

**بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ**



دانشگاه علامه طباطبائی  
دانشکده ادبیات و زبانهای خارجی

## قضایای ناتمامیت: مبانی، برهان و برخی نتایج فلسفی

نگارش: میثم میرزائی عطاآبادی

استاد راهنما: دکتر علی اکبر احمدی افرمجانی

استاد مشاور: دکتر مرتضی منیری

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فلسفه-منطق

تیرماه ۱۳۸۷

**فرم گرد آوری اطلاعات پایان نامه**  
**کتابخانه مرکزی دانشگاه علامه طباطبائی**

عنوان : قضایای ناتمامیت : مبانی ، برهان و برخی نتایج فلسفی	
نویسنده / محقق : میثم میرزائی عطاآبادی	
مترجم : -----	
استاد مشاور : دکتر مرتضی منیری استاد داور : دکتر فرشته نباتی	استاد راهنما : دکتر علی اکبر احمدی افرمجانی
واژه نامه : صص ۲۸۴-۲۸۵	کتابنامه : صص ۲۸۳-۲۸۰
<input type="checkbox"/> کاربردی	<input type="checkbox"/> توسعه ای
<input checked="" type="checkbox"/> بنیادی	نوع پایان نامه :
سال تحصیلی : ۸۷-۸۶	مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد
محل تحصیل : تهران	نام دانشگاه : علامه طباطبائی
تعداد صفحات : ۳۳۲	گروه آموزشی : فلسفه
کلید واژه ها به زبان فارسی :	
قضایای ناتمامیت ، مساله و برهان سازگاری و تمامیت ، برنامه هیلبرت ، زبان و فرا زبان ، نحو شناسی و دلالت شناسی ، پارادوکس خود ارجاعی ، نظریه صدق ، نظریه معنی ، نظریه برهان ، فلسفه ذهن ، تعریف ناپذیری صدق ، فلسفه ریاضیات ، ایده آلیسم کانتی ، حلقه وین ، منطق گرائی	
کلید واژه ها به زبان انگلیسی :	
<b>, Problem and Proof of Consistency and Completeness , Incompleteness Theorem  , Syntax and Semantic , Language and Metalanguage , Hilbert Program  , Proof Theory , Meaning Theory , Truth Theory , Self-Referencial Paradox  , Philosophy of Mathematics , Undefinitablity of Truth , Philosophy of Mind  Logicism , Vienne Circle , Kantian Idealism</b>	

به نام پدر و مادرم

## چکیده

**الف . موضوع و طرح مساله (اهمیت موضوع و هدف) :** رساله حاضر تلاشی است در راستای بررسی فلسفی و دور از هیاهوی صوری قضایای ناتمامیت گودل ، مساله محوری رساله جستجوی پاسخی به این سوالات می باشد : سهم اندیشه های فلسفی رایج در دوران گودل در تحریر مقاله دوران ساز ۱۹۳۱ به چه اندازه بوده است ؟ به فرض جواب مثبت چگونه می توان این اندیشه ها را لیست کرد و تاثیرات شان را در کجا می بایست جستجو کرد ؟ آیا می توان گودل را در تألیف مقاله ۱۹۳۱ واجد مقاصد و اهداف فلسفی دانست ؟ ایده ناتمامیت تا چه حد وامدار مکاتب صوری ریاضیات برای مثال مکتب هیلبرت و مسائل رایج آن دوران فی مثل مساله سازگاری و تمامیت ، است ؟ تا چه حد می توان مقاله ۱۹۳۱ را واکنشی به مکاتب رایج ریاضیاتی دانست ؟ و از دیگر سو تا چه اندازه می توان مکاتب ریاضیاتی و دانش منطق را پس از گودل وامدار او بدانیم ؟ مسائل رایج ریاضیاتی و منطقی پس از قضایای گودلی به چه جامه ای در آمدند ؟ و از همه مهمتر تا کجا می توان نفوذ و تاثیرات قضایای گودلی را پی گرفت ؟ آیا ما به مرزهای فلسفه می رسیم ؟ به فرض رسیدن تا کجا می توان این تاثیرات را واجد اهمیت و صائب دانست ؟ در کل فضای پسا-گودلی در منطق و ریاضیات و فلسفه را چگونه می توان ارزیابی کرد ؟ و ... پاسخ به سوالاتی از این دست مساله رساله حاضر را تشکیل می دهد. اهمیت پاسخ به این مساله و جواب به سوالات فوق الذکر را می توان در این دانست که تلاش در جهت پاسخ گوئی به این سوالات افق هائی را روبه روی ما خواهد گوشید که تاکنون در کشور ما مورد اغفال واقع گردیده اند. شاهد مدعای ما عدم وجود منابع با اهمیت برای پاسخ گوئی به سوالات فوق الذکر است. اصولاً تحولات اساسی منطق بعد از ۱۹۳۰ و شیفت پارادایمی فلسفه تحلیلی در دهه های میانی ۵۰ - ۷۰ را نمی توان فارق از نام و اندیشه های گودل بررسی کرد و این خود اهمیت مضاعفی را به پاسخی گوئی به سوالات فوق و پرداختن به مساله رساله حاضر به بار می آورد.

**ب . مبانی نظری شامل مرور مختصری از منابع ، چارچوب نظری و پرسشها و فرضیه ها :** ابتدا مهم است که یک بار برای همیشه چارچوب و فضائی را که این رساله در آن تدوین می شود مشخص کنیم. این رساله در چارچوبی تحلیلی - فلسفه تحلیلی - تدوین گردیده است. مساله ، سوالات فوق الذکر ، مفروضات اساسی ، منابع و ... همه همه در فضائی تحلیلی فراهم آورده شده اند. اصولاً تمامی کلید واژه های ذکر شده در صفحه قبل غیر از ایده آلیسم آلمانی را نمی توان در فضائی غیر تحلیلی به درستی فهم و به کار گرفت. به این دلیل آشکار است که این رساله در پاره ای از مواقع جانب دارانه به تحریر در آمده و این را نه ضعف رساله که حسن آن می دانیم. شاید نتوان به نهج علوم نرماتیو فرضیه هائی برای آزمون در این رساله ارائه کرد ، به جای فرضیه اجازه دهید اهداف رساله مختصراً به رشته تحریر در آید. الف . نشان دادن وامداری گودل از حرکت ها و مکاتب پر نفوذ فلسفی رایج یا غیر رایج عصر خویش ، ب . بیان گوشه های پازل گونه قضایای گودل که وامدار تلاش های فکری هیلبرت و شاگردانش ، فرگه و پیروانش - راسل و ویتگنشتاین - ، براور و مکتب شهودی اش ، افلاطون گرانی و خیل مشتاقانش و ... ، می باشد. ج . نشان دادن تاثیر قضایای گودل و سهم او در نگاشت نوین منطق ریاضی ، د . بیان عمق فلسفی شگفتی آور قضایای گودل و نشان دادن تأثیرات انکار ناپذیر آن در حرکت های فلسفی به الأخص فلسفه تحلیلی. به واسطه وسعت مد نظر رساله و انبوهی منابعی که می توانست به کار گرفته شود چکیده حاضر نمی تواند مهملی مناسب برای ذکر حتی مختصری از این منابع باشد ، تنها به ارائه لیست منابع در پایان رساله حاضر اکتفا می شود. سعی ما بر این بوده حتی المقدور منابع دارای عمق تحلیلی و جامعی باشد. منابع بر اساس تقسیم بندی که در ابتدای رساله به قدر کافی شرح داده شده انتخاب گشته و به مرور در رساله مورد استفاده قرار گرفته است.

