دانشگاه گیلان

دانشکده‌ی علوم پایه

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد فیزیک (گرایش نظری)

نقش حل های فضای متقارن کروی در تصحیح نسبیت عام

از:

آمنه شکوری گیل‌چالان

استاد راهنما:

دکتر رضا صفاری

زمستان ۱۳۹۰

من ظاهر نیستی و هستی دانم

من باطن هر فراز و پستی دانم

با این‌همه از دانش خود شرمم باد

گر مرتبه‌ای ورای مستی دانم

هدیه‌ای به:

پدر و مادرم

که لطافت را در تمام سلول‌هایشان دارند

و روحی به لطافت پرِ آذرباد و به ملاحت ساز عِراقی

سپاس

در ابتدا از استاد راهنمای پایان‌نامه‌ام، آقای دکتر رضا صفاری به خاطر زحمات و راهنمایی‌های سازنده و ارزش‌مندشان تشکر و قدردانی می‌کنم.

از هیأت داوران این پایان‌نامه، آقایان دکتر پناهی و دکتر فرج‌الهی به‌خاطر زحمت خواندن این پایان‌نامه متشکرم. هم‌چنین از آقای دکتر مهدوی‌فر نماینده محترم تحصیلات تکمیلی به دلیل حضورشان تشکر می‌نمایم.

کلمات را توان بیان احساسم نسبت به پدر و مادرم نیست، زیرا که همیشه مهربانی بی‌پایان‌شان را نثارم کرده‌اند، از پشتبانی هایشان کمال تشکر را دارم.

فهرست مطالب

صفحه **عنوان**

فهرست شکل‌ها

چکیده:

نقش حل های فضای متقارن کروی در تصحیح نسبیت عام

آمنه شکوری گیل چالان

نظریه‌ی نسبیت عام آینشتاین نظریه یکی از قدرت‌مندترین نظریه‌ها در توصیف بسیاری از مشاهدات و داده‌های تجربی و هم‌چنین پیش‌بینی پدیده‌های کیهانی شناخته است. با این وجود ناکارآمد بودن این نظریه در توجیه برخی مشاهدات کیهان‌شناسی از جمله انبساط شتاب‌دار کیهان، انگیزه‌ی مطالعات به منظور بیان یک نظریه‌ی کامل‌تر را قوت بخشیده است. داده‌های مشاهداتی اخیر، این حقیقت را که کیهان شتاب‌دار است، آشکار می‌کند. راه‌های زیادی برای توصیف این شتاب وجود دارد. در میان آن‌ها، ساده‌ترین روش درنظرگرفتن یک ثابت کیهان-شناسی کوچک و مثبت در چارچوب نسبیت عام است. یک تعمیم از این اصلاح ساده‌ی نسبیت عام، شامل تئوری‌های گرانشی تصحیح یافته می‌شود که در آن‌ها، کنش توسط تابعی از اسکالر ریچی یعنی $f(R)$ توصیف می‌شود. این مدل‌های تصحیح یافته به طور نوعی فضای دوسیته را به عنوان یک جواب تصدیق می‌کنند. در این پایان‌نامه، معادلات میدان با استفاده از روی‌کرد لاگرانژین برای متریک متقارن کروی در گرانش تصحیح یافته‌ی $f(R)$ ارائه شده است و با استفاده از این معادلات جواب‌های سازگار فضای متقارن کروی برای کلی‌ترین اسکالر ریچی آمده است.

واژگان کلیدی: نسبیت عام، انبساط شتاب‌دار، ثابت کیهان‌شناسی، تئوری‌های گرانشی تصحیح یافته، اسکالر ریچی، فضای دوسیته، روی‌کرد لاگرانژین، متریک متقارن کروی.

