دانشگاه ارومیه
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در گرایش جبر

عنوان

مدول‌هایی با G- بعد صفر روی حلقه‌های موضعی از عمق دو

دانشجو:
سید محمد آذربرا

استاد راهنما:
دکتر رضا سزیده

مهر ۹۱

بنام بخشایشگر مهربان

نبوده‌ام و خلوت وجودم بخشیده‌ای، خفته بودم و نعمت بیداری‌ام عطا کرده‌ای، تشنه بودم و آب حیاتم چشانده‌ای، متفرق بودم و کسوت جمعم پوشانده‌ای، شکرت که در جوانی‌ام شکسته شدم چراکه پیری خود شکستگی است.

در ابتدا بر خودم لازم می‌دانم از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سزیده در تدوین این پایان‌نامه کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم و مطمئنا بنده برای داشتن چنین استادی تا آخر عمر بر خودم خواهم بالید. همچنین از زحمات جناب دکتر جانفدا، جناب دکتر آقالاری و جناب دکتر رضایی که افتخار شاگردی‌شان را در کلاس‌های درس داشته‌ام قدردانی می‌نمایم. همچنین از تمامی اساتید محترم گروه ریاضی دانشکده علوم دانشگاه ارومیه که در رشد علمی بنده سهیم بوده‌اند نیز مزید امتنان را دارم.

تقدیم به سه تن از عزیزانم

روح پدر و مادر بزرگم

و

همسرم، بهترین سرمایه زندگی ام

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی موضعی نوتری باشد. رسته‌ی R-مدول‌های متناهی مولد را با $\mathrm{mod}\, R$ نشان می‌دهیم و زیررسته‌پر[۱] از $\mathrm{mod}\, R$ شامل تمام R-مدول‌های با G-بعد صفر را با $\mathcal{G}(R)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم R یک حلقه هنسلین[۲] و غیرگورنشتین[۳] باشد و فرض کنیم که یک R-مدول غیرآزاد در $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ موجود باشد. با این شرایط، اگر R دارای عمق[۴] حداکثر یک باشد آنگاه $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ در $\mathrm{mod}\, R$ متناهی‌پادورد نیست (رسته‌ی R-مدول‌هایی با G-بعد صفر یک زیررسته پادوردمتناهی در رسته مدول‌های متناهی‌مولد [۵] برای نوع خاصی از حلقه‌های موضعی نیست [۵]). در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم گزاره‌های مشابهی زمانی که عمق R دو است برقرار است.

[۱] Full subcategory

[۲] Henselian

[۳] non-Gornestein

[۴] Depth

[۵] Finite generated

مقدمه

در سرتاسر این پایان‌نامه فرض خواهیم کرد که تمام حلقه‌ها، حلقه‌های نوتری جابجایی و تمام مدول‌ها، مدول‌های متناهی مولد هستند. اوسلندر [6][2] ناوردایی همولوژی[7] را برای مدول‌ها معرفی کرده است که بعد گورنشتین[8] و یا به‌طور خلاصه G-بعد گفته می‌شود. این ناوردایی دارای خصوصیات مشابه زیادی با بعدهای پروژکتیو است. برای مثال طبق قضیه‌ی اوسلندر-بوخبام-سر[9] می‌دانیم که متناهی بودن بعد پروژکتیو یک خاصیت منظم از حلقه‌های پایه‌ای را مشخص می‌کند: هر مدول روی حلقه موضعی منظم دارای بعد پروژکتیو متناهی است و یک حلقه موضعی که میدان رده مانده ای آن دارای بعد پروژکتیو متناهی باشد منظم است. متناهی بودن G-بعد، خاصیت گورنشتین از حلقه پایه را مشخص می‌کند. در سرتاسر یک حلقه موضعی گورنشتین یک مدول دارای G-بعد صفر است اگر و تنها اگر یک مدول کوهن ماکولی ماکسیمال[10] باشد. بنابراین طبیعی است که انتظار داشته باشیم مدول‌هایی با G-بعد صفر روی یک حلقه موضعی دلخواه، رفتاری مشابه با مدول های کوهن-ماکولی ماکسیمال روی یک حلقه موضعی گورنشتین داشته باشند. یک حلقه کوهن-ماکولی را از نوع نمایش‌متناهی[11] می‌نامیم هرگاه دارای تعدادی متناهی مدول‌های کوهن-ماکولی ماکسیمال تجزیه ناپذیر غیریکریخت باشد. تحت اندکی مفروضات حلقه‌های موضعی گورنشتین، از حلقه های کوهن-ماکولی از نوع نمایش متناهی کاملا طبقه‌بندی می‌شوند و تمام مدول‌های کوهن-ماکولی ماکسیمال تجزیه ناپذیر[12] غیریکریخت روی آن‌ها به طور مشخص مطالعه شده‌اند. (برای جزئیات بیشتر [13] را ببینید.) لذا ما علاقه‌مندیم تا حلقه ی موضعی غیرگورنشتین که دارای تعداد متناهی مدول‌های تجزیه ناپذیر غیریکریخت از G-بعد صفر هستند را مطالعه کنیم و بخصوص تمام مدول‌های تجزیه‌ناپذیر غیریکریخت روی چنین حلقه‌هایی را تعیین کنیم.

