تقدیم به پدر و مادر عزیزم

ای دو سرمایه گرانبهای زندگیم که تمام هستی وجودم حاصل تلاش، محبت ودلجویی شماست، هرچه دارم و هر آنچه را که به دست خواهم آورد مدیون زحمات، الطاف بی دریغ، راهنمای ها، دعای خیر و نگاه های امید بخش و با صفایتان هستم.

سر تعظیم در مقابل فدا کاریهایتان فرود می‌آورم.

سپاسگزاری:

از استاد بزرگوار و گرامی ام، جناب دکتر علی آبکار که راهنمایی این پروژه را با وجود همه مصروفیت ها و مشغولیت ها به عهده گرفتند . و در طول تحقیق و نوشتن این پایان نامه از هیچ نوع کمک و همکاری با بنده دریغ نورزیدند. از اعماق قلب سپاس گزاری می‌نمایم. لازم می‌دانم از همه ی اساتید و عوامل که در جریان تحصیل و عبور از مقطع کارشناسی ارشد(ماستری) با من درس داشتند و کار کردند قدر دانی کنم.

همچنین از استاد مشاورم جناب دکتر عزیزاله عزیزی صمیمانه تشکر می‌کنم که با نظرات سودمند و سازنده ی شان بر غنامندی این پایان نامه افزودند. به همین گونه از جناب دکتر عبدالرحن رازانی متشکرم که داروری پایان نامه بنده را پذیرفتند و به جلسه دفاع اینجانب تشریف آوردند. همچنان ازجناب دکتر اسماعیل امیری نماینده محترم تحصیلات تکمیلی نیز سپاسگزارم که با حضور خویش بر زینت این جلسه افزودند.

سرانجام، از تمام دوستانی که مرا در اتمام این پروژه یاری کردند سپاسگزاری می‌کنم.

چکیده

فرض کنید A و B دو زیر مجموعه ناتهی فضای متریک (X,d) باشند. می‌دانیم که معادله تابعی $Tx \equiv x$ که در آن $T:A \to B$ یک ناخود نگاشت داده شده است، لزوماً جواب ندارد. پس در این حالت سعی می‌کنیم که یک جواب تقریبی xرا بیابیم به طوری‌که $d(x,Tx)$ مینیمم باشد. قضایای بهترین نقطه ی نزدینی شرایط کافی را برای وجود یک جواب تقریبی x فراهم می‌نمایند که آن را بهترین نقطه ی نزدینی ناخود نگاشت T می‌نامند؛ این جواب در شرط $d(x,Tx)=dist(A,B)$ صدق می‌کند.

در این پایان نامه به بررسی وجود و یکتایی بهترین نقاط نزدینی برای رده هایی از نگاشت ها موسوم به ناخود نگاشت های انقباضی نوع میر – کیلر و نگاشت های تقریباً $(\varphi,\theta)-$ انقباضی می‌پردازیم. همچنین قضیه نقطه ثابت را برای این رده از نگاشت های ذکر شده مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم که قضیه اصلی این پایان نامه برخی نتایج پیشین در باره دیگر رده ها را تعمیم می‌دهد.

عنوان **فهرست** صفحه

عنوان	فهرست	صفحه

وزارت علوم، تحقیقات وفناوری

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

نتایجی در باب بهترین نقاط نزدینی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز

عنایت اله عنایت

استاد راهنما

دکتر علی آبکار

استاد مشاور

دکتر عزیزاله عزیزی

مهر ۱۳۹۲

فصل اول

تعاریف اولیه وپیش نیازها

در این فصل برخی از تعاریف و نتایج را که درفصول بعدی مورد نیاز خواهند بود، بیان می کنیم.