Abstract:

Role of Spherically Symmetric Solutions in Modified General Relativity

Amane Shakoury Gill Chalan

Einstein's theory of General Relativity is known as one of the most elegant theories which has a notable success in interpreting many of cosmological observations and even predicting cosmological phenomena. However its insufficiency in explaining some observations such as accelerated expansion of the universe, has caused many attempts to generalize this theory in order to achieve a more complete and sufficient gravitational theory. Recent observational data imply that the current expansion of the universe is accelerating. There exist several description of this acceleration. Among them, the simplest one is the introduction of a small positive Cosmological Constant in the framework of general relativity. A generalization of this simple modification of general relativity consist in considering modified gravitational theories, in which the action is described by a function $f(R)$ of Ricci scalar R. Typically these modified models admit the de Sitter space as a solution. In this thesis, a Lagrangian approach derivation of the equation of motion for static spherically symmetric metrics in $f(R)$ modified gravity is presented and using these equations calculate the most general form of exact solution for Ricci scalar.

Keywords: General relativity, accelerating expansion, Cosmological Constant, modified gravitational theories, Ricci scalar, de Sitter space, Lagrangian approach, spherically symmetric metric.

مقدمه

حدود دو و نیم قرن قبل، نیوتن به‌گونه‌ای خاص نظم عالم را به تصویر کشید که به دیدگاه مکانیکی شهرت یافت. این دیدگاه جهان را به یک ماشین عظیم تشبیه می‌کند که کار آن براساس نظم و اصول خاصی است. اساس دیدگاه مکانیکی بر سه قانون استوار است که اثرات اجزای یک سیستم را به زبان ریاضی بیان می‌کنند. این سه قانون به قدری فیزیک قرن ۱۷ را متحول ساخت که کم‌کم فیزیک آن‌روز به فیزیک نیوتنی شهرت یافت. اساساً از همین ایام است که علمی به نام فیزیک نظری رسماً شکل می‌گیرد و به عنوان فیزیک کلاسیک موجودیت پیدا می‌کند.

علی‌رغم توانایی‌های بسیار بالای تئوری نیوتن، فیزیک‌دان‌های اواخر قرن ۱۹ متوجه شدند که این تئوری قادر به پاسخ‌گویی پاره‌ای از سوالات نیست. آن‌چه موجب پیدایش این اندیشه و رواج بعدی آن در در جامعه‌ی علمی شد ورود تئوری جدیدی به نام تئوری کوانتوم بود که پایه‌های آن را ماکس پلانک در سال ۱۹۰۰ میلادی پایه‌ریزی نمود. پنج سال بعد آلبرت آینشتاین تئوری دیگری به نام نسبیت خاص ارائه نمود که تفکر ما را در مورد دو مقوله‌ی فضا و زمان به‌کلی تغییر داد و گرانش نیوتنی را با چالش جدی روبه‌رو نمود. به نظر می‌رسید نسبیت خاص باید به‌گونه‌ای تعمیم داده شود تا بتواند چارچوب‌های غیراینرسی را نیز شامل شود. در سال ۱۹۰۷ آینشتاین هم‌ارزی بین گرانش و اینرسی را مطرح کرد و توانست با استفاده از آن پدیده‌ی انتقال به سرخ را پیش‌بینی کند. بالاخره در ۱۹۱۵ نظریه‌ی نسبیت عام را ارائه کرد که تعمیمی از نسبیت خاص بود و گرانش را نیز دربرداشت.

نظریه‌ی نسبیت عام استاندارد آینشتاین بدون شک یکی از معتبرترین و بااهمیت‌ترین نظریه‌هایی است که تاکنون مطرح شده است. این نظریه برای توصیف بسیاری از مشاهدات کیهان‌شناسی کارآمد بوده و می‌باشد. البته محدودیت‌هایی نیز داشته که دانشمندان را به فکر واداشته تا پیشنهاداتی برای اصلاح و تکامل این نظریه ارائه کنند.

