بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

روش عناصر مرزی برای حل مسائل مقدار مرزی شامل معادلات با مشتقات جزئی غیر متعارف

زیر نظر :

دکتر محمود محسنی

تهیه و تنظیم :

مهدی پناهی

خرداد ۱۳۷۲

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

بــه

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : مهدی پناهی

استاد راهنما: آقای دکترمحمود محسنی مقدم

داور ۱ : آقای دکتراصغر کرایه چیان

داور ۲ : آقای دکتریوسف بهرامپور

بسم الله الرحمن الرحیم

خداوند سبحان را پیوسته شکر می کنم که به این بندهٔ بی‌مقدارش عنایتی فرمود تا در ظل توجهاتش در راه کسب علم و دانش قدمی مثبت بردارم. امیدوارم آنچه را که آموخته‌ام در راه خیر و صلاح بشریت بکار گیرم.

حال که این پایان‌نامه به اتمام رسیده است وظیفهٔ خود می‌دانم ، از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محمود محسنی که در انجام این پایان‌نامه همواره از راهنماییهای بی‌شائبهٔ ایشان کمال بهره‌وری را داشته‌ام تشکر فراوان بنمایم. همچنین از مادر مهربانم و همهٔ برادران و خوهرانم که در طول تحصیل با صبر و حوصله مشکلات مرا مرتفع نموده و زحمتهای زیادی را متحمل شده‌اند سپاسگذاری می‌نمایم. از آقایان دکتر اصغر کرایه‌چیان و دکتر یوسف بهرامپور که زحمت مطالعه و بررسی این رساله را برخود هموار ساخته و در جلسهٔ دفاعیهٔ اینجانب شرکت نموده و راهنماییهای لازم را مبذول داشته‌اند ، تشکر و قدردانی می کنم. همچنین از کلیهٔ اساتید بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان که در ارشاد اینجانب نقش بسزایی داشته‌اند ، سپاسگذارم. در خاتمه از خانمها باقری و مانی که با حوصله و دقت زیاد تایپ کامپیوتری رساله را پذیرفته‌اند کمال امتنان را دارم.

مهدی پناهی

خرداد ۷۲

فهرست مطالب

عنوان

روش عناصر مرزی برای حل مسائل مقدار مرزی
شامل معادلات با مشتقات جزئی غیر متعارف

پیشگفتار

بعضی از مسائل معادلات با مشتقات جزئی وضعیت "غیر متعارف" دارند. وضعیت غیر متعارف این قبیل مسائل را بعداً با دقت بیشتری معرفی خواهیم کرد. در این مقاله سه روش برای حل عددی مسائل لاپلاس که در این وضعیت قرار دارند ارائه می‌کنیم. این روشها عبارتند از: روش مستقیم، روش کمترین مربعات و روش می‌نیمم‌سازی انرژی. در بکار گیری تمام این روشها از روش عناصر مرزی استفاده می‌شود. در پایان چند مسئله از طرق سه‌گانه فوق بصورت عددی حل شده و از مقایسه جوابهای بدست آمده با جواب تئوری نتیجه‌گیری می‌شود که روش می‌نیمم‌سازی انرژی نسبت به دو روش دیگر از دقت بیشتری برخوردار است.

مقدمه

مطالعه اصولی روشهایی که مربوط به مسائل "غیر متعارف" برای معادلات با مشتقات جزئی می‌شود، تقریباً بتازگی مطرح شده‌اند. اگر چه تأمل در مورد سئوالاتی مربوط به آنها به اواسط نیمه دوم قرن نوزدهم باز می‌گردد. بنظر بعضی از مؤلفین مسئله‌ای خوش وضع است که دارای یک جواب منحصر بفرد بوده بطوریکه این جواب یکتا بطور پیوسته به داده‌ها بستگی دارد. در غیر اینصورت مسئله با حالت غیرمتعارف خواهد بود. با بدوضعی بعضی از مسائل مانند دستگاه معادلات خطی نامساعد آشنایی داریم. در این نوع مسائل تغییر کوچکی در ضرایب دستگاه باعث تغییر بزرگی در جواب دستگاه می‌شود. در این مقاله یک مسئله بدوضع مقدار مرزی شامل معادلهٔ لاپلاس را معرفی می‌کنیم. در معادلهٔ لاپلاس (که حالت پایدار مسئله هدایت گرمایی را برای متغیرهای فیزیکی (مثلاً u) توصیف می‌کند) اگر یکی از مقادیر u یا $\partial u/\partial n$ در تمام نقاط روی مرز ناحیه مشخص باشد،