۱-۱ فضاهای متریک

در این بخش به تعریف فضای متریک و برخی از مفاهیم وابسته به آن پرداخته و بعضی از نتایج مربوطه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱- فرض کنیم X مجموعه ای دلخواه باشد. تابع $d:X\times X\to\mathbb{R}$ را یک متر روی X می نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

(الف) به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)\geq 0$؛

(ب) به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)=0$ فقط و فقط وقتی که $x=y$؛

(پ) به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(x,y)=d(y,x)$؛

(ت) به ازای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (نابرابری مثلثی[۱]).

درصورتی که d یک متر روی X باشد، (X,d) را یک فضای متریک[۲] می نامیم.

مثال ۱-۱-۲- مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با مترحاصل از قدرمطلق، فضای متریک می باشند. این متر به صورت زیرتعریف می شود

۱Trangle inequality

۲ Metrc space

$$d(x,y)=\left|x-y\right|.$$

مثال ۱-۱-۳ - روی $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ متر d_p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_p(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^p)^{\frac{1}{p}}, x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...y_n)\in\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n).$$

اگر **p=۲**، آنگاه این متر را متر اقلیدسی یا متر استاندرد می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۴- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $\phi\neq Y\subseteq X$. اگر d را به $Y\times Y$ تحدید کنیم، کلیه شرایط متر حفظ می شود. این متر تعریف شده روی Y را متر القایی و فضای $(Y,d_{|Y\times Y})$ را زیرفضای القایی X می‌نامیم. متر القایی روی Y را با d نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۵- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. برای $x\in X$ و $r>0$، گوی باز[۱] یا همسایگی باز[۲] به مرکز[۳] x و شعاع[۴] r، که با نماد $N_r(x)$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$N_r(x)=\left\{y\middle|y\in X,d(x,y)<r\right\}.$$

۱ Open ball

۲ Open neighborood

۳ Center

۴ Radius

همچنین گوی بسته[۱] یا همسایگی بسته[۲] به مرکز x و شعاع r با نماد $N_r\left[x\right]$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$N_r\left[x\right]=\left\{y\middle|y\in X,d(x,y)\le r\right\}.$$

تعریف۱-۱-۶- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$. نقطه $x\in A$ را یک نقطه درونی A[۳] نامیم هرگاه عددی مانند $r_0>0$ موجود باشد به قسمی که $N_{r_0}(x)\subseteq A$. مجموعه نقاط درونی A را درون A نامیده و با $\operatorname{int}(A)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $A\subseteq \operatorname{int}(A)$ ، آنگاه مجموعه A را یک مجموعه باز[۴] می‌نامیم.

مثال۱-۱-۷- در هر فضای متریک (X,d)، مجموعه های X,ϕ و هر گوی باز، مجموعه هایی باز هستند.

تعریف۱-۱-۸- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$. نقطه $x\in X$ را یک نقطه چسبیده[۵] برای A نامیم هرگاه به ازای هر $r>0$ داشته باشیم $N_r(x)\cap A\neq\phi$.

مجموعه نقاط چسبیده A را بستار A[۶] نامیده و با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $\overline{A}\subseteq A$،

---

۱ Closed ball

۲ Closed neighborhood

۳ Interior point

۴ Open set

۵ Cluster point

۶ Closure

آنگاه مجموعه A را یک مجموعه بسته[۱] می‌نامیم.

مثال ۱-۱-۹- در هر فضای متریک (X,d)، مجموعه های X,ϕ و هر گوی بسته، مجموعه هایی بسته هستند.

قضیه ۱-۱-۱۰- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$. در این صورت A بسته است فقط و فقط وقتی که A^c باز باشد.

اثبات به [۲] رجوع شود. □

تعریف ۱-۱-۱۱- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $\phi\neq A,\ B\subseteq X$. فاصله A و B را با نماد $dist(A,B)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dist(A,B)=\inf\left\{d(a,b)\middle| a\in A,b\in B\right\}$$

برای هر $x\in X$ فاصله $dist(\{x\},A)$ را با نماد $d(x,A)$ نشان می‌دهیم.