در نسبیت عام استاندارد دانشمندان برای توجیه برخی مسائل از جمله انبساط شتاب‌دار کیهان در عصر حاضر، که از مشاهدات اخیر در کیهان‌شناسی مستقیماً اثبات می‌شود، و هم‌چنین تورم در جهان اولیه، مفاهیمی مانند انرژی تاریک و ماده‌ی تاریک را تعریف می‌کنند که بنابراین نظریه، این اجزاء حدود ۹۶ درصد از جهان را اشغال نموده‌اند، اگرچه تاکنون دلیل قطعی مبتنی بر مشاهدات مستقیم برای اثبات وجود این اجزاء در کیهان به‌دست نیامده است [۱]. حتی اگر بتوان در آینده بنابر بعضی فرضیات، ماده‌ی تاریک را برپایه‌ی وجود برخی ذرات ابرمتقارن پایدار مشاهده نمود، هنوز ۷۰ درصد کیهان که توسط انرژی تاریک اشغال شده است هم‌چنان مبهم و مورد سوال است. گروهی بر این اعتقادند که با اعمال تغییراتی در کنش گرانشی استاندارد می‌توان بسیاری از مسائل موجود را که نسبیت عام قادر به توجیه آن نیست به راحتی حل نمود. هم‌چنین اخیراً محاسبات بسیاری انجام شده است که نشان می‌دهد وقتی

تصحیحات کوانتومی و یا نظریه‌ی ریسمان در نظر گرفته شود، آن‌گاه کنش گرانشی کلاسیک نیز باید شامل مرتبه‌های بالاتری از اسکالر ریچی باشد.

تمام این موارد انگیزه‌ای است برای آن‌که افراد در جستجوی یک نظریه‌ی معادل گرانشی باشند که بتوانند بدون نیاز به وارد کردن مفاهیم خارجی مانند انرژی تاریک و ماده‌ی تاریک، جهان کنونی را توصیف کند و حتی در مورد پدیده-هایی مانند پیدایش جهان اولیه و یا تورم توجیهات بهتری ارائه کند. تاکنون نظریات متعددی در همین راستا مطرح شده است که از آن جمله می‌توان به نظریات اسکالر ـ تانسوری، فرمول‌بندی آینشتاین ـ کارتان، درنظرگرفتن برخی ابعاد اضافه و فرمالیسم پالاتینی اشاره کرد [۲]. در این میان نظریات تانسوری و از جمله گرانش $f(R)$ نیز در سال-های اخیر به نتایج جالب توجهی دست یافته‌اند که موضوع اصلی این پایان نامه نیز می‌باشد.

در این پایان نامه هدف اصلی بررسی نتایج مربوط به فضای متقارن کروی در روی‌کرد لاگرانژین است. که در آن متریک توصیف کننده‌ی فضا به‌گونه‌ای خاص تعریف شده و با در نظرگرفتن اسکالر ریچی به عنوان یک تابع عمومی، کنش محاسبه می‌شود و در نهایت آزمون مقیاس کهکشانی را برآورده خواهد کرد. محور اصلی این پایان‌نامه بر چهار فصل استوار است که به صورت زیر هستند:

در فصل اول مروری بر نسبیت عام خواهیم داشت و معادلات میدان را در گرانش آینشتاین به‌دست خواهیم آورد. در حقیقت این فصل به اساس نظریه‌ی نسبیت عام و آشنایی با روندهای مختلف معرفی نظریه به عنوان نظریه-ی جامع گرانش اشاره دارد و در بخش پایانی آن به‌طور خلاصه مشکلات موجود و عدم سازگاری مشاهدات با نظریه بررسی شده است. در فصل دوم به توصیف برخی از نظریه‌های جای‌گزین گرانش و هم‌چنین به پیشرفت و موفقیت این نظریه‌ها در زمان‌های گوناگون پرداخته می‌شود. از جمله در آن ساز و کار نظریه‌ی گرانش $f(R)$ در دو روی‌کرد متریک و پالاتینی مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل سوم توجه خود را به فضای متقارن کروی معطوف کرده و تعدادی از تحقیقات انجام شده در فضای متقارن کروی در گرانش $f(R)$ را معرفی می‌کنیم. در نهایت در فصل چهارم، جواب‌های فضای متقارن کروی را با استفاده از روی‌کرد لاگرانژین به‌دست آورده و سازگاری آن‌ها را با نتایج ارائه شده در فصل سوم مقایسه می‌کنیم.