---

[6] Auslander

[7] Homological invariant

[8] Gorenstein Dimension

[9] Auslander-Buchbaum-Serre

[10] Maximal Cohen-Macaulay

[11] Finite presentation

[12] Decomposable

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه از جبر جابجایی و همولوژی

۱.۱ یادآوری های ابتدایی

در این فصل تمام حلقه‌ها، حلقه‌های جابجایی و یکدار هستند مگر این که خلاف آن بیان شود.

مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول را با $\operatorname{Spec} R$ نمایش می‌دهیم و مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال را با $\operatorname{Max} R$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه ایده‌آل های اول، از حلقه R یک فضای توپولوژیکی به نام توپولوژی زاریسکی[۱] تشکیل می‌دهد که یک پل ارتباطی میان جبر و توپولوژی ایجاد می‌کند. در [[۶]، پیوست A.۳] به طور مفصل در این مورد بحث شده است.

قضیه ۱.۱.۱. *هر حلقه $R \neq 0$ حداقل دارای یک ایده‌آل ماکسیمال است.*

اثبات. به [[۶]، قضیه ۱.۳] مراجعه شود. □

نتیجه ۲.۱.۱. اگر $\mathfrak{a} \neq (1)$ یک ایده‌آل از R باشد، آنگاه ایده‌آل ماکسیمالی از R شامل $\mathfrak{a}$ وجود دارد.

نتیجه ۳.۱.۱. هر عنصر غیریکه R مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال است.

نکته ۴.۱.۱. ۱- اگر A نوتری باشد با استفاده از لم زورن، مجموعه‌ی $\{I \mid I \neq (1) , I$ یک ایده‌آل $\}$ دارای یک عنصر ماکسیمال است.

---

[۱] Zariski

۲- حلقه هایی وجود دارد که تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارند. برای مثال میدان‌ها چنین اند. حلقه R را که شامل تنها یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد را یک **حلقه موضعی** می‌نامیم. میدان $k = \dfrac{R}{\mathfrak{m}}$ را میدان مانده های R می‌نامیم.

قضیه ۵.۱.۱. *۱- فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\mathfrak{m} \neq (1)$ یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد بطوریکه هر $x \in R \setminus \mathfrak{m}$ یک عضو یکه در R باشد. در این صورت R یک حلقه موضعی است و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال آن است؛*

۲- فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال آن باشد. بطوریکه هر عنصر از $1 + \mathfrak{m}$ (یعنی هر $1 + x$ که $x \in \mathfrak{m}$) در R یکه باشد. در این صورت R حلقه ای موضعی است.

اثبات. به [[۶]، قضیه ۱.۵] مراجعه شود. □

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه‌ی N متشکل از تمام عناصر پوچتوان در حلقه‌ی R یک ایده‌آل است. مجموعه N را **رادیکال پوچ** [۲] R می‌نامیم.

قضیه ۷.۱.۱. *رادیکال پوچ R اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول از R است.*

اثبات. به [[۱]، قضیه ۱.۸] مراجعه شود.