**پ . روش تحقیق شامل تعریف مفاهیم ، روش تحقیق ، جامه مورد تحقیق ، نمونه گیری و روش های نمونه گیری ، نحوه اجرای آن ، شیوه گرد آوری و تجزیه و تحلیل داده ها :** روش تدوین رساله حاضر مطالعات کتابخانه ای و فیش برداری و یک پارچه ساختن فیش های مورد نظر در هیأت تحقیقی نظری و جدا از فضای رایج رساله های نرماتیو می باشد.

**ت . یافته های تحقیق :** یافته های رساله حاضر را اینگونه می توان لیست نمود :

۱. گودل تحت تأثیر فضای تحلیلی - حلقه وینی به تدوین کارهای علمی اش پرداخته است. تأثیرات و تعلق خاطر او به تعالیم کانتی آشکارا چه در مبانی تدوین مقاله ۱۹۳۱ و چه در تبعات این مقاله قابل رهگیری است. در این میان نقش حلقه وین چه در شکل گیری علایق و شخصیت علمی گودل و چه در ترغیب او برای سر عناد برداشتن به حلقه آشکار است. نگاهی به تبعات کارهای گودل که همگی رنگ بوئی ضد پوزیتیویستی منطقی دارد می توانند موضع فوق الذکر را مورد تأکید قرار دهد. در این میان می

توان به نظریه معنی حلقه وین، نشان دادنی گفتنی ویتگنشتاین، منطق گرائی و... مباحث دیگر اشاره داشت. آنچه که آشکار است گودل با تدوین نهائی هقایدش در دهه های بعد آشکار در جبهه مقابل مشارب پوزیتیویستی قرار گرفت. او به همراه آلفرد تارسکی تلاشی نافرجام را در اصلاح رویه های حاکم بر حلقه داشتند.

۲. برنامه هیلبرت و ماترک او برای ریاضیدانان محرک اصلی و عامل اصلی ایده دهنده به گودل برای کشف گزاره اثبات ناپذیر اما درست می باشد. مسأله سازگاری مدخل ورود گودل به تدوین ایده ناتمامیت حساب بوده است از این جهت گودل وامدار اندیشه های هیلبرت می باشد. از دیگر سو گودل مرز بندی آشکار و دقیقی با فرمالیسن هیلبرت و شهود گرائی برآور در تدوین مقاله ۱۹۳۱ دارد. گودل در غم و شادی شریک اصلی هیلبرت بوده، با مقاله ۱۹۳۰ در باب اثبات تمامیت منطق محمولات شریک شادی و با قضیه دوم مقاله ۱۹۳۱ یعنی اثبات ناپذیری سازگاری تحت سیستم مورد بررسی شریک غم او شد. اما گودل با به کار بست دقیق و فاقد اشکال مفاهیم ریاضیات و فرا-ریاضیات به نوعی به ماندگاری هیلبرت و ارتقاء و اصلاح مسأله سازگاری کمک شایانی کرد از این جهت نمی تواند رابطه گودل و هیلبرت را یک سویه یا تنها مخرب دانست از گودل می توان تأثیراتی در دو سوی این طیف یافت. از دیگر سو نسبت گودل با دیگر مکاتب فلسفه ریاضیاتی نظیر منطق گرائی و شهود گرائی نشان داده و تأثیرات احتمالی ایده ناتمامیت بر این مکاتب نیز از دیده دور نداشتیم.

۳. تأثیرات گودل را حقیقتاً می توان در بسیار بیش از اینها در مرزهای فلسفه دید. حلقه وین تنها جزئی از این حوزه بود که به علت اهمیت فراوان اش به طور مجزا ذکر شد. به علت گستردگی پیش رو تنها به ذکر نام حوزه هایی که توانسته ایم تأثیرات گودل را در آن نشان دهیم می پردازیم، نظریه معنی داری و طرد نظریه های پوزیتیویستی - منطقی، ورود مفهوم صدق به مباحث فلسفه تحلیلی و سبب ساز شدن تحولات بعدی در فلسفه تحلیلی، حضور پر رنگ قضایا در جدال میان مکاتب فلسفه ذهن و استفاده طرفین مجادله از قضایای گودل که می توان از یک سو این تأثیرات را تا دیویدسون پی گرفت و از دیگر سو تا پن روز، تدوین نهائی ایده ناتمامیت در مقاله "مسأله پیوستار کانتور چیست؟" که مقاله دوران ساز برای مکتب افلاطون گرائی در نظر گرفته می شود هرچند که نمی توان خود قضایای گودل را به علت ماهیت معرفت شناختی مسبب و پشتوانه ای برای افلاطون گرائی که نظریه متافیزیکی است دانست، تلاش گودل در جهت تدوین نظریه کانتی در باب مکان و زمان با بهره جستن ضمنی از مقاله ۱۹۳۱ و نشان دادن این امر که می توان نظریه کانتی در حساب و معرفت را نیز با توجه به مقاله مذکور تدوین کرد، نشان دادن توانائی قضایا برای سنگین کردن کفه ترازو بر له یک متافیزیک علیه دیگری و در آخر تأثیر ایده ناتمامیت در جهان فیزیک نظری و به محاق بردن برنامه بلند پروازانه تمام تاریخ این رشته از علم یعنی تدوین نظریه میدان واحد یا نظریه نهائی، را مورد بررسی قرار داده ایم.