فصل اول

نسبیت عام

۱ – ۱ مقدمه

با ارائه‌ی نظریه‌ی نسبیت عام توسط آلبرت آینشتاین [1] در سال ۱۹۱۵ میلادی، زمینه‌ی مساعد برای ارائه‌ی یک نظریه-ی کیهان‌شناسی محکم بر پایه‌ی اصول فیزیکی فراهم گشت. پیش از آن نظریه‌های مبهمی توسط فلاسفه و فیزیک-دان‌ها در مورد پیدایش و تحول کیهان ارائه شده بود، که به علت عدم برخورداری از پشتوانه‌های محکم نظری و تجربی، سست و غیرمطمئن بود. با کشف انبساط جهان توسط ادوین هابل [2]، در دهه‌ی ۱۹۲۰، و کشف زمینه‌ی ریزموج کیهانی در دهه‌ی ۱۹۶۰، کیهان‌شناسی وارد مرحله‌ی مشاهده‌ای نیز شد و نظریه و تجربه، پا به پای یک‌دیگر، در تکمیل کردن جورچین دانش کیهانی به جلو رفتند، تا جایی که در سال‌های اخیر، کیهان‌شناسی هم‌چون سایر شاخه‌های فیزیک و نجوم، با برخورداری از محک‌های دقیق تجربی، راه روشنی را در پیش گرفته است.

بررسی دقیق افت و خیزهای حرارتی در زمینه‌ی ریزموج کیهانی که نخستین نشانه‌ی تشکیل ساختار در کیهان می-باشد، امکان مطالعه‌ی دقیق رشد ناهمگنی‌ها و تشکیل ساختارهای اولیه را فراهم آورد. ارائه‌ی مدل تورم در سال ۱۹۸۱ و تکمیل آن در سال‌های بعد، منشأ کوانتومی این افت و خیزها را تا حدودی روشن ساخت. بررسی دقیق‌تر داده‌های کیهان‌شناسی نشان داد که برای رسیدن به یک تصویر سازگار از ساختارهای بزرگ کیهانی و نحوه‌ی تشکیل آن‌ها لازم است که مقادیر متنابهی انرژی و ماده به صورت انرژی و ماده‌ی تاریک در لابه‌لای کهکشان‌ها و ستارگان وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که ماده‌ی شناخته شده و قابل رؤیت تنها بخش کوچکی (در حدود ۴ درصد) از کل

[1] Albert Einstein
[2] Edvin Habel

ماده و انرژی کیهانی را به خود اختصاص می‌دهد! تحقیق در مورد ماهیت و ویژگی‌های ماده و انرژی تاریک، از مباحث داغ کیهان‌شناسی مدرن محسوب می‌شود. در این فصل ما به‌طور خلاصه، به معرفی نسبیت عام و به‌دست آوردن معادلات آن می‌پردازیم و کاربرد آن را در فضای متقارن کروی بررسی خواهیم کرد.

۱ – ۲ کلیاتی از نسبیت عام

آینشتاین در نظریه‌ی نسبیت خاص خود، مفهوم هم ارزی بین چارچوب‌های مرجع لخت مختلف را معرفی کرد. مراجع لخت چنانند که نسبت به یک‌دیگر حرکت یکنواخت داشته و تحت تأثیر نیروهای لخت قرار ندارند. بر طبق اصل هم‌وردایی، اگر قوانین فیزیک در چارچوب‌های مرجع لخت دل‌خواه، به‌طور صحیح بیان شوند، شکل ریاضی یکسانی را خواهند داشت. آنالیز تانسوری، ابزار مناسبی برای فرمول‌بندی اصل هم‌وردایی آینشتاین است.

تقریباً یک دهه بعد از معرفی نظریه‌ی نسبیت خاص در سال ۱۹۰۵، آینشتاین موفق شد گرانش را به مثابه‌ی انحراف‌هایی از فضازمان تخت معرفی کند. او اصل هم‌وردایی را به دستگاه‌های غیرلخت تعمیم داد و به‌طور موفقیت آمیزی گرانش را به‌عنوان انحنای فضازمان توضیح داد. آینشتاین در اصل هم ارزی ضعیف، بیان کرد که میدان گرانشی در یک چارچوب مرجعی که در حال سقوط آزاد است، به طور موضعی غایب است. چنین سیستمی در مقیاس‌های کوچک از یک دستگاه لخت غیرقابل تشخیص است. سپس این ایده، به اصل هم‌ارزی قوی توسعه داده شد: در یک سیستمی که در حال سقوط آزاد است، تمام قوانین فیزیکی، به‌طور موضعی دارای شکل نسبیت خاصِ خود می‌باشند.