همچنین مجموعه های A_0 و B_0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$A_0=\{a\in A\,|\,d(a,b)=d(A,B)$ ،به ازای یک $b\in B\}$;

$B_0=\{b\in B\,|\,d(a,b)=d(A,B)$ ،به ازای یک $a\in A\}$.

۱ Closed set

تعریف۱-۱-۱۲- فرض کنیم X یک مجموعه باشد. هرتابع بر $\mathbb{N}$ به توی X یک دنباله در X نامیده می‌شود. مقدار این تابع درنقطه $n\in\mathbb{N}$ را با x_n نمایش می‌دهیم و خود دنباله را با نماد $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یا به اختصار با $\{x_n\}$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۱۳- فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله ای درآن باشد.گوییم دنباله $\{x_n\}$ به نقطه $x\in X$ همگراست و می‌نویسیم $x_n\to x$ یا $\lim x_n = x$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $N\in\mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی‌که به ازای هر $n\geq N$ داشته باشیم $d(x_n,x)<\varepsilon$. درغیر این صورت دنباله را واگرا می‌نامیم.

توجه کنیدکه حد هر دنباله درصورت وجود منحصر به فرد است.

قضیه۱-۱-۱۴- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$ در این صورت $x\in\overline{A}$ فقط و فقط وقتی که دنباله ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود باشد به قسمی که $x_n\to x$.

اثبات به [۲] رجو ع شود. □

تعریف۱-۱-۱۵- فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله ای در فضای متریک (X,d) باشد. دنباله $\{x_n\}$ را کوشی نامند. هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $N\in\mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $m,n>N$ داشته باشیم $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

هردنباله همگرا دنباله ای کوشی است اما عکس آن لزوماً برقرار نمی باشد.

مثال ۱-۱-۱۶- دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$را در فضای $X = \left(0,1\right[$ با متر اقلیدسی القایی در نظر می‌گیریم. چون این دنباله در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همگراست پس در $\mathbb{R}$ کوشی و لذا در X نیزکوشی است. اما این دنباله در X همگرا نیست چون حد هر دنباله درصورت وجود منحصر بفرد و 0 در X نیست.

تعریف ۱-۱-۱۷- فضای متریک (X,d)را تام یا کامل می‌نامیم هرگاه هردنباله کوشی درآن همگرا باشد.

مثال ۱-۱-۱۸- فضای متریک $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی کامل است اما با توجه به مثال ۱۶.۱.۱ فضای $\left(0,1\right[$ با متر اقلیدسی القایی کامل نیست. این مثال همچنین نشان می‌دهدکه هر زیر فضای یک فضای کامل لزوماً کامل نیست. درقضیه زیر شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آنها هر زیرفضای یک فضای کامل، کامل باشد.

قضیه ۱-۱-۱۹- فرض کنیم (X,d) یک فضای کامل باشد. در این صورت زیر فضای (Y,d) از (X,d) کامل است فقط و فقط اگر Y در X بسته باشد.

اثبات به [۲] رجوع شود. □

تعریف۱-۱-۲۰- فرض کنیم X یک مجموعه و $T:X\to X$ یک نگاشت باشد. نقطه ی $x_0\in X$ را یک نقطه ی ثابت[۱] T می‌نامیم هرگاه $Tx_0=x_0$.

قضیه۱-۱-۲۱- (اصل انقباض باناخ[۲]) فرض کنیم (X,d) یک فضای کامل باشد و $T:X\to X$ یک نگاشت با خاصیت زیر باشد;

عدد $\alpha\in(0,1)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty)\le\alpha d(x,y).$$

در این صورت T دقیقاً یک نقطه ثابت دارد.

تعریف۱-۱-۲۲- فرض کنیم X یک مجموعه، $A\subseteq X$ و $T:A\to X$ یک نگاشت باشد. T را نا خود نگاشت[۳] می‌نامیم هرگاه $T(A)\bigcap A=\phi$ و اگر $T(A)\bigcap A\neq\phi$ ، آنگاه T را خود نگاشت[۴] می‌نامیم. اگر T نا خود نگاشت باشد، آنگاه T نقطه ثابت ندارد.

تعریف۱-۱-۲۳- فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تابعی باشد که دریک همسایگی محذوف a تعریف شده است. گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

۱ Fixed point

۲ Banach contraction priniple

۳ Non self mapping

۴ Self mapping

هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر x اگر

$$0<d_1(x,a)<\delta$$

آنگاه

$$d_2\big(f(x),l\big)<\varepsilon.$$

تعریف۱-۱-۲۴- فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. f را در نقطه a پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. تابع f را پیوسته نامیم هرگاه درهر نقطه ازدامنه اش پیوسته باشد. اگر f در a پوسته نباشد، f را در a ناپیوسته می‌نامیم.

قضیه۱-۱-۲۵- فرض کنیم $f(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت f در a پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که $x_n\to a$ داشته باشیم $f(x_n)\to f(a)$.

اثبات به [۲] رجوع شود. □

قضیه۱-۱-۲۶- فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر مجموعه باز مانند H در Y مجموعه $f^{-1}(H)$ در X باز باشد.

اثبات به [۲] رجوع شود. □

تعریف۱-۱-۲۷- فرض کنیم A یک مجموعه باشد. خانواده $\left\{A_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش[۱] برای A نامیده می شود هرگاه $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$.

فرض کنیم $\left\{A_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای مجموعه A باشد و $J\subseteq I$. در این صورت $\left\{A_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ را زیر پوشش[۲] $\left\{A_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ می‌نامیم هرگاه $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$. این زیر پوشش را زیر پوشش متناهی[۳] گوییم هرگاه J مجموعه ای متناهی باشد.

اگر (X,d) یک فضای متریک باشد و $A\subseteq X$، آنگاه پوشش $\left\{G_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ برای A را یک پوشش باز نامیم هرگاه هر عضو این خانواده زیر مجموعه ای باز از X باشد.

تعریف۱-۱-۲۸- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $K\subseteq X$. مجموعه K را فشرده[۴] نامیم هرگاه هر پوشش باز آن زیر پوششی متناهی داشته باشد. درغیر این صورت K را غیر فشرده می نامیم.

مثال۱-۱-۲۹- در هر فضای متریک (X,d) هر مجموعه متناهی مانند $K=\left\{x_1,\dots,x_n\right\}$ فشرده است.

قضیه۱-۱-۳۰- فرض کنیم $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تابعی پیوسته و $K\subseteq X$ مجموعه ای فشرده باشد. در این صورت $f(K)$ در Y فشرده است.

---

۱ Covering

۲ Sub covering

۳ Finite subcovering

۴ Compact

اثبات به [۲] رجوع شود. □

قضیه۱-۱-۳۱- فرض کنیم $f:(X,d)\to(\mathbb{R},|.|)$ تابعی پیوسته و K زیر مجموعه ای فشرده از X باشد. در این صورت f روی K مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را می‌پذیرد.

اثبات به [۲] رجوع شود. □

قضیه۱-۱-۳۲- فرض کنیم K زیرمجموعه ای فشرده از فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت K فاصله خود تا هر x_0را می‌پذیرد. به عبارت دیگر xی در K هست که

$$d(x_0,K)=d(x_0,x).$$

اثبات به [۲] رجوع شود. □

۱-۲- دنباله ها و سری های عددی

در این بخش به معرفی و بررسی برخی خواص مقدماتی دنباله ها و سری ها در اعداد حقیقی می‌پردازیم.

در این بخش، همواره اعداد حقیقی و زیر فضاهای آن را با متر اقلیدسی حاصل از قدر مطلق درنظرمی‌گیریم.

تعریف ۱-۲-۱- اگر $\{x_n\}$ یک دنباله ای ازاعداد حقیقی باشد و $x_n \to x$ به طوری که به ازای هر $n \geq 1$ داشته باشیم، $x_n \geq x$ آنگاه می نویسیم $x_n \to x^+$ و اگر هر $x_n \leq x$ می نویسیم $x_n \to x^-$.

تعریف ۱-۲-۲- دنباله $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی را صعودی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $x_{n+1} \geq x_n$ و آن را نزولی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $x_{n+1} \leq x_n$.

قضیه ۱-۲-۳- (الف) اگر $\{x_n\}$ دنباله ای صعودی و کراندار باشد آنگاه $x_n \to \sup_{n\geq 1} x_n$

(ب) اگر $\{x_n\}$ دنباله ای نزولی و کراندار باشد آنگاه $x_n \to \inf_{n\geq 1} x_n$.

اثبات به [۳] رجوع شود. □

تعریف ۱-۲-۴- به هردنباله مفروض $\{x_n\}$ یک دنباله $\{s_n\}$ با ضابطهٔ

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n$$

متناظر می‌شود که آن را دنباله مجموعهای جزئی s_n می‌نامیم. اگر دنباله s_n همگرا به S باشد، آنگاه S را مقدار یا مجموع سری می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S .$$

هرسری که همگرا نباشد را واگرا می‌نامیم.

مثال ۱-۲-۵- اگر $0<x<1$، آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ به $\frac{1}{1-x}$ همگراست و اگر $x\geq 1$، آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ واگراست.

قضیه ۱-۲-۶- (محک کوشی) سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست فقط و فقط وقتی که به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی صحیحی مانند N موجود باشد به طوری که اگر $m\geq n\geq N$، آنگاه

$$\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right|\leq \varepsilon .$$

قضیه بعدی شرایطی لازم برای همگرایی یک سری ارئه می‌دهد.

قضیه ۱-۲-۷- هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرا باشد، آنگاه $x_n \to 0$.

اثبات به [۱] رجوع شود. □

۱-۳- توابع حقیقی

در این بخش برخی تعاریف و نتایج درمورد توابع حقیقی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۱- فرض کنیم $I\subseteq \mathbb{R}$ و $f: I\to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت می‌گوییم f بر I صعودی یا غیر نزولی است هرگاه $x,y\in I$ و $x<y$ نامساوی $f(x)\leq f(y)$ را

ایجاب کند. اگر جهت آخرین نامساوی را عوض کنیم، تعریف تابع نرولی یا غیرصعودی را خواهیم داشت. رده توابع یکنوا از تابع های صعودی و تابع های نزولی تشکیل شده است.

تعریف۱-۳-۲- فرض کیم $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد و $c\in\left(a,b\right]$. اگر وقتی که با مقدارهای بزرگتر از c، $x\to c$ داشته باشیم $f(x)\to A$، می‌گوییم A حدراست f در c است، و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=A.$$

حد راست A را با نماد $f(c^+)$ نیز نشان می دهیم. این مطلب با ε و δ بدین معنی است که به ازای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ی هست به قسمی که هرگاه $c<x<c+\delta<b$ ، آنگاه $\left|f(x)-f(c^+)\right|<\varepsilon$. اگر f در c تعریف شده باشد و $f\left(c^+\right)=f(c)$ ، می‌گوییم که از راست در c پیوسته است.

اگر $c\in\left(a,b\right]$، حدهای چپ و پیوستگی از چپ در c را می‌توان به صورتی مشابه تعریف کرد. هرگاه $c\in(a,b)$، آنگاه f در c فقط و فقط وقتی پیوسته است که

$$f(c)=f(c^+)=f(c^-).$$

قضیه۱-۳-۳- هرگاه f بر $\left[a,b\right]$ صعودی باشد، آنگاه به ازای هر c در (a,b)، $f(c^+)$ و $f(c^-)$ هردو وجود دارند و