^i(Hom_R(M,-))(N)$$

تعریف ۱.۴.۲ به ازای هر $i \geq ۰$، فانکتور دو متغیره

$$Ext^i_R(-,-) : (R-Mod) \times (R-Mod) \to R-Mod$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) به ازای هر دو R ـ مدول M و N داریم:

$$Ext^i_R(-,-)(M,N) := Ext^i_R(M,N)$$

۲) فرض کنید $f : M' \to M$ و $g : N \to N'$ دو R ـ هومومورفیسم باشند. آن‌گاه

$$Ext^i_R(f,g) : Ext^i_R(M,N) \to Ext^i_R(M',N')$$

$$Ext^i_R(f,g) := Ext^i_R(۱_{M'},g)Ext^i_R(f,۱_N)$$

لم ۱.۴.۲ فرض کنید M و N دو R ـ مدول و $i \in \mathbb{N}_۰$. هر دو فانکتور $Ext^i_R(-,N)$ و $Ext^i_R(M,-)$ جمعی هستند. این نتیجه می‌دهد که اگر $f, f_۱, f_۲ : M' \to M$ و $g, g_۱, g_۲ : N \to N'$، R ـ هومومورفیسم باشند، آن‌گاه

$$Ext^i_R(f_۱+f_۲,g) = Ext^i_R(f_۱,g) + Ext^i_R(f_۲,g)$$
$$Ext^i_R(f,g_۱+g_۲) = Ext^i_R(f,g_۱) + Ext^i_R(f,g_۲)$$

اثبات. به [٦] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۴.۱ فرض کنید $f : M' \to M$ و $g : N \to N'$ دو R ـ همومورفیسم باشند. در این صورت به ازای هر $r \in R$ و هر $i \in \mathbb{N}_0$، داریم:

$$Ext_R^i(rf, g) = Ext_R^i(f, rg) = rExt_R^i(f, g)$$

اثبات. به [۶] مراجعه کنید. □

قضیه ۲.۴.۱ برای R ـ مدول E، موارد زیر معادلند:

a) E انژکتیو است.

b) $Ext_R^i(M, E) = 0$ برای هر R ـ مدول M و هر $i \geq 1$.

c) $Ext_R^1(M, E) = 0$ برای هر R ـ مدول M.

اثبات. به [۶] مراجعه کنید. □

قضیه ۳.۴.۱ برای R ـ مدول P، موارد زیر معادلند:

a) P پروژکتیو است.

b) $Ext_R^i(P, N) = 0$ برای هر R ـ مدول N و هر $i \geq 1$.

c) $Ext_R^1(P, N) = 0$ برای هر R ـ مدول N.

اثبات. به [۶] مراجعه کنید. □

قضیه ۴.۴.۱ فرض کنید $\{A_i\}_{i \in \Omega}$ گردایه‌ای از R ـ مدول‌ها باشد و $n \in \mathbb{N}_0$. داریم:

a) دو فانکتور $\prod_{i \in \Omega} Ext_R^n(A_i, -)$ و $Ext_R^n(\bigoplus_{i \in \Omega} A_i, -)$ به طور طبیعی هم‌ارزند.

b) دو فانکتور $\prod_{i \in \Omega} Ext_R^n(-, A_i)$ و $Ext_R^n(-, \prod_{i \in \Omega} A_i)$ به طور طبیعی هم‌ارزند.

اثبات. به [۶] مراجعه کنید. □

۵.۱ Tor

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنید M و N دو R ـ مدول باشند:

۱) برای هر $i \geq 0$ قرار می‌دهیم: $Tor_i^R(M,-) = L_i(M \underset{R}{\otimes} -)$. پس برای هر R ـ هومومورفیسم $f : L \to L'$ داریم:

$$Tor_i^R(M,N) = L_i(M \underset{R}{\otimes} -)(N)$$
$$Tor_i^R(M,f) = (L_i(M \underset{R}{\otimes} -))(f) : Tor_i^R(M,L) \to Tor_i^R(M,L')$$

۲) برای هر $i \geq 0$ قرار می‌دهیم: $Tor_i^R(-,N) = L_i(- \underset{R}{\otimes} N)$. پس به ازای هر R ـ هومومورفیسم $f : L \to L'$ داریم:

$$Tor_i^R(L,N) = L_i(- \underset{R}{\otimes} N)(L)$$
$$Tor_i^R(f,N) = (L_i(- \underset{R}{\otimes} N))(f) : Tor_i^R(L,N) \to Tor_i^R(L',N)$$

قضیه ۱.۵.۱ فرض کنید M و N دو R ـ مدول باشند. در این صورت به ازای هر $n \geq 0$ داریم:

$$Tor_i^R(M,N) = L_i(M \underset{R}{\otimes} -)(N) = L_i(- \underset{R}{\otimes} N)(M)$$

اثبات. به [۶] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۲.۵.۱ به ازای هر $n \geq 0$، فانکتور دو متغیره

$$Tor_i^R(-,-) : (Mod-R) \times (R-Mod) \to R-Mod$$