**ث. نتیجه گیری و پیشنهادات:** نتایج رساله حاضر را می توان پاسخ مستدل و با دلایل کافی به سوالات مطرح شده در بند الف دانست، عمده پاسخ ها را در بند سه خلاصه وار ذکر کردیم و چیزی بیش از این نمی توان به عنوان نتیجه اضافه کرد. رساله حاضر پیشنهاد می دهد با تمرکز بر گودل متأخر و تلاش او در جهت احیاء ایده آلیسم آلمانی و علاقه وافر اش به هوسرل متأخر خط رساله حاضر پی گرفته شود. نسبت میان اندیشه های کانت و هوسرل و تألیف آن در گودل و تلاش های فلسفی متأخر او می تواند موضوعی مفصل و البته بسیار جذاب برای تدوین رساله های بعدی باشد. در تدوین رساله به نقدهائی از ویتگنشتاین بر قضایای ناتمامیت گودل رسیدیم این نقدها که علی الظاهر فاقد دقت و عمق لازم می نمایاند واجد اهمیتی فوق العاده در فهم عمق استراتژیک ایده گودل می باشد رساله پیشنهاد می دهد که خط نقدی ویتگنشتاین پی گرفته شود و متافیزیک پژوهی در مبانی منطق و ریاضیات صوری انجام گیرد، به نظر می رسد در باب عناد با متافیزیک که دعوی فلاسفه تحلیلی اولیه و حتی پاره ای از متأخرین نیز می باشد می توان شکاف هائی را ترسیم کرد.

**صحت اطلاعات مندرج بر اساس محتوای پایان نامه و ضوابط مندرج در فرم را گواهی می نمایم**

**نام استاد راهنما:**

**سمت علمی:**

**نام دانشکده:**

**رئیس کتابخانه:**

## پیشگفتار

در منطق ریاضی - یا همان منطق جدید - شاید هیچ قضیه به اندازه قضیه ناتمامیت و هیچ منطق دانی به اندازه گودل صاحب نام و آوازه نباشند. گودل را بزرگ ترین منطق دانان همه دوران نامیده اند ، نابغه ای که دیگر شاید مثل آن ظهور نکند. ابعاد حیرت انگیز اندیشه گودل و بالاخص قضیه ناتمامیت او مشوق شاید هزاران هزار رساله و مقاله علمی بوده و ای عجب که هنوز این عطش هل من مزید می زند. اما رساله های گودلیه! در ایران هم شروع به توالد کرده اند. درست مانند هر جای دیگر نگاه ها ابتدا به نبوغ ریاضیاتی گودل دوخته شده است که این نه بدیع است و نه بدعت. از این میان می توان به رساله های " قضایای ناتمامیت و مدل ماشینی در فلسفه ذهن " که توسط آقای قیوم زاده در دانشگاه مدرس و " قضایای ناتمامیت گودل و سیستم GL " توسط آقای نوروزی در همان دانشگاه ارائه گشته اشاره داشت. اما آنچه فراخور حال یک رساله فلسفی - منطقی است که از قضایای روزگار بر آن است تا به گودل و قضایای مشهورش پردازد نه پرداختن به صورت عیان این قضیه - که این مهم نه در اندازه ها دانش نویسنده حقیر است و نه در زمره علایق فلسفانه می تواند جایی داشته باشد پس همان به که به اهلس واگذار گردد - بلکه پرداختن به سطور نانوشته اما بسیار پر رنگ! آن می باشد.

در این رساله سعی می شود در سفری از فلسفه به ریاضیات و از ریاضیات باز به فلسفه همگام با گودل باشیم. اندیشه ناتمامیت با تمام عرض و طول خیره کننده خویش نمی تواند مفهومی پا در هوا باشد. بی گمان او را نسب و شجره ای است که برای به فهمیدنش می بایست این نسب را تا به ریشه ها دنباله گرفت. این مهم را در فصل یک به سرانجامی خواهیم رسانید. از آنجائیکه فضائی که رساله تحت آن به نگارش در می یاید فضایی متمایل به فلسفه تحلیلی است ، پس سعی بر این است از شجره نسب ناتمامیت انگشت بر تحلیلی ها گذاشته شود ، هرچند که نمی توان از ریاضیدانانی چون هیلبرت و تاثیر سترگ آن بر اندیشه ناتمامیت هر جا که باشی و تحت هر پارادایمی که نفس بکشی بگذری. فصل یک و در کل رساله حاضر بدین سان رنگ و بوئی فلسفی دارد تا ریاضیاتی و محض و صوری. در فصل یک با منطق گرائی آغاز می کنیم ، میراث فرگه بزرگ و نیای فلسفه تحلیلی ، راسل نبوغی سرشار در فلسفه تحلیلی و ویتگنشتاین متقدم فیلسوف چشم ناپوشیدنی فلسفه تحلیلی. ناتمامیت را نسبتی استوار با نظام های ZF (نظریه اصل موضوعی مجموعه زرمولو و فرانکل) و PM (اصول ریاضیات راسل و وایتهد) است که لااقل دومی محصول اندیشه منطق گرائی است و این خود مهم ترین دلیل برای رجوع

به برنامه منطقی گرائی در هر سه نسخه آن می باشد. در پاره ای از موارد به نظر می رسد پا را از حوزه ای که گودل از آن تأثیر پذیرفته آن سو تر نهاده ایم، در بحث پیرامون اندیشه های فرگه این مهم به چشم می آید، دلیل را می توان ارائه چارچوبی از فضائی که تحت آن قضایای گودل نمایان گردید و همچنین باز نمود فضائی که قرار است تحت آن به بیان تاثیرات قضایای گودل پرداخت، جست. هر چند روح فلسفی و آن هم از نوع تحلیلی شاید مسبب دیگر این فرا نهادن پا از حوصله مباحث مورد نظر باشد. پس از آن نوبت هیلبرت است و دغدغه هایش و برنامه ای که با گودل به لرزش افتاد، در اینجا نیز از محتوای فنی گذشته، به ارائه غیر فنی و به اندازه وسع دقیق و کامل اکتفا کرده ایم. پارادوکس ها و بحران های ریاضی منشاء هر دو حرکت منطقی گرائی فرگه ای و صورت گرائی هیلبرتی هستند، البته خویشی قضایای گودل با پارادوکس های معنائی نیز علت دیگری است برای اختصاص بخشی مجزا به این داستان. و در آخر حکایت رویکرد حاکم بر فلسفه تحلیلی در دهه چهل، یعنی پوزیتیویسم منطقی و کتاب مقدس شان تراکتاتوس. گودل روزی روزگاری در وین عضو حلقه بود و سپس در سلک مخالفین و مخربین حلقه در آمد، جالب اینکه یکی از حربه های مخالفین در نزاع با حلقه، قضایای ناتمامیت بود که این خود باز حجت بالغه ای برای یادی از یاران ما مضمی گودل می باشد.