۱ – ۳ معادلات میدان گرانشی آینشتاین

آینشتاین در سال ۱۹۱۵، معادله‌ی تانسوری زیر را به عنوان قانون گرانش معرفی کرد [۱] :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (۱.۱)$$

که در آن، G ثابت گرانشی نیوتن می‌باشد. این معادله به‌طور موفقیت‌آمیزی چگونگی تأثیر ماده بر هندسه‌ی فضازمان را توصیف می‌کند.

در غیاب ماده، $T_{\mu\nu} = 0$ است، بنابراین $G_{\mu\nu} = 0$ خواهد شد. رد گرفتن از رابطه‌ی (۱.۱) ، در چنین حالتی خواهد داد:

$$R^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\mu} R = 0 \Rightarrow R = 0 \tag{۱.۲}$$

یادآوری می‌کنیم که $R^{\mu}_{\mu} = R$ و $g^{\mu}_{\mu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$. بنابراین معادله‌ی آینشتاین در خلأ به‌صورت رابطه‌ی زیر ساده می‌شود

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{۱.۳}$$

توجه به این نکته ضروری است که معادله‌ی (۱.۳) الزاماً به این معنی نیست که فضازمان تخت می‌باشد، چرا که ممکن است هنوز تانسور ریمان صفر نباشد. علی‌رغم شکل ساده‌ی آن، معادله‌ی (۱.۳)، شامل ده معادله دیفرانسیل جزئی برای مؤلفه‌های تانسور متقارن $g_{\mu\nu}$ است. تنها در فضازمان‌های با درجه‌ی تقارن بالا، جواب‌های دقیق برای معادلات آینشتاین شناخته شده است. این موضوع حتی برای معادله‌ی خلأ (۱.۳) نیز صادق است.

معادلات آینشتاین با قانون هم‌وردای پایستگی انرژی و اندازه‌حرکت سازگار هستند:

$$D_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \tag{۱.۴}$$

معادله‌ی میدان آینشتاین دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) هر دو طرف معادله تانسورهای متقارن مرتبه‌ی دوم هستند که تحت تبدیلات عام مختصات هم‌وردا می‌باشند.
۲) واگرایی‌های هم‌وردای هر دو طرف صفر می‌باشند.
۳) معادلات میدان برای مؤلفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ به معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم منجر خواهند شد.
۴) در یک فضازمان تخت $T_{\mu\nu}$ صفر می‌شود اما عکس این موضوع الزاماً درست نیست.
۵) می‌توان نشان داد که در یک میدان گرانشی ضعیف، معادله‌ی آینشتاین، معادله‌ی پواسون را نتیجه می‌دهد.

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \tag{۱.۵}$$

که

$$\phi \cong -(1 + g_{00}) \frac{c^2}{2}. \tag{۱.۶}$$

شکل هم‌وردای قانون پایستگی انرژی و اندازه حرکت به‌صورت زیر است

$$D_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \tag{۱.۷}$$

این قانون پایستگی می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\sqrt{-g}\,(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})\right]=0. \tag{۱.۸}$$

که $t^{\mu\nu}$ شبه تانسور انرژی - اندازه‌حرکت میدان گرانشی است. $t^{\mu\nu}$ به شکلی تعریف‌می‌شود که رابطه‌ی (۱.۸)، با معادلات میدان آینشتاین سازگار باقی بماند. باید تأکید کرد که $t^{\mu\nu}$ تانسور نیست و در واقع می‌تواند با استفاده از یک سیستم مختصات مناسب، که در این مختصات داریم: $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ و $\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}=0$، به‌طور موضعی تبدیل شود. اگر بخواهیم دقیق‌تر شویم، در نسبیت عام کمیتی مانند انرژی، که به‌طور موضعی پایسته و به‌طور عمومی هم-وردا باشد وجود ندارد. با این وجود، برای یک سیستم جای‌گزیده مانند ستاره، می‌توان یک مقدار کلی به انرژی یا جرم سیستم که شامل هر دو قسمت ماده و گرانشی است، نسبت داد.