□

تعریف ۸.۱.۱. **ژاکوبسن رادیکال**[۳] R را با نماد $J(R)$ نشان داده و بصورت اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال از R تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۱. (*بعد کرول*[۴]) **بعد کرول** حلقه R را با $\dim R$ نمایش می‌دهیم و آن را سوپریمم $n \in \mathbb{N}_0$ هایی در زنجیر $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ در نظر می‌گیریم که هر $\mathfrak{p}_i$ متعلق به $\operatorname{spec} R$ می‌باشد، در واقع این زنجیر، یک زنجیر از ایده‌آل های اول است. دقت می‌کنیم که در زنجیر بالا دقیقا n شمول محض وجود دارد و برای $n = 0$ فقط $\mathfrak{p}_0$ را بدون هیچ شمولی داریم.

---

[۲] Nil radical

[۳] Jacobsen Radical

[۴] Krull

تعریف ۱۰.۱.۱. یک حلقه با تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال را یک **حلقه شبه-موضعی** [۵] می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. ۱- یک زیر مجموعه $S \subset R$ را ضربی یا **زیرمجموعه بسته ی ضربی** می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

آ- $1 \in S$

ب- $a \in S, b \in S \Rightarrow ab \in S$

۲- فرض کنیم $S \subset R$ یک زیر مجموعه بسته ضربی باشد. **موضعی سازی** [۶] یا حلقه کسرهای $S^{-1}R$ از R نسبت به S را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^{-1}R := \{\frac{a}{b} \mid a \in R, b \in S\}$$

که $\frac{a}{b}$ اشاره به رده های هم ارزی $(a,b) \in R \times S$ می‌نماید که رابطه هم ارزی آن بصورت زیر است.

$$(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow \exists s \in S \ : \ s(ab' - a'b) = 0$$

نمادگذاری ۱. حلقه های موضعی را با نماد $(R, \mathfrak{m})$ و یا $(R, \mathfrak{m}, k)$ نشان می‌دهیم که $k = \frac{R}{\mathfrak{m}}$.

نکته ۱۲.۱.۱. ۱- $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R یک زیرمجموعه بسته ضربی است. موضعی سازی R نسبت به $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ را با $R_{\mathfrak{p}}$ نشان داده و داریم

$$\frac{R}{\mathfrak{p}} := R_{\mathfrak{p}} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in R, b \notin \mathfrak{p}\}$$

این عمل را موضعی سازی R در $\mathfrak{p}$ می‌نامیم.

مجموعه ی $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathfrak{p}, b \neq \mathfrak{p}\}$ بوضوح یک ایده‌آل در $R_{\mathfrak{p}}$ است. در هر عنصر

[۵] Semi-local

[۶] Localization

$\frac{a}{b} \in R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ داریم $a \neq \mathfrak{p}$، بنابراین $\frac{b}{a} \in R_{\mathfrak{p}}$ و لذا $\frac{a}{b}$ یکه است. و این نشان می‌دهد $R_{\mathfrak{p}}$ یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ است [[۶]، قضیه ۱.۴.۳].

در واقع اگر $\mathfrak{m} \subset R$ یک ایده‌آل ماکسیمال باشد $R_{\mathfrak{m}}$ حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ می‌باشد.

۲- مجموعه ی S متشکل از تمام عناصری از R که مقسوم علیه صفر نیستند، تشکیل یک مجموعه بسته ضربی می‌دهند. برای این S،

$$S^{-1}R \;:=\; Q(R) =: Qout(R)$$

را **حلقه کسرهای کلی** از R می‌نامیم. اگر R حوزه صحیح باشد، در این صورت این را میدان کسرهای R می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. ۱- فرض کنیم M یک R-مدول باشد و $N \subset M$ یک زیرمدول باشد. **مدول خارج قسمتی یا مانده ای** $\frac{M}{N}$ را توسط

$$\frac{M}{N} := \{m + N \mid m \in M\}$$

تعریف می‌کنیم.

یعنی $\frac{M}{N}$ مجموعه ای از رده های هم ارزی عناصر M است که هم ارزی دو عنصر m, n بصورت $m - n \in N$ می‌باشد. رده هم ارزی را با $m + N$ و یا با $[m]$ نشان می‌دهیم. هر عنصر در رده $m + N$ را یک نماینده می‌نامیم.