آنگاه u به طور یکتا در تمام نقاط درونی ناحیه مشخص خواهد شد. این دسته از مسائل با استفاده از روش تفاضلات متناهی، عناصر محدود و یا روش عناصر مرزی قابل حل هستند. اما در بسیاری موارد مشخص کردن شرایط مرزی در تمام نقاط روی مرز یک ناحیه میسر نیست. بعنوان مثال در مسائل انتقال حرارت هنگام اندازه‌گیری اطلاعات مرزی موانع زیادی که ناشی از شرایط آزمایشگاهی است ظهور می‌کند. وضعیت‌های فیزیکی ناحیهٔ مرزی ممکن است برای بکار گیری وسایل اندازه‌گیری نامناسب باشد و یا دقت اندازه‌گیری روی نقاط مرزی به دلیل وجود وسیله اندازه‌گیری بشدت افت کند. در مسائل عملی غالباً توابع u یا $\partial u/\partial n$ (که همان دما و جریان گرمایی هستند) را فقط می‌توان در قسمتی از مرز مشخص نمود و دربارهٔ قسمت باقیماندهٔ مرز هیچگونه اطلاعی را نمی‌توان بدست آورد. واضح است که این اطلاعات برای مشخص کردن تابع u در تمام نقاط درونی ناحیهٔ مورد نظر کافی نیست. در مسائل کاربردی مربوط به انتقال گرما به منظور افزایش اطلاعات می‌توان با استفاده از وسایل اندازه‌گیری مقدار u را در قسمتی از نقاط داخلی دامنهٔ مورد نظر که برای ما از اهمیت بیشتری برخوردار است تعیین نمود. بنابراین سئوالی که به ذهن خطور می‌کند این است که آیا با معلوم بودن u یا $\partial u/\partial n$ در قسمتی از نقاط مرزی و u در تعدادی نقاط داخلی دامنه ممکن است دمای پخش شده در ناحیهٔ دلخواه را بدست آورد؟

در این مقاله از روش عناصر مرزی برای حل عددی این دسته از مسائل استفاده می‌کنیم. این روش را می‌توان برای هر ناحیه‌ای (حتی نواحی که دارای شکل هندسی مشخصی نباشند) بکار برد. برای سهولت فرض می‌کنیم که ناحیهٔ مورد بحث ما بشکل مربع باشد. و همچنین فرض می‌کنیم که در سه ضلع از مرز ناحیهٔ مورد بحث یکی از مقادیر u یا $\partial u/\partial n$ مشخص است. علاوه بر این یکسری اطلاعات اضافی مربوط به یک خط مستقیم در درون ناحیه داده شده است.

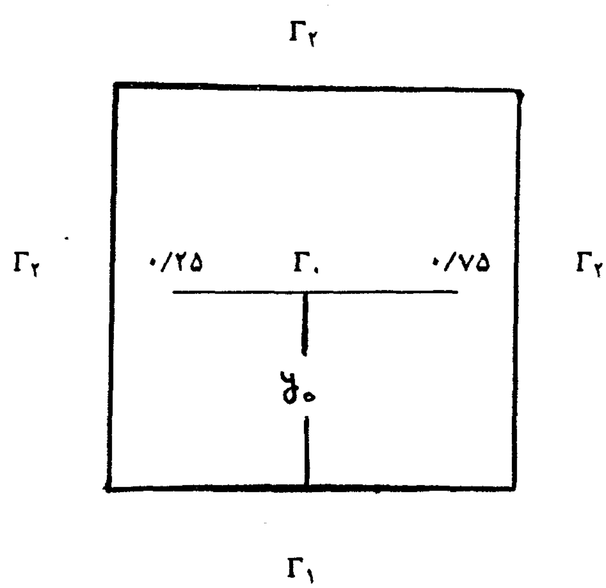
برای شرح چگونگی راه حل، مسئله زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید $\Gamma_{۰} = \{۰/۲۵ \le x \le ۰/۷۵,\ y = y_{۰}\}$، که $۰ < y_{۰} < ۱$ (شکل ۱). روی Ω مسئله هدایت

گرمایی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$
(1)\qquad
\begin{cases}
\Delta u = 0 & \text{در } \Omega \\
u(x,y) = \Phi(x,y)\ \ (\partial u/\partial n = \psi \ \ \text{یا}) & \text{برای } (x,y) \in \Gamma_2 \\
u(x,y) = g(x,y) & \text{برای } (x,y) \in \Gamma_0
\end{cases}
$$

می‌خواهیم مقادیر u را در هر نقطهٔ $(x,y) \in \bar{\Omega}$ $[\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega]$ محاسبه کنیم. نتایج برای چندین مسئله بفرم مسئله (۱) ارائه شده است.