۱ – ٤ کاربرد معادلات نسبیت عام در فضای متقارن کروی

در تمام بخش‌های علم فیزیک و ریاضی، یک هدف مشترک وجود دارد و آن جستجو برای یافتن نگرشی جامع است که جواب‌های دقیق معادلات اساسی را با حل دقیق و جزئیات به‌دست آورد. این هدف، به ویژه در نظریه‌های غیرخطی دشوار است و رویکرد معمول شامل درنظر گرفتن یک تقارن خاص و سپس جستجو برای یافتن جواب-های این تقارن است.یکی از جواب‌های مربوط به تقارن کروی نسبیت عام، حل مجانبی شوارتزشیلد [1] است که مربوط به توصیف یک جسم منزوی می‌باشد.

۱ – ٤ – ۱ متریک شوارتزشیلد

متریک شوارتزشیلد یکی از اولین جواب‌های دقیق رابطه‌ی (۱.۳) برای فضازمان دارای تقارن کروی است. می‌توان نشان داد که عمومی‌ترین متریک دارای تقارن کروی و ایستا با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$ds^2=-B(r)c^2dt^2+A(r)dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2, \tag{۱.۹}$$

که $A(r)$ و $B(r)$ دو تابع مجهول از مختصه‌ی شعاعی r هستند. به منظور یافتن این توابع در مورد خلأ $T^{\mu}_{\nu}=0$، ابتدا باید نمادهای کریستوفل $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ را محاسبه می‌کنیم.

[1] Schwarzschild

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(-\partial_{\rho}g_{\alpha\beta}+\partial_{\alpha}g_{\rho\beta}+\partial_{\beta}g_{\rho\alpha}\right) \tag{۱.۱۰}$$

عناصر غیرصفر برای این متریک عبارت‌است از:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{r}_{rr}=\frac{A'}{2A^{2}},\\
&\Gamma^{r}_{\theta\theta}=-\frac{r}{A},\\
&\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}_{\theta r}=\Gamma^{\phi}_{r\phi}=\Gamma^{\phi}_{\phi r}=\frac{1}{r},\\
&\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^{r}_{\phi\phi}=-\frac{r\sin^{2}\theta}{A},\\
&\Gamma^{r}_{tt}=\frac{B'}{2A},\\
&\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}=\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}=\cot\theta,\\
&\Gamma^{t}_{tr}=\Gamma^{t}_{rt}=\frac{B'}{2B}.
\end{aligned}$$

که علامت پرایم، مشتق نسبت به r را نشان می‌دهد.

برای تانسور ریچی داریم:

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}-\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} \tag{۱.۱۱}$$

همچنین عناصر غیرصفر تانسور ریچی چنین خواهند بود:

$$R_{tt}=\frac{-B''}{2A}+\frac{(B')^{2}}{4AB}+\frac{B'A'}{4A^{2}}-\frac{B'}{rA}, \tag{۱.۱۲}$$

$$R_{rr}=\frac{B''}{2B}-\frac{(B')^{2}}{4B^{2}}-\frac{B'A'}{4AB}-\frac{A'}{rA}, \tag{۱.۱۳}$$

$$R_{\theta\theta}=\frac{rB'}{2AB}-\frac{rA'}{2A^{2}}-1+\frac{1}{A}, \tag{۱.۱۴}$$

و با استفاده از معادله‌ی (۱.۳) داریم:

$$R_{\theta\theta} = R_{\phi\phi}, \tag{۱.۱۵}$$

همه‌ی این مؤلفه‌ها در خلأ باید صفر شوند. در ضمن استفاده از رابطه‌ی زیر مفید خواهد بود:

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = 0, \tag{۱.۱۶}$$

که به

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \Rightarrow A(r)B(r) = \text{ثابت} \tag{۱.۱۷}$$