۲- فرض کنیم $\varphi \; : \; M \longrightarrow N$ یک همریختی R-مدولی باشد. در این صورت $\operatorname{coker}(\varphi) := \frac{N}{\operatorname{Im}(\varphi)}$ را **هم‌هسته** [۷] φمی‌نامیم.

[۷] cokernel

تعریف ۱۴.۱.۱. ۱- فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **زیرمدول تابی** [۸] $\mathrm{Tors}(M)$ را بصورت

$$\mathrm{Tors}(M) = \{m \in M \mid \exists\, a \in A;\ am = 0, \text{مقسوم علیه صفر نیست } a\}$$

مدول M را **آزاد از تاب** نامیم هرگاه $\mathrm{Tors}(M) = 0$. همچنین این مدول را تابدار نامیم هر گاه $\mathrm{Tors}(M) = M$؛

۲- فرض کنیم $N, P \subset M$ دو زیرمدول باشند در این صورت خارج قسمت $(N : P)$ را بصورت

$$(N : P) := (N :_R P) := \{r \in R \mid rP \subset N\}$$

توجه داریم که مدول خارج قسمتی تعمیم ایده آل های خارج قسمتی است؛

۳- نوع دیگری از خارج قسمت ها نیز موجود است. فرض کنیم $I \subset R$ یک ایده‌آل باشد در این صورت خارج قسمت P از I در M را بصورت $(P :_M I) := \{m \in M \mid I.m \subset P\}$ تعریف می‌کنیم؛

۴- فرض کنیم M_i ها که $i \in I$ مدول باشند، جمع مستقیم $\bigoplus_{i\in I} M_i$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i, m_i \neq 0, \text{برای i های متناهی}\}$$

ضرب مستقیم $\prod_{i\in I}$ توسط $\prod_{i\in I} = \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i\}$ تعریف می شود.

برای یک مجموعه اندیس گذار متناهی $I = \{1, \cdots, n\}$ جمع مستقیم و ضرب مستقیم بر هم منطبق می شوند و با نماد $M_1 \bigoplus \cdots \bigoplus M_n$ نمایش می دهیم.

۵- فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مدول M را آزاد می‌نامیم هرگاه $M \cong \bigoplus_{i\in I} R$. عدد اصلی مجموعه اندیس گذار I را مرتبه ی M می‌نامیم. زیرمجموعه $S \subset M$ را پایه[۹] M نامیم هرگاه هر

[۸] Torsion submodule

[۹] Base

$m \in M$ را بتوان بصورت منحصربفرد بصورت ترکیب خطی متناهی $m = r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n$ نوشت که $m_i \in S$ و $r_i \in R$ برای چند n (وابسته به m).

می دانیم که اگر R یک میدان باشد، مدول ها، همان فضاهای برداری می شوند. در این حالت همواره این مطلب که هر مدول آزاد است، درست نمی باشد. (برای مثال $\mathbb{Z}$-مدول $\frac{\mathbb{Z}}{(2)}$ را در نظر بگیرید).

بعبارتی دقیق تر یک مدول M که $\mathrm{Tors}(M) \neq 0$ نمی تواند آزاد باشد. [[۶]، تمرین ۲.۱.۹].

لم ۱۵.۱.۱. *۱- جمع زیر مدول های یک R-مدول، ضرب یک ایده‌آل با یک R-مدول، جمع مستقیم و ضرب مستقیم از R-مدول ها نیز یک R-مدول است؛*

۲- مدول خارج قسمتی از دو R-زیر مدول یک ایده‌آل در R است؛

۳- خارج قسمت یک زیرمدول توسط یک ایده‌آل، یک زیر مدول M است؛

۴- مدول تابی $\mathrm{Tors}(M)$ زیرمدولی از M است.

اثبات. به [[۶]، قضیه ۲.۱.۸] مراجعه شود.