بخش دوم اما به بیان محتوی مقاله ۱۹۳۱ اختصاص دارد، نمی شود گودل را موضوع رساله ای انتخاب و از صورت گرائی به طور کامل شانه خالی کنی. بخش دوم محتوای فنی تری را ارائه می کند، اما در این بخش هم سعی شده با انتخاب منابع فلسفی تر راه را بر فروغلتیدن کامل به دنیای نمادها ببندیم. بخش دوم را با ارائه دیگر گونه قضایای گودل به پایان می بریم، ارائه ای که راه را بر تعبیر رویای لایب نیتزی - ماشین محاسب - باز کند، راهی که در فصل سه به مباحث مربوط به فلسفه ذهن ختم می شود. اما فصل سوم که قلب رساله حاضر است اختصاص به تاثیراتی دارد که می تواند از آن قضایای گودل دانست. بخشی از این تاثیرات سلبی می باشند، یعنی نقدهائی که بر گودل وارد شده است. بخشی را به ارائه نقد ها اختصاص داده ایم. نقدهائی که به نظر می رسد در جهت فهم محتوی صوری و فلسفی قضایای گودل بسیار مفید باشند، بالاخص نقدی که با نکته سنجی های ویتگنشتاین همراه است و محتوای فلسفی شگفت انگیزی از سطور نانوشتی مقاله ۱۹۳۱ را فرا روی ما می آورد.

سایر تاثیرات را در دسته های سه گانه برنامه هیلبرت، فلسفه و علوم جای داده ایم. دو دسته اول اعظم حجم باقی مانده فصل سوم را به خویش اختصاص داده اند. در بخش متعلق به برنامه هیلبرت کوشیده ایم نظرات مختلفی را که در باب تاثیر قضایای گودل بر برنامه هیلبرت موجود هست را ارائه و به جمع



بندی نزدیک شویم. از هر دو سوی این طیف، مخالفین و موافقین، مباحثی را ارائه کرده سعی در رعایت بی طرفی داشته ایم. می بایست تاکید شود که در پاره ای از این بخش باز به مرزهای صورت گرائی بازگشته ایم که البته ناگزیر از آن بوده ایم، مگر می شود ذیل نام هیلبرت نفس کشید - رساله نوشتن جای خود دارد - و دامن از صورت گرائی شست.

اما بخش متعلق به تاثیرات فلسفی مناقشه برانگیزترین بخش و در عین حال به نظر می رسد جذاب ترین بخش رساله حاضر باشد. در این بخش از تاثیر بر حلقه وین، نظریه صدق، افلاطون گرائی، فلسفه ذهن، تالیفی پیشینی، کواپن، دیویدسون، کانت و... مباحث متنوع ارائه و سعی در جمع بندی آنها کرده ایم. این بخش توأم با تطوری جالب می تواند علت جذابیت پایان نامه نوشتن در باب قضایای گودل توسط دانشجویان فلسفه را نمایان سازد.

و در واپسین بخش از فصل سوم به مرزهای علوم دقیقه وارد شده ایم. از این علوم فیزیک را که همیشه با ریاضیات نسبتی نزدیک بر قرار ساخته است را انتخاب کرده ایم. اهم مطلب از سخنرانی پروفیسور هاوکینگ در دانشگاه تگزاس استخراج شده، جایی که ایشان تاثیرات قضایای گودل را در فیزیک مورد مذاقه قرار داده اند. بسیار خواندنی و عبرت آموزنده است.

در فصل چهارم سعی در جمع بندی و ارائه مدون و فشرده مباحث ارائه شده در رساله، بالاخص فصل سوم آن داشته ایم. فصل چهارم را به پاره ای از اظهار نظرات شخصی نیز اختصاص داده ایم و رساله را با ارائه سوالی که برای نویسنده ره آورد این سفر هیجان انگیز با گودل می باشد به پایان رسانیده ایم.

جا دارد تاکید شود که این رساله ای به قدر وسع و طاقت و خالی از هرگونه کمال یا دعوی کمال می باشد، قصور ها در این متن محتمل اند و صد البته لازم. این رساله تلاشی است در جهت گذر از سطور نوشته به سطور نانوشته، چنین گذری را البته آفاتی انبوه به کمین نشسته اند.

## فصل اول :

۱	۱ - شکل گیری مبانی
۱۶	۱-۱ منطق گرایی
۱۹	۱-۱-۱ فرگه یک عمر و یک برنامه
۳۹	۱-۱-۲ اصول ریاضیات ، گامی به پیش
۵۰	۱-۱-۳ منطق گرایی ، ویتگنشتاین متقدم ، تاییدها و تردیدها
۵۵	۱-۲ مساله سازگاری ، تمامیت و برنامه هیلبرت
۷۲	۱-۳ بحران های ریاضات و پارادکس ها
۷۳	۱-۳-۱ بحران در مبانی
۸۱	۱-۳-۲ پارادوکس ها
۸۴	۱-۴ تراکتاتوس ، اتمیسم منطقی ، حلقه وین و تمایلات فلسفی گودل
۸۶	۱-۴-۱ تراکتاتوس
۹۴	۱-۴-۲ حلقه وین ، کورت گودل و فلسفه
۱۰۲	۱-۵ مؤخره
	فصل دوم :
۱۱۰	۲ - برهان گودل
۱۱۱	۲-۱ پیش روایت
۱۱۴	۲-۲ روایت اول
۱۲۲	۲-۳ روایت دوم
۱۲۲	۲-۳-۱ ماشین گودلی
۱۲۵	۲-۳-۲ ناتمامیت در حالت عام
۱۲۸	۲-۳-۳ نظریه تارسکی
۱۲۹	۲-۳-۴ برهان اصلی گودل
۱۳۲	۲-۳-۵ نظریه ناتمامیت راسر (Rosser)
۱۳۵	۲-۳-۶ جمله پاریک (Parikh)