منجر می‌شود. با فرض این‌که فضازمان در فاصله‌های بزرگ تخت می‌شود، خواهیم داشت: $A = B \to 1$، زمانی که

$$A(r)B(r) = 1, \tag{۱.۱۸}$$

از $R_{\theta\theta} = 0$ و رابطه‌ی (۱.۱۵) خواهیم داشت:

$$-1 + B(r) + r\frac{dB(r)}{dr} = 0, \tag{۱.۱۹}$$

که به جواب زیر منجر می‌شود:

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = 1 + \frac{c_0}{r}. \tag{۱.۲۰}$$

در این‌جا c_0 ثابتی است که با $\frac{-2GM}{c^2}$ برابر است و M جرم کل جسم مرکزی است. این مقدار برای c_0 از مقایسه‌ی حد میدان ضعیف معادله‌ی آینشتاین با معادله‌ی پواسون $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ به‌دست آمده است. می‌توان نشان داد که در میدان گرانشی ضعیف، $g_{00} = -1 - 2\phi/c^2$ است که ϕ پتانسیل گرانشی نیوتن می‌باشد. بنابراین، جواب کروی معادلات خلأ آینشتاین می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{c^2 r})c^2 dt^2 + (1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{۱.۲۱}$$

که به عنوان متریک شوارتزشیلد خلأ شناخته می‌شود. کمیت $\frac{2GM}{c^2}$ بُعد طول داشته و شعاع شوارتزشیلد نامیده می‌شود.

تبدیلاتِ

$$\tilde{x} = \tilde{r}\cos\phi\sin\theta,$$
$$\tilde{y} = \tilde{r}\sin\phi\sin\theta,$$
$$\tilde{z} = \tilde{r}\cos\theta.$$

متریک شوارتزشیلد را به شکل

$$ds^2 = \left(\frac{1-\mathrm{M}/2\tilde{r}}{1+\mathrm{M}/2\tilde{r}}\right)^2 c^2dt^2 + (1+\mathrm{M}/2\tilde{r})^4(d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2). \qquad (۱.۲۲)$$

در می‌آورد که به عنوان شکل همسانگرد متریک شوارتزشیلد شناخته می‌شود. از آن‌جایی که متریک شوارتزشیلد عمومی‌ترین جواب دارای تقارن کروی برای معادلات میدان خلأ می‌باشد، پس باید برای فضازمان درونی یک پوسته‌ی کروی خالی نیز کاربرد داشته باشد. اما از آن‌جایی که متریک در این حالت بایستی فاقد تکینگی در $r = 0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که فضازمان داخل پوسته‌ی کروی جرم‌دار یک فضازمان تخت (مینکوفسکی) خواهد بود.

۱ – ٤ – ۲ متریک رایسنر – نوردشتروم[۱]

در فیزیک و کیهان‌شناسی، متریک رایسنر ـ نوردشتروم، یک جواب ایستا برای معادلات میدان ماکسول ـ آینشتاین[۲] است که به یک جسم باردار غیرچرخشی به جرم M در فضای متقارن کروی مربوط می‌شود. این متریک توسط هانس رایسنر[۳] و گونار نوردشتروم[۴] ارائه شد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$c^2d\tau^2 = (1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2})c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}} - r^2d\Omega^2, \qquad (۱.۲۳)$$

که در آن، τ زمان ویژه (زمانی که توسط ساعتِ در حالِ حرکت همراه با ذره اندازه‌گیری می‌شود) برحسب ثانیه، c سرعت نور برحسب متر بر ثانیه، t مختصه‌ی زمانی (که توسط یک ساعت از ابتدا ساکن اندازه‌گیری می‌شود)، و r مختصه‌ی شعاعی (محیط یک دایره‌ی متمرکز روی ستاره تقسیم بر 2π است) برحسب متر است. $d\Omega^2$ عبارت است از:

[1] Reissner–Nordström metric
[2] Einstein-Maxwell field equations
[3] Hans Reissner
[4] Gunnar Nordström

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

r_s شعاع شوارتزشیلد برای یک جسم جرم‌دار است که با جرم رابطه‌ی زیر را دارد:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (۱.۲۴)$$