□

فرض کنیم M یک R-مدول باشد و برای زیر مجموعه مناسب $L \subset R^n$ داشته باشیم $M \cong \dfrac{R^n}{L}$.
اگر L نیز متناهیا تولید شده باشد، آنگاه برای برخی زیرمدول های مناسب $N \subset R^m$ داریم $L \cong \frac{R^m}{N}$، و همچنین همریختی های

$$R^m \longrightarrow \frac{R^m}{N} \cong L \subset R^n \longrightarrow \frac{R^n}{L} \cong M$$

را داریم. بنابراین M با هم‌هسته همریختی $\varphi : R^m \longrightarrow R^n$ (ترکیب $R^m \longrightarrow \frac{R^m}{N} \cong L \subset R^n$) یکریخت است. با ثابت در نظر گرفتن پایه های R^m و R^n، نگاشت φ توسط یک ماتریس $n \times m$ بیان می شود که آن را نیز با φ نشان می دهیم. [[۶]، لم ۲.۱.۲۱].

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **متناهی نمایش** نامیم هرگاه ماتریس $n\times m$ مثل φ موجود باشد بطوریکه M با هم‌هسته نگاشت $R^m \xrightarrow{\varphi} R^n$ یکریخت باشد. φ را ماتریس نمایش M می‌نامیم و نمایش M را نیز با $R^m \xrightarrow{\varphi} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$یک حلقه موضعی باشد و M یک R-مدول باشد. نمایش $R^m \xrightarrow{\varphi} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ از M را نمایش مینیمال[10] می‌نامیم هرگاه $n = \dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M)$.
توجه داریم که $n = \dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M)$ اگر و تنها اگر $\varphi(R^m) \subset \mathfrak{m}R^n$، یعنی درایه های ماتریس نمایش متعلق به $\mathfrak{m}$ هستند.

لم ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم M و N دو R-مدول با نمایش های*

$$R^r \xrightarrow{\psi} R^s \xrightarrow{\kappa} N \longrightarrow 0$$

$$R^m \xrightarrow{\varphi} R^n \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

باشند، در این صورت:

۱- *فرض کنیم $\lambda : M \longrightarrow N$ یک همریختی R-مدولی باشد. در این صورت همریختی های مدولی $R^m \xrightarrow{\alpha} R^r$ و $R^n \xrightarrow{\beta} R^s$ وجود دارد که نمودار زیر جابجایی است.*

$$\begin{tikzcd}
R^m \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dotted, "\alpha"] & R^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
R^r \arrow[r, "\psi"] & R^s \arrow[r, "\kappa"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

یعنی $\beta\circ\varphi = \psi\circ\alpha$ و $\lambda\circ\pi = \kappa\circ\beta$.

۲- *فرض کنیم $\beta : R^n \longrightarrow R^s$ یک همریختی R-مدولی باشد بطوریکه $\beta(\mathrm{Im}(\varphi)) \subset \mathrm{Im}(\psi)$ در این صورت همریختی R-مدولی $\alpha : R^m \longrightarrow R^r$ و همریختی $\lambda : M \longrightarrow N$ موجود است*

---
[10] minimal presentation

بطوریکه نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} R^m \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dotted, "\alpha"] & R^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\lambda"] & 0 \\ R^r \arrow[r, "\psi"] & R^s \arrow[r, "\kappa"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

اثبات. به [[۶]، قضیه ۲.۱.۲۵] مراجعه شود.

□

حلقه های نوتری و مدول های نوتری به روشی مشابه تعریف شده اند که توسط قضیه زیر به همدیگر پیوند داده می شوند.

قضیه ۱۹.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد و M یک R-مدول متناهی مولد باشد، در این صورت M یک R-مدول نوتری است.*

اثبات. به [[۶]، قضیه ۲.۱.۲۹] مراجعه شود.

□

لم ۲۰.۱.۱. (لم ناکایاما[۱۱]) فرض کنیم R یک حلقه و $I \subset R$ ایده‌آلی مشمول در ژاکوبسن رادیکال R باشد. فرض کنیم M یک R-مدول متناهی مولد باشد و $N \subset M$ زیرمدولی باشد که $M = IM + N$. در این صورت $M = N$. درحالت خاص، اگر $M = IM$ خواهیم داشت $M = 0$.

