بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

جبرهایی که شرط اوسلندر را روی صفر شدن کوهمولوژی ها برآورد می‌کنند

رضا بابایان

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر رضا سزیده

پایان نامه آقای/~~خانم~~ رضا بابایان به تاریخ ۸۹/۴/۷

شماره ۲-۱۰۰۴ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸,- -

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر رضا شریعتی

۲- استاد مشاور : دکتر ——

۳- داور خارجی : دکتر هوشنگ بهروش

۴- داور داخلی : دکتر محمدعلی اسدی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر حبیب ازانچیلر

تقدیم به:

پدر

مادر و

خانواده گرامیم

تقدیر و تشکر

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی‌ام بخشید ومرا به طریق علم و دانش رهنمون ساخت. حال که با عنایت خداوند متعال این مرحله از زندگی‌ام را با موفقیت به پایان رسانده ام؛ بر خود لازم می دانم تا از تمامی عزیزانی که مرادر این راه یاری نموده اند؛ تشکر وقدردانی نمایم .

ازخانواده عزیزم که در تمام مراحل زندگی با من همدل و همراه بودند وپشتوانه عاطفی محکمی برای من بوده و همیشه از دعای خیرشان بهره مند بودم؛ تشکر وقدرنمایی می نمایم .

از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر رضا سزیده که خالصانه مرا از گنجینه گهر بار علم و تجربیات خود بهره مند ساخته ودر نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده؛ نهایت تشکر را دارم. از اساتید محترم وگرانقدر آقایان دکتر محمدعلی اسدی ودکتر هوشنگ بهروش که زحمت داوری پایان نامه را به عهده گرفته ومرا راهنمایی فرمودند وهمچنین ازآقای دکتر حبیب اذانچیلر نماینده‌محترم تحصیلات تکمیلی نهایت سپاسگزاری وتشکر رادارم .

ودر پایان ازدوستان خوب ومهربانم؛آقایان: محمد احمدپور؛ صادق محمدی خواه؛ علی پاک نفس؛ قدرت غفاری؛ تورج صمدی؛علی اکبری