(شکل ۱)

در فصل ۱ تعاریف و قضایای پیش‌نیاز برای مسائل مقدار مرزی آورده شده است. در فصل ۲ به بیان شرح چگونگی روش استاندارد عناصر مرزی برای حل عددی مسائل متعارف (خوش وضع) مقدار مرزی شامل معادله لاپلاس پرداخته‌ایم. فصل ۳ شامل توصیف روشهای متفاوت (روش مستقیم، روش کمترین مربعات و روش می‌نیمم‌سازی انرژی) برای حل مسئله غیرمتعارف (۱) با بکارگیری روش عناصر مرزی می‌باشد. در فصل ۴

نتایج عددی بدست آمده با استفاده از روشهای فوق را با جواب تئوری مسائل بفرم (۱) مقایسه کرده و به این نتیجه می‌رسیم که روش می‌نیمم‌سازی انرژی بهترین تقریب را می‌دهد. در فصل ضمیمه برنامه‌های کامپیوتری مورد استفاده برای حل عددی مسئله (۱) به هریک از روشهای مذکور آورده شده است.

فصل ۱

توابع توزیع و فضاهای سوبولف $H^m(\Omega)$

مسئله یافتن تابعی مانند u که در یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی بهمراه چند شرط مرزی صدق می کند را در نظر بگیرید. پاسخ به هر کدام از سئوالات زیر اهمیت ویژه‌ای دارد.

۱ - آیا این مسئله دارای جواب است؟

۲ - در صورت وجود جواب آیا این جواب یکتاست؟

۳ - این تابع تا چه حد هموار است؟

برای پاسخگویی به این سئوالات بایستی به خواص عملگرها پرداخت. در واقع به خواص عملگری مانند A (در این حالت خاص یک عملگر دیفرانسیل‌پذیر با مشتقات جزئی) از یک فضای تابعی مانند U به فضای دیگری مانند V می‌پردازیم. بنابراین برای شروع بایستی فضاهای مناسبی را برای U و V اختیار کرد. در اینجا ما با معادلات دیفرانسیل سروکار داریم. لذا فضاهای $C^m(\Omega)$ (فضای توابعی که مشتقات تا مرتبه mام آنها پیوسته است) به نظر مناسب می‌آیند. اما چون این فضاها (بجز در مورد $C(\Omega)$ همراه با نرم سوپریمم) کامل نیستند، محدودیتهای غیر ضروری را ایجاد می کنند. فضاهای سوبولف $H^m(\Omega)$ بدلایل زیر حالتی طبیعی را برای مسائل با مقدار مرزی فراهم می کنند.

الف) این فضاها کامل هستند

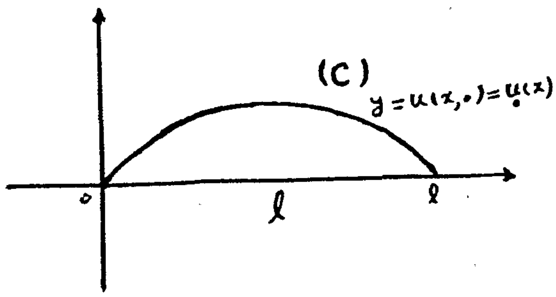
ب) امکان بدست آوردن نتایج کلی با در نظر گرفتن وجود و یکتایی جواب‌ها برای معادلات دیفرانسیل با بکار بردن این فضاها وجود دارد.

د) از همه مهمتر اینکه روشهای عددی به راحتی و بدرستی در فضاهای سوبولف با بعد متناهی فرموله می‌شوند.

برای توصیف فضاهای سوبولف پس از ذکر چند مسئله مقدار اولیه و مقدار مرزی ابتدا به معرفی توزیع‌ها می‌پردازیم.

۱.۱ - معرفی مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی

الف - ریسمان مرتجعی بطول l را در نظر گرفته، دو سر آنرا در دو نقطه ثابت نگهداشته و ریسمان را به شکل منحنی (c) درمی‌آوریم. و در لحظهٔ $t = 0$ آنرا رها می‌سازیم. (شکل ۱.۱.۱)



شکل (۱.۱.۱)

هر نقطه از ریسمان حرکت نوسانی خواهد داشت که اگر $u(x,t)$ فاصله نقطه بطول x در لحظهٔ t در نظر گرفته شود آنگاه $u(x,t)$ در معادلهٔ با مشتقات جزئی زیر صدق خواهد کرد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \ , \ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u'_0(x) \end{cases}$$

که در آن a مقدار ثابتی است که به عواملی چند بستگی دارد و $u'_0(x)$ ممکن است صفر یا غیر صفر باشد.

(($u'_0(x)$ سرعت اولیه ریسمان می‌باشد.)