۱۳۶	۲-۳-۷ دومین قضیه ناتمامیت گودل
۱۳۷	۲-۴ روایت سوم: حل ناپذیر، رویای لایب نتزی فصل سوم:
۱۴۶	۳- برخی نتایج اندیشه ناتمامیت
۱۵۰	۳-۱ نقدها و تردیدها
۱۵۱	۳-۱-۱ نقدهای آغازین و فهم محتوای قضایا
۱۶۲	۳-۱-۲ ویتگنشتاین و نقد فلسفی - گرامری
۱۷۶	۳-۲ تأثیر برنامه هیلبرت و نظریه برهان
۱۷۶	۳-۲-۱ نقدها و نظرها
۱۸۰	۳-۲-۲ مساله سازگاری پس از گودل
۱۹۱	۳-۲-۳ گودل، شک گرائی و برنامه هیلبرت
۲۰۹	۳-۳ تجسد فلسفی قضایای گودل
۲۰۹	۳-۳-۱ حلقه وین و تأثیر قضایای ناتمامیت
۲۱۲	۳-۳-۲ نظریه صدق، تقدم یا تاخر
۲۲۴	۳-۳-۳ جذبه افلاطونی
۲۳۴	۳-۳-۴ فلسفه ذهن، قضایای گودل
۲۵۱	۳-۳-۵ اشاره ها
۲۵۱	۳-۳-۵-۱ نظرها و تأثیرها
۲۵۴	۳-۳-۵-۲ متافیزیک و قضایای گودل: حمایت یا تضعیف
۲۵۶	۳-۳-۵-۳ تالیفی پیشینی و قضیه گودلی
۲۵۹	۳-۴ رویای فیزیک و قضیه گودل فصل چهارم:
۲۶۹	۴- نتیجه گیری
۲۷۰	۴-۱ نقدها و ابهام ها
۲۷۱	۴-۲ گودل و برنامه هیلبرت
۲۷۲	۴-۳ ریاضیات و فلسفه، قضایای گودل
۲۷۳	۴-۳-۱ حلقه وین پس از قضایای ناتمامیت
۲۷۴	۴-۳-۲ مفهوم صدق، قضایای گودل و برخی نتایج

۲۷۵	۴-۳-۳ افلاطون گرائی ، معرفت شناسی و متافیزیک
۲۷۶	۴-۳-۴ انسان ، ماشین و قضایای گودلی
۲۷۷	۴-۳-۵ قضایای گودلی و تفکر کانتی
۲۷۸	۴-۴ نظریه میدان واحد فیزیک و ناتمامیت ریاضیات
۲۷۸	۴-۵ مؤخره
۲۸۰	فهرست منابع و مآخذ
۲۸۴	واژه نامه
۲۸۶	پیوست اول
۳۲۲	پیوست دوم

## ۱ - شکل گیری مبانی

اندیشه ناتمامیت حساب و به دنبال آن ریاضیات به عنوان یقینی ترین ساحت معرفت آدمی زلزله ای است که تمامی ساحت اندیشه بشری را در می نوردد و اکتفا به قلمروهای هرچند وسیع ریاضیات نمی کند ، که این مساله ای است در باب معرفت و شکل گیری و اعتبار و گستره ای که به آن دسترسی دارد . گودل خلاق این گزاره عام - عام به این معنی که اثراتش به ریاضیات اکتفا نمی کند و تمامی ساحت اندیشه آدمی را در می نوردد - یعنی جمله درست اثبات ناپذیر را نمی توان ریاضی دانی فارغ از حوزه های دیگر اندیشه دانست. شخصیت علمی چند بعدی گودل خواه ناخواه اثرات خویش را بر آثار گران سنگ او خواهد داشت. گودل در سال ۱۹۲۴ برای تحصیل در رشته فیزیک وارد وین شد. علاقه او به رعایت دقت در کارهای علمی وی را از فیزیک به ریاضیات و سپس منطق ریاضی کشانید. او از درس های فورت ونگلر (Fort Wanger) درباره نظریه اعداد بسیار لذت می برد و علاقه خاصی به این مبحث پیدا کرد ، چنانکه بعدها آن را مورد استفاده قرار داد ، مثلا در ارتباط با کاربرد قضیه چینی برای بیان توابع بازگشتی بر حسب عمل جمع و ضرب. در سال ۱۹۲۶ رشته اش را به ریاضیات تغییر داد، وی تحصیلات دانشگاهی اش را قبل از تابستان ۱۹۲۹ به اتمام رسانید. در طول همین دوره در کلاسهای فلسفه هاینریش گومپرتس که پدرش به واسطه تحقیقات اش در زمینه فلسفه یونان شهرت داشت ، شرکت کرد. تقریبا در همین زمان بود که گودل چاپ نخست کتاب هیلبرت و آکرمان (۱۹۲۸) را که در آن تمامیت حساب محمولات با سور مقید صورتبندی شده و به عنوان مساله حل نشده طرح شده بود را مطالعه کرد.<sup>۱</sup> گودل در رساله دکتری خویش به سال ۱۹۳۰ به مساله تمامیت منطق می پردازد ، رساله ای که در آن هانس هان - یکی از اعضای دائم و تاثیر گذار حلقه وین - نقش استاد راهنمایی را بر عهده دارد. گودل توسط هان به حلقه وین که اطراف موریش شلیک جمع شده بودند معرفی می شود ، البته این مهم باز می گردد به سالهای 1926-30 و پس از این دوره تدریجا گودل از آنها فاصله گرفت اما نه چندان که دوستی ها شکسته شود و ارتباطاتشان گسسته گردد.<sup>۲</sup> علت این جدائی خواسته ! چه بود در جای خویش بررسی می شود ، هدف ما در اینجا ارائه تصویری از گودل است که بتوان با اتکای به این تصویر

مبانی اندیشه او و مساله اساسی او را عمیقا درک کرد که اگر در این امر موفق باشیم گودل و قضایای ناتمامیتش را می توان از انحصار در مرزهای ریاضیات صوری خارج ساخت. بازگردیم به سال ۱۹۳۰، گودل در رساله پایان نامه خویش از هرگونه تعبیر برای تمامیت منطق به روش های سازنده دوری جست و خاطر نشان ساخت که همین دوری جستن او را به تمامیت رهنمون کرد. او تاکید داشت که هیچ دلیلی برای محدود ساختن فرد به روش های برهانی سازنده وجود ندارد، مشخص است که پیکان حمله گودل در اینجا به سوی برآور نشانه رفته است. گرچه این بخش پایان نامه که حاوی چنین کنایه تند و تیزی بود در مرحله انتشار حذف شد، مشخص نیست که این امر به واسطه توصیه و اصرار هان رخ داده یا به واسطه پیش قدمی خود گودل! <sup>۳</sup> در هر صورت این کنایه چاپ نشده وجهی دیگر از اندیشه گودلی را برای ما مشخص می سازد و آن ضدیت با شهودگرایی در ریاضیات و فلسفه ریاضیات است. گرچه پاره ای از افراد از مقالات متاخر گودل بهره جسته و او را متمایل به اندیشه شهودگرایانه حداقل در اواخر عمرش معرفی می کنند، که در جایش به این بحث باز خواهیم پرداخت. در سال ۱۹۳۰ اتفاق دیگری هم رخ داد و آن ارائه اندیشه ناتمامیت بود. در دومین کنفرانس کونیگزبرگ با عنوان "معرفت شناسی و علوم دقیقه" که توسط موسسه