اثبات. به [[۶]، قضیه ۲.۱.۳۰] مراجعه شود.

□

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و M یک R-مدول باشد، **محمل** M را با $\mathrm{Supp}(M)$ نشان می دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \subset R \text{ ایده‌آل اول} \mid M_{\mathfrak{p}} \neq \langle 0 \rangle\}$$

[۱۱] Nakayama Lemma

قضیه ۲۲.۱.۱. *اگر R یک حلقه باشد و M یک R-مدول متناهیا تولید شده باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \subset R \text{ ایده‌آل اول} \mid \mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}(M)\} =: V(\mathrm{Ann}(M))$$

اثبات. به [[۶]، قضیه ۲.۱.۴۱] مراجعه شود. $\square$

۲.۱ ایده‌آل های اولیه[۱۲]

تعریف ۱.۲.۱. ایده‌آل سره ی $\mathfrak{q}$ از حلقه R را **ایده‌آل اولیه** نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم:

$$ab \in \mathfrak{q} \Rightarrow a \in \mathfrak{q} \quad \text{یا} \quad b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه از R باشد، در این صورت $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$ یک ایده‌آل اول از R است. با این شرایط $\mathfrak{q}$ را یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه می‌نامیم.

قضیه ۳.۲.۱. *اگر $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_n$ ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه از R باشند آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ نیز یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه از R است.*

اثبات. به [[۷]، قضیه ۱.۲.۲] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱. *فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل از حلقه R باشد و $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, R$. در این صورت $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل $\mathfrak{m}$-اولیه است.*

اثبات. به [[۷]، قضیه ۱.۲.۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنیم $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه ای باشد و فر ض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه از S باشد. در این صورت $\mathfrak{q}^c$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}^c$-اولیه از R است.*

اثبات. به [[۷]، قضیه ۱.۲.۵] مراجعه شود. $\square$

---

[۱۲] Primary ideals

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مجموعه **ایده‌آل های اول وابسته**[۱۳]ی M را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Ass}_R M := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ R \mid \exists\ 0 \neq x \in M\ :\ \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)\}$$

قضیه ۷.۲.۱. *فرض کنیم M یک مدول متناهی مولد ناصفر روی حلقه نوتری R باشد. در این صورت زنجیر*

$$(0) = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

از زیرمدول های M موجود است بطوریکه برای هر i داریم $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$. که در آن $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)$.

اثبات. به [[۷]، قضیه ۱.۳.۶] مراجعه شود. □

۳.۱ تجزیه اولیه

زیرمدول سره Q از R-مدول M را یک زیرمدول اولیه نامیم اگر برای هر $r \in R$ و $x \in M$ داشته باشیم

$$rx \in Q \Rightarrow x \in Q \text{ یا } r \in \sqrt{\mathrm{Ann}\ M/Q}$$

تعریف ۱.۳.۱. اگر Q یک زیرمدول اولیه از M باشد، آنگاه $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathrm{Ann}\ M/Q}$ یک ایده‌آل اول از R است. Q را یک **ایده‌آل $\mathfrak{p}$-اولیه** از R خواهیم نامید.

تعریف ۲.۳.۱. زیرمدول N از M را **تحویل ناپذیر** نامیم هرگاه رابطه ی $N = N_1 \bigcap N_2$ که N_1 و N_2 زیر مدول هایی از M هستند نتیجه دهد، $N = N_1$ یا $N = N_2$.

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم R حلقه ای نوتری باشد. در این صورت هر زیر مدول سره تحویل ناپذیر از یک R-مدول متناهی مولد، اولیه است.*

---

[۱۳] Assosiated Prime Ideals

اثبات. به [[۷]، قضیه ۱.۴.۴] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول نوتری باشد. در این صورت هر زیرمدول N از M اشتراک متناهی از تعداد متناهی زیرمدول تحویل ناپذیر M است.*

اثبات. به [[۷]، قضیه ۱.۴.۵] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۳.۱. یک تجزیه اولیه از زیرمدول N از M، اشتراک متناهی $N = Q_1 \bigcap \cdots \bigcap Q_n$ می‌باشد که Q_i ها زیرمدولی هایی اولیه از M هستند. تجزیه اولیه $N = Q_1 \bigcap \cdots \bigcap Q_n$ که هر Q_i ایده‌آل $\mathfrak{p}_i$-اولیه است را مینیمال نامیم هرگاه

۱- $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل های اول متمایز از R باشند؛

۲- هیچ Q_i ای را نتوان از اشتراک $N = Q_1 \bigcap \cdots \bigcap Q_n$ حذف نمود.