و در آن G ثابت گرانش است. r_Q یک مقیاس از طول است که به بار الکتریکی جسم وابسته است:

$$r_Q = \frac{Q^2 G}{4\pi\varepsilon_0 c^4}. \quad (۱.۲۵)$$

و $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ثابت نیروی کولمب [1] است. در صورتی‌که بار Q و یا به تناسب آن، مقیاس طول r_Q به صفر میل کند، متریک مربوطه، به متریک شوارتزشیلد کاهش پیدا می‌کند. در صورتی‌که نسبت $\frac{r_s}{r}$ به صفر میل کند، به تئوری نیوتنی کلاسیک گرانش دست می‌یابیم. در این حد، متریک مینکوفسکیِ نسبیت خاص به‌دست می‌آید:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (۱.۲۶)$$

در عمل، نسبتِ $\frac{r_s}{r}$ بسیار کوچک است. برای مثال، شعاع شوارتزشیلدِ r_s زمین تقریباً ۹ میلی‌متر است، که از ماهواره‌ای با شعاع حدوداً ۴۲۱۶۴ کیلومتر، چهار بیلیون بار کوچک‌تر است. تنها در حوالی سیاه‌چاله‌ها و دیگر اجرام چگال همانند ستاره‌های نوترونی است که این کسر مقدار قابل توجهی دارد.

۱ – ٤ – ۳ کاربرد نسبیت عام در حرکت‌های مداری

از آن‌جایی‌که معادله ژئودزیک را در حالت کلی به صورت زیر داریم:

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0 \quad (۱.۲۷)$$

[1] Coulomb's force constant

با استفاده از متریک شوارتزشیلد و مؤلفه‌های متناظر $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$، می‌توانیم معادله‌ی ژئودزیک را به‌صورت زیر بسط دهیم:

$$\frac{d^2r}{dl^2}+\frac{A'}{2A}(\frac{dr}{dl})^2-\frac{r}{A}(\frac{d\phi}{dl})^2+\frac{B'}{2A}(\frac{dt}{dl})^2=0, \tag{۱.۲۸}$$

$$\frac{d^2\phi}{dl^2}+\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dl}\frac{dr}{dl}=0, \tag{۱.۲۹}$$

$$\frac{d^2t}{dl^2}+\frac{B'}{B}\frac{dt}{dl}\frac{dr}{dl}=0, \tag{۱.۳۰}$$

که در آن، $A=-(1-2GM/c^2r)$ و $B=(1-2GM/c^2r)^{-1}$ است. توجه داشته باشید که فرض بر این است که مدار به سطح $\theta=\frac{\pi}{2}$ محدود شده است. با استفاده از رابطه‌ی (۱.۲۸) می‌توانیم نشان دهیم که $J=r^2\frac{d\phi}{dl}$ ثابت حرکت است (یعنی $\frac{dJ}{dl}=0$). همچنین از رابطه‌ی (۱.۲۵) می‌توان نشان داد که

$$E=-\left[\frac{1}{B}(\frac{dr}{dl})^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B}\right], \tag{۱.۳۱}$$

ثابت دیگری از حرکت است. J و E به‌ترتیب مشابه اندازه‌حرکت زاویه‌ای و انرژی واحد جرم در مسأله‌ی نیروی مرکزی نیوتنی هستند. برای مدارهای سیاره‌ای داریم

$$E\simeq 1-\frac{2}{c^2}E_N, \tag{۱.۳۲}$$

و

$$J\simeq\frac{1}{c}(1-\frac{E_N}{c^2})J_N, \tag{۱.۳۳}$$

که E_N و J_N به‌ترتیب انرژی و اندازه‌حرکت واحد جرم هستند. به منظور پیدا کردن شکل مدارها ما به معادله دیفرانسیلی برای $r(\phi)$ احتیاج خواهیم داشت. با استفاده از معادلات (۱.۲۶) تا (۱.۳۰) می‌توان نشان داد که رابطه‌ی زیر برای $u=\frac{1}{r}$ برقرار خواهد بود:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{GME}{c^2J^2}+(\frac{3GM}{c^2})u^2, \tag{۱.۳۴}$$