"Gesellschaft für empirische philosophie" سازماندهی شده بود، برای گودل نیز در این کنفرانس یک سخنرانی بیست دقیقه ای برای ارائه نتایج حاصل از تز پایان نامه اش در باب تمامیت دستگاه "حساب تابعی محدود شده درجه اول" در نظر گرفته شده بود. پایان نامه گودل موفقیت ای بزرگ برای برنامه هیلبرت به حساب می آمد چرا که او تمامیت منطق مرتبه اول را اثبات کرده بود. کمتر کسی انتظار داشت که در جلسه بعدی کنفرانس گودل در میانه بحث حاضران در کنفرانس و سخنرانان بسیار مشهور جلسه، ون نیومن به نمایندگی از مکتب صوری گرائی، هیتینگ به نمایندگی از مکتب شهودگرایی، کارنپ به نمایندگی از مکتب منطق گرائی و هان استادش به عنوان نظریه پرداز تز جدید تجربه گرایی در ریاضیات، ایده خام و اولیه ذهنی اش: گزاره درست صورا اثبات ناپذیرا در مخالفت با آرا سخنرانان جلسه مطرح و بنیان های این برنامه را با تزلزل روبه رو سازد. <sup>۴</sup> در جایی دیگر دوباره به این کنفرانس باز خواهیم گشت،

آنچه مهم است مشاهده تقابل گودل جوان - در آن روزها گودل ۲۵ ساله بود - با مشارب عمده فلسفه ریاضی و نمایندگان برجسته آنها می باشد. در اینجا داستان گودل و برنامه هیلبرت اما از همه جالب تر است ، که فاصله میان گودل حامی برنامه هیلبرت و گودل ویران گر برنامه هیلبرت کمتر از ۲۴ ساعت بود ، گودل از برنامه هیلبرت آغاز کرد و در آن به انتهایش رسید. در تلاش برای دنباله روی کردن از برنامه هیلبرت گودل در جستجوی یافتن تعبیری از آنالیز درون حساب بود تا با اثبات سازگاری حساب بتواند ثابت کند آنالیز نیز به طور نسبی سازگار است. در تلاش برای چنین کاری گودل دانست که مفهوم اثبات پذیری را می توان به طور حسابی تعریف کرد و این کشف او را به برهان ناتمامیت رسانید که به طور طعنه آمیزی برنامه هیلبرت را از اریکه قدرت برانداخت.<sup>۵</sup> در سال ۱۹۳۱ آنطور که همه می دانیم ریاضیات به مرزهای ناتمامی! رسید. در سال ۱۹۳۸ گودل در جواب به سوال هیلبرت در کنگره بین المللی سال ۱۹۰۰ ریاضیات که " آیا هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی ، هم عدد با مجموعه اعداد طبیعی یا هم عدد با مجموعه همه اعداد حقیقی است ؟ " - این سوال به فرضیه پیوستار مشهور است - نشان داد که جواب مثبت این سوال در نظریه اصل موضوعی تسرملو - فرانکل قابل رد کردن نیست. او همچنین نشان داد که اصل انتخاب نیز در این نظریه قابل رد شدن نیست . به عبارت دیگر او ثابت کرد که اگر نظریه مجموعه های تسرملو - فرانکل سازگار باشد با اضافه کردن فرضیه پیوستار یا اصل انتخاب سازگاری اش حفظ می شود.<sup>۶</sup> فرضیه پیوستار وجوه جذابی از اندیشه های گودل را به ما نشان می دهد که به زودی به آن می پردازیم مع هذا گودل در سال ۱۹۴۰ به آمریکا مهاجرت کرد او به پرینستون بازگشت و تا آخر عمر در همان جا باقی ماند. گودل در سال ۱۹۴۳ موفق شد که استقلال اصل موضوع انتخاب را در چراچوب نظریه ( متناهی ) انواع اثبات کند به نظر می رسید که بتوان به کمک این روش استقلال فرضیه پیوستار را هم ثابت کرد ، ولی گودل در این امر توفیق نیافت.<sup>۷</sup> بعد از سال ۱۹۴۳ که از اثبات نیمه دیگر فرضیه پیوستار - اینکه اضافه کردن نقیض نیمه اول نیز سازگاری نظریه مجموعه های تسرملو- فرانکل را حفظ می کند - مایوس شد به فلسفه و جهان شناسی روی آورد . از کارهای فلسفی که در این دوران از حیات فکری گودل می توان به نقد و شرح

"منطق ریاضی راسل" در ۱۹۴۴ و "فرضیه پیوستار چیست؟" در ۱۹۴۷ اشاره کرد. در این دو مقاله می توان موضع فلسفی گودل و دفاع و طرفداری او از افلاطون گرایی در ریاضیات را مشاهده کرد، البته نمی توان دیدگاه های پیچیده و پیشرفته گودل را در این دو مقاله را محصول سالهای حضور او در امریکا دانست چرا که گودل اعتقاد راسخی به افلاطون گرایی داشت حتی زمانی که با حلقه وین در ارتباط بود.<sup>۸</sup> برتراند راسل در جلد دوم از زندگی نامه خود نوشت اش نقل می کند که او معمولا به خانه انیشتین می رفته، هفته ای یک بار برای بحث کردن در مورد مسائل مورد علاقه اش با او، گودل و پایولی. راسل می گوید:

"این بحث ها مایوس کننده ای بودند، به این دلیل که با وجود تبعیدی و جهود بودن و به معنی بی جهان وطن بودن هر سه من در آنها تعصبی آلمانی به متافیزیک! می دیدم... علی الخصوص گودل که یک افلاطونی ناب! از کار درآمد. او اشکارا اعتقاد داشت که "نه" متعالی و ازلی در آسمان قرار گرفته آنجا که منطق دان پارسا می تواند به ملاقات آن امیدوار باشد."<sup>۹</sup> جدا از کنایه های همیشه تند و تیز راسل این قطعه زاویه دیگر از شخصیت علمی گودل را مشخص می کند. البته گودل جوابی به این کنایه های تند و تیز داده که در جای خویش ذکر می شود. اینجا به دو نقل قول از متن این دو مقاله مشهور می پردازیم گفتار بیشتر را به فصل سوم رساله وامی گذاریم. در "منطق ریاضی راسل" گودل می گوید: "... طبقات و مفاهیم را باید اشیای واقعی در نظر گرفت... همان گونه که اجسام فیزیکی وجود دارند آنها نیز وجود دارند."<sup>۱۰</sup> و در فرضیه پیوستار چیست می نویسد: "... علی رغم دوری از تجربه حسی... ما از اشیای نظریه مجموعه ها چیزی شبیه ادراک داریم... که اصول آن راستی شان را به ما تحمیل می کنند."<sup>۱۱</sup> در بین سالهای (۱۹۴۴ - ۱۹۵۱) علاقه عمیق و ریشه دار او به فلسفه نقش غالب را در فعالیت های فکری گودل ایفا می کرد. در طول این دوره، توجه بیشتر به زبان همگانه لایب نیز و ارتباط میان فلسفه کانت و نظریه نسبیّت معطوف بود. به خصوص به خاطر علاقه اش به فلسفه فضا و زمان کانت (و نه به دلیل گفتگوهای مکررش با انیشتین) از سال ۱۹۴۷ تا ۱۹۵۱ به مباحث فیزیک می پرداخت. گودل می اندیشید که تئوری نسبیّت انیشتین بر اید آلیسم دلالت دارد، بعلاوه اینکه تئوری نسبیّت برخی از ایده های کانت را مورد حمایت قرار می دهد.<sup>۱۲</sup> از این نکته علاقه کانتی گودل به