قضیه ۶.۳.۱. (*وجود تجزیه اولیه*)

فرض کنیم M یک R-مدول نوتری باشد. در این صورت هر زیرمدول سره N از M دارای تجزیه اولیه است.

اثبات. به [[۱]، لم ۷.۱۰ و لم ۷.۱۱] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۳.۱. (قضیه اول یکتایی تجزیه) فرض کنیم $N = Q_1 \bigcap \cdots \bigcap Q_n$ و $N = Q'_1 \bigcap \cdots \bigcap Q'_n$ که Q_i ایده‌آل های $\mathfrak{p}_i$-اولیه، Q'_i ها $\mathfrak{p}'_i$-اولیه هستند دو تجزیه مینیمال برای N باشند. در این صورت

$$\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\} = \mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}'_1, \cdots, \mathfrak{p}'_m\}$$

اثبات. به [[۱]، قضیه ۴.۵] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۳.۱. (قضیه دوم یکتایی تجزیه) فرض کنیم $N = Q_1 \bigcap \cdots \bigcap Q_n$ و $N = Q'_1 \bigcap \cdots \bigcap Q'_n$ که Q_i ایده‌آل های $\mathfrak{p}_i$-اولیه، Q'_i ها $\mathfrak{p}'_i$-اولیه هستند دو تجزیه مینیمال برای N باشند. اگر $p_j \in \{p_1, \cdots, p_n\}$ آنگاه $Q_j = Q'_j$

اثبات. به [[۱]، قضیه ۴.۱۰] مراجعه شود.

□

۴.۱ رسته

منظور از رسته ی $\mathcal{C}$ عبارت است از مجموعه ای از اشیا مانند $A, B, C, \cdots$ که با $\mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم، به همراه

۱- مجموعه های مجزای $\mathrm{Hom}(A, B)$ به ازای هر دو شی ء A و B از $\mathcal{C}$.
عناصر $\mathrm{Hom}(A, B)$ را ریخت می نامند و با نماد $f : A \longrightarrow B$ نشان می دهیم؛

۲- برای هر سه شی ء A، B و C (نه لزوما متمایز) تابع زیر موجود است:

$$\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C)$$

$$(g, f) \longmapsto g \circ f$$

که $g \circ f$ را ترکیب g و f می نامند. این تابع دارای خواص زیر است:

آ- شرکت پذیری: یعنی اگر $f : A \longrightarrow B$، $g : B \longrightarrow C$ و $h : C \longrightarrow D$ ریخت هایی در $\mathcal{C}$ باشند آنگاه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

ب- عنصر همانی: برای هر شی B از $\mathcal{C}$ ریخت $۱_B : B \longrightarrow B$ موجود باشد بطوریکه برای هر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ داشته باشیم $۱_B \circ f = f$ و $g \circ ۱_B = g$. نگاشت ۱_B را عنصر همانی می‌نامیم. واضح است که ریخت همانی هر شی B یکتاست. زیرا

$$۱_B = ۱_B \circ ۱_{B'} = ۱_{B'}$$

مثال ۱.۴.۱. فرض کنیم اشیا $\mathcal{C}$ تمام مجموعه ها باشند و به ازای هر دو مجموعه A و B تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{f : A \longrightarrow B \mid \text{تابعی دلخواه } f\}$$

تابع ترکیب

$$\mathrm{Hom}(B,C)\times\mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,C)$$

را بصورت ترکیب عادی توابع تعریف می‌کنیم. به ازای هر مجموعه B تابع همانی $\mathbf{1}_B : B\longrightarrow B$ ریخت همانی B در نظر می‌گیریم. می‌دانیم ترکیب توابع شرکت پذیر است پس $\mathcal{C}$ یک رسته است.

مثال ۲.۴.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ مجموعه تمام گروه های آبلی باشد و به ازای هر دو گروه آبلی A و B تعریف کنیم

$$\mathrm{Hom}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$$

تابع ترکیب را همان ترکیب عادی توابع تعریف می‌کنیم. چون هر همریختی یک تابع است پس $\mathcal{C}$ یک رسته است.

تعریف ۳.۴.۱. رسته $\mathcal{C}$ را **زیررسته** $\mathcal{D}$می‌نامیم هرگاه هر شی در $\mathcal{C}$ یک شی در $\mathcal{D}$ باشد و اگر A و B دو شی در $\mathcal{C}$ باشند آنگاه $\mathrm{Hom}(A,B)$ در $\mathcal{C}$ مشمول در $\mathrm{Hom}(A,B)$ در $\mathcal{D}$ باشد.
اگر $\mathcal{C}$ زیررسته $\mathcal{D}$ باشد و برای هر جفت Aو B از اشیای $\mathcal{C}$ مجموعه $\mathrm{Hom}(A,B)$ در $\mathcal{C}$ مساوی $\mathrm{Hom}(A,B)$ در $\mathcal{D}$ باشد آنگاه $\mathcal{C}$ را یک **زیررسته پر** از $\mathcal{D}$ می‌نامیم.

مثال ۴.۴.۱. مجموعه گروه های آبلی همراه با مجموعه تمام همریختی‌های گروهی تشکیل یک رسته می‌دهند که آن را با $\mathcal{A}b$ نمایش می‌دهیم.
این رسته یک زیررسته پر از رسته گروه ها می‌باشد.

تعریف ۵.۴.۱. رسته $\mathcal{C}$ را **پیش جمعی**[۱۴] نامیم هرگاه

۱- $\mathcal{C}$ دارای یک شی صفر باشد؛

[۱۴] Preadditive

۲- برای هر جفت A و B از اشیای $\mathcal{C}$ مجموعه $\mathrm{Hom}(A,B)$ یک گروه آبلی جمعی باشد.

بعلاوه اگر شرط زیر برقرار باشد، آنگاه رسته $\mathcal{C}$ را **جمعی** می‌نامیم؛

۳- برای تمام عناصر $A,B,C\in\mathcal{C}$ نگاشت ترکیب

$$\mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Hom}(B,C)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,C)$$

$$(f,g)\longmapsto f\circ g$$

دوخطی باشد، یعنی برای هر $f,g\in\mathrm{Hom}(B,C)$ و $h,k\in\mathrm{Hom}(A,B)$ داشته باشیم

$$(f+g)h=fh+gh\ \ ;\ \ f(h+k)=fh+fk$$

تذکر ۶.۴.۱. رسته پیش جمعی $\mathcal{C}$ را یک رسته جمعی می‌نامیم هرگاه حاصلضرب هر دو شی $\mathcal{C}$ در $\mathcal{C}$ باشد.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم $\{X_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از اشیا در رسته $\mathcal{C}$ باشد که توسط مجموعه I اندیس گذاری می شوند. یک شی X از $\mathcal{C}$ با ریخت‌های $p_i:X\longrightarrow X_i$ (که نگاشت‌های تصویری می‌نامیم) را **حاصلضرب** خانواده $\{X_i\}_{i\in I}$ نامیم اگر برای هر شی Y از $\mathcal{C}$ و ریخت‌های $f_i:Y\longrightarrow X_i$، $(i\in I)$ ریخت منحصر بفرد $f:Y\longrightarrow X$ موجود باشد بطوریکه $p_if=f_i$ برای هر $i\in I$. یعنی برای هر $i\in I$ نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_i"] & X_i \\
Y \arrow[u, dotted, "\exists f"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

قضیه ۸.۴.۱. *اگر X با نگاشت تصویری $p_i:X\longrightarrow X_i$ و X' با نگاشت تصویری $p'_i:X'\longrightarrow X_i$ که $i\in I$ دو حاصلضرب از خانواده $\{X_i\}_{i\in I}$ متشکل از اشیا رسته $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه X و X' دو شی یکریخت از اشیا $\mathcal{C}$ هستند.*