ب - میله باریکی بطول l را در نظر می‌گیریم. اطراف آنرا عایق‌بندی نموده و دو سر آنرا در درجه حرارت صفر نگه می‌داریم. چنانچه درجه حرارت در هر نقطه از میله در لحظهٔ $t = 0$ از معادلهٔ $u(x,0) = u_0(x)$ بدست آید، در اثر انتقال حرارت هر نقطه از میله در لحظهٔ t دارای حرارتی می‌گردد که در معادلهٔ با مشتقات جزئی زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که در آن $u(x,t)$ درجه حرارت نقطهٔ بطول x از میله در لحظهٔ t فرض گردیده است. با توجه به مفروضات مسئله شرایط زیر را خواهیم داشت.

$$u(0,t) = 0 \ , \ u(l,t) = 0 \qquad \text{(شرایط مرزی)}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{(شرایط اولیه)}$$

ج - ایستایی (یکوضعی) توزیع درجه حرارت در یک جسم همگن.

فرض می‌کنیم جسم همگن با مساحت Ω موجود باشد. براحتی می‌توان نشان داد که درجه حرارت در نقاط مختلف جسم در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

اگر درجه حرارت بستگی به زمان نداشته باشد و فقط بستگی به مختصات نقطه داشته باشد، آنگاه $\partial u/\partial t = 0$ و در نتیجه درجه حرارت در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.1.1)$$

برای معین کردن مقدار درجه حرارت در داخل جسم لازم است مقدار درجه حرارت را بر روی مرز

$\Omega(\partial\Omega)$ بدانیم. بنابراین مسئله مقدار مرزی برای معادله (۱.۱.۱) بصورت زیر فرموله می‌شود:

تابع $u(x,y)$ را طوری بیابید که در ناحیهٔ Ω در معادلهٔ (۱.۱.۱) صدق کرده و در هر نقطه از مرز $\Omega(\partial\Omega)$ مقدار معینی را اختیار کند.

$$u\,\big|_{\partial\Omega} = \psi \tag{۱.۱.۲}$$

این مسئله موسوم به مسئله دیریکله یا اولین مسئله مقدار مرزی است.

چنانچه درجه حرارت روی مرز Ω نامعین بوده ولی جریان گرمایی در هر نقطه از $\partial\Omega$ موازی $\partial u/\partial n$ باشد، در آنصورت بجای مسئله مقدار مرزی فوق روی $\partial\Omega$ شرایط زیر را خواهیم داشت.

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,\bigg|_{\partial\Omega} = \psi^* \tag{۱.۱.۳}$$

مسئله یافتن جواب معادلهٔ (۱.۱.۱) که در شرایط مرزی (۱.۱.۳) صدق کند موسوم به مسئله نیومن یا دومین مسئله مقدار مرزی است.

مسئله‌های عنوان شده در فوق مثالهایی از مسئله‌های مقدار اولیه و مقدار مرزی هستند.

<u>تعریف</u> : علامت چند اندیسی

فرض کنید که $\mathbb{Z}_n^+$ نشان دهندهٔ مجموعهٔ همهٔ n تایی‌های غیر منفی و صحیح باشد. هر عضو $\mathbb{Z}_n^+$ را معمولاً با α و β نمایش می‌دهیم. مثلاً: $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$. هر مؤلفه α_i و β_i غیر منفی و صحیح است. تعریف می‌کنیم، $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ و D^α را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$$

که در آن $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

۱.۲ - توابع توزیع

برای معرفی توابع توزیع در آغاز فضایی از توابع خیلی هموار که توابع توزیع روی آنها عمل می‌کنند را معرفی می‌کنیم.

تعریف : توابعی با محمل فشرده

فرض کنید تابع f روی دامنهٔ $\Omega \subset R^n$ تعریف شده باشد. و فرض کنید که K زیر مجموعه‌ای از Ω باشد بطوریکه تابع f تنها به ازای $x \in K$ مقدار مخالف صفر را اختیار کند. همچنین فرض کنید که $\bar{K}$ بستار K باشد. در این صورت $\bar{K}$ را محمل تابع f می‌نامیم. اگر $\bar{K}$ زیرمجموعه بسته و کرانداری (فشرده‌ای) از Ω باشد آنگاه f را با محمل فشرده می‌نامیم. محمل f را بصورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\text{SUPP } f = \bar{K}.$$

مثال ۱.۲.۱ - تابع u را روی ناحیهٔ $\Omega = (-۱,۱)$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم. (شکل ۱.۲.۱)

$$u(x) = \begin{cases} \sin ۲\pi x & ۰ \leq |x| \leq ۱/۲ \\ ۰ & ۱/۲ \leq |x| < ۱ \end{cases}$$

آنگاه: $K = (-۱/۲,۰) \cup (۰,۱/۲)$ و $\bar{K} = [-۱/۲,۱/۲]$. چون $\bar{K}$ یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار از Ω است، نتیجه می‌گیریم که $u(x)$ دارای محمل فشرده روی Ω است.