فیزیک را مشاهده می کنیم آیا گودل علاقه کانتی به حساب هم دارد؟ در بخش سوم رساله به این امر خاص می پردازیم. او معتقد است که دلایل قابل توجهی برای این حقیقت که "زمان غیر واقعی است" وجود دارد. یکی از استدلال هایش به زبان ساده این است: "اگر زمان و تغییر چیزی حقیقی است آنگاه بایستی چنین چیزی مانند یک مرور و گذران عینی وجود داشته باشد." که تئوری انیشتین این امکان را رد می کند. گودل به اعتراضات متنوعی که این استدلال بر می انگیزاند توجه داشت و در جواب به این اعتراضات کوشید کار تکنیکی مقاله (۱۹۵۱) با قوت بیشتر به سرانجام رساند. به نظر می رسد با استفاده از این کار تکنیکی سفر در زمان را امری ممکن می دانست!<sup>۱۳</sup> احتمالاً در اواخر همین دوره بود که گودل احساس کرد که فلسفه محتاج روشی است که کاملاً با روش علوم پایه متفاوت باشد. در نتیجه در سال ۱۹۵۹ به مطالعه آثار هوسرل پرداخت. ونگ می گوید که علاقه او به هوسرل برای مدت مدیدی دوام یافت. از سالهای ۱۹۷۱ تا ۱۹۷۳ گودل به شاگردش ونگ توصیه می کرد که به مطالعه آثار بعد از ۱۹۰۵ هوسرل پردازد.<sup>۱۴</sup> اینکه چرا گودل در سالهای پایانی به هوسرل رسید هرچند موضوع بسیار جذابی می تواند باشد اما در این رساله وانهاده می شود، در اینجا رساله تنها در پی نشان دادن و حجت آوردن برعلاقه بسیار عمیق گودل به فلسفه و تاثیرپذیری از آن است. در طول سالهای ۱۹۵۸ - ۱۹۷۷، گودل احتمالاً بخش اعظم انرژی خود را صرف ابداع نظام فلسفی خود کرد. علاقه او به فرضیه پیوستار، بدون تردید به دلیل انتشار اثر ۱۹۶۳ پال کوهن در اثبات استقلال فرضیه پیوستار از نو زنده شد. برای مثال در حدود اوائل سال ۱۹۷۰ دست نوشته ناتمامی از او دست به دست می گشت و از ۱۹۷۲ تا ۱۹۷۵ روی مقاله دیگری کار می کرد که هر دو درباب مساله پیوستار بودند.<sup>۱۵</sup> در اوائل سال ۱۹۶۷، او طی دو نامه مفصل به شاگردش ونگ ارتباط دیدگاه فلسفی خود را با آثارش در زمینه منطق تشریح کرد. در گفتگوهایش با ونگ اوقات زیادی را صرف تشریح فلسفه کلی خود برای او کرد، و در عین حال بنا بر اقوال ونگ همراه با این کار مشغول بررسی کاربردهای اولیه آن در چند مورد معین بود. در طول این گفتگوها ونگ یادداشت بر می داشت و آنها را پس از مبسوط و منظم به نظر او می رسانید. این یادداشت ها به ۳۰۰۰ صفحه بالغ می شوند.<sup>۱۶</sup> گودل در اواخر عمر به برهان وجود شناسانه اثبات خدا - طرح

شده توسط آنسلم قدیس و اصلاح شده توسط لایب نیز - پرداخت و سعی در پیرایش و مستدل ساختن آن با کمک گرفتن از منطق موجهات - که خود یکی از توسعه دهندگان این منطق بود - نمود.<sup>۱۷</sup>

در این رساله تلاش می کنیم که با تمرکز بر قضایای ناتمامیت از میان این خیل ابتکارات و کارهای متنوع، نگاهی نه صرفاً ریاضیاتی به آغاز و انجام و سرانجام این قضایا اندازیم. به نظر می رسد این حوزه های متنوع مورد علاقه گودل، آنچنان که در صفحات قبل مشاهده شد، حجت های لازم را برای پی گیری ریشه قضایا در نظریات متنوع فلسفی - ریاضیاتی فراهم آورد. البته در این باب می بایست از نظر دور نداشت که از پاره ای تدقیق های بیمار گونه در باب ریشه های اندیشه ناتمامیت در گودل دامن فرو گرفت. در این فصل به دنبال پاسخ به چند سوالم تا مساله ای را که گودل با آن روبه رو بود را آن طور که شایسته است درک و هضم کنیم. سوال این است که آیا اندیشه ناتمامیت به مثابه یک ابتکار که به ذهن گودل جوان رسید جز در برنامه های تحقیقی ریاضیاتی ریشه در هیچ ندارد؟ آیا نمی توان فرض گرفت علاقه آلمانی گودل به متافیزیک! و ضدیت با حلقه وین که گودل با آنها ارتباطات نزدیک داشته گودل را به سمت و سوی کشف چنین گزاره ای سوق داده؟ می دانیم که حلقه وین گزاره های اثبات ناپذیر را فاقد معنی - ارزش صدق و کذب - می دانست و تئوری معنی ی خود را بر این مبانی تدوین می کرد آیا گودل گزاره اثبات ناپذیر دارای ارزش معنی یی - صدق و کذب - را در مقاله ۱۹۳۱ ارائه نکرد؟ آیا این صرفاً یک اتفاق طناز! تاریخی است؟ برنامه هیلبرت در باب تهی کردن ریاضیات از محتوی و معنی و صوری کردن آن آیا طنین ضد افلاطونی و متافیزیکی ندارد؟ گذشته از اینکه ویتگنشتاین از دل همین برنامه و فراریاضیات افلاطون را بیرون می کشد آیا گودل در مقام ویران گر این برنامه - آنطور که خود این صفت را پسندیده - فارغ از هر انگیزه متافیزیکی یا حداقل معرفت شناختی بوده است؟ اصولاً یک ریاضیدان اگر دغدغه ای جز ریاضیات و بازی فاقد معنی ندارد چرا باید برنامه هیلبرتی را نپسندد؟ گودل به همان میزان که در ریاضیات ضد هیلبرتی بوده ضد شهودگرایی - حداقل در سالهای تدوین مقاله ۱۹۳۱ - بوده است پس نمی توان به این سوال جوابی داد که فرض می گیرد گودل نیز دغدغه های

شهودگرایانه داشته است. آیا می توان صورت گرای محض بود اما با کارهای علمی خویش مفهوم فربه ای مانند صدق را وارد جهان ریاضیات کرد؟ در این باب در رساله حاضر به تفضیل داد سخن خواهیم داد. در اینجا تنها با این سوالات می خواهیم به لایه های زیرین اندیشه گودل نفوذ کنیم. آیا می توان با کارهای صرفاً ریاضیاتی و با اهداف پاک و بی شائبه صوری مفهوم صدقی که در ذاتش تئوری مطابقی را نهفته دارد، به مثابه اسب تروی وارد ریاضیات و زبان های صوری کرد و همچنان از مرزهای متافیزیک دوری جست؟ آیا این یک خبط نابخشودنی از گودل بود یا یک ترفند برای فتح دژ تروی ریاضیات صوری ضد افلاطونی؟ همه می دانیم که رورتی با انگشت گذاشتن بر مفهوم صدق بر سر مکتب فلسفه تحلیلی - فرزند زبان های صوری - چه آورد. این نکته خود فربهی این مفهوم را می رساند و ورود آن را به زبان های صوری نقطه عطفی نه تنها در نظریه های منطقی - ریاضی بلکه در مشرب فلسفه تحلیلی معرفی می کند. ایستادگی کواین در مقابل ورود این مفهوم به مباحث فلسفه منطقی و به طبع آن ریاضیات عمق فاجعه ای که در انتظار تروی ریاضیات با ورود این اسب خوش خط و خال است را نشان می دهد.<sup>۱۸</sup> بعدها خواهیم دید که مفهوم فرا - فرار ریاضیات و نتیجه سمتیکی آن در نظر ویتگنشتاین چگونه تیشه بر ریشه انگیزه ضد متافیزیکی زبان های صوری می زند در حالی که افلاطون لبخند به لب در انتظار است. زبان اندکی به استعاره گرایید اما جای سوال است آیا این همه ناخودآگاه بود و گودل ناخواسته محل اتصال این چند مفهوم بنیان کن و مهار ناپذیر شده است؟ و .... می توان تا پایان این رساله خیلی از این گونه سوالات ترتیب داد که به نظر می رسد حتی اگر بی جواب بماند باز برکت خود را در ذهن می گذارند. اما می بایست یک گام پیش نهاد برای پاسخ به این سوالات باید پرسید و دید به دنبال این اولین سوال بود: مساله گودل در مقاله ۱۹۳۱ چه بود؟

می توان گودل را به چند گونه خواند و خوانشی از او ارائه داد. می توان او را ذیل برنامه هیلبرت و مساله سازگاری فهم کرد و همچنین می توان او را در سنت حلقه وینی مشاهده کرد و از این طریق او را به ویتگنشتاین متقدم رسانید. در اینجا بایستی دست به یک انتخاب زد، با علم به این نکته که هر کدام از این گزینه ها انتخاب شوند جواب ها به سوالات فوق الذکر رنگ بوئی

خاص به خود می پذیرند. در این رساله بر آنیم با روایت های موازی از گودل تحت این دو پارادایم دست به چنین انتخابی نزده و قضاوت را به خوانندگان متن واگذار کنیم

در قرن نوزدهم روش اصل موضوعی سنتی هندسه اقلیدسی به شاخه های دیگر ریاضیات نیز تعمیم داده شد. کشف هندسه های نااقلیدسی و بررسی دقیق نمایش اعداد حقیقی به عنوان نقاط روی خط ، اهمیت سازگاری نسبی و انواع اثباتهای آن را آشکار ساخت. این امر ، همراه با صوری شدن دقیق استنتاج منطقی ، این انگیزه را در هیلبرت پدید آورد که مساله اثبات سازگاری مطلق آنالیز کلاسیک را با استدلالی درباره همه اثباتهای ممکن در یک نظام اصل موضوعی که به طور صریح صورت بندی شده باشد ارائه کند. در هنگام شروع تحقیقات گودل ، یعنی مدت کوتاهی قبل از ۱۹۳۰ ، علاقه ریاضیدانان به پیشبرد این برنامه تحقیقاتی بسیار شدید بود.

در تابستان ۱۹۳۰ ، گودل به مطالعه مساله اثبات سازگاری آنالیز پرداخت. برای او ، این امر که هیلبرت می خواست سازگاری آنالیز را به وسیله روش های متناهی مستقیماً اثبات کند ، بسیار عجیب بود. او به طور کلی معتقد بود که دشواریها را باید به نحوی تجزیه و دسته بندی کرد که حل هر جزء از جزء بعدی ساده تر باشد. در این مورد معین ، او معتقد بود که باید نخست سازگاری نظریه اعداد را به وسیله نظریه متناهی اعداد اثبات کرد ، و آنگاه به کمک نظریه اعداد ، و به فرض صدق آن ، و نه فقط سازگاری آن ، به اثبات سازگاری آنالیز پرداخت. مساله ای که او در آن زمان برابر خود نهاد ، سازگاری نسبی آنالیز نسبت به نظریه اعداد مستقل بود.

او برای حل این مساله ، اعداد حقیقی را به وسیله فرمولهای نظریه اعداد ، یا در حقیقت به وسیله توابع گزاره ای این نظریه نشان داد و متوجه شد که باید برای جملات خود نظریه اعداد از مفهوم صدق استفاده کند ، تا بتواند صحت و سقم اصل موضوع تصریح را برای آنالیز تعیین کند. او به سرعت با یک سلسله پارادوکس ( به خصوص پارادوکس دروغ گو و ریچارد ) مواجه شد که به مفاهیم صدق و تعریف پذیری مربوط می شدند. گودل متوجه شد که صدق در نظریه اعداد ، در خود این نظریه قابل تعریف نیست و در نتیجه نقشه ای که برای اثبات سازگاری نسبی آنالیز کشیده بود درست از آب در نیامده است. اما او نتیجه لازمی را که باید می گرفت گرفت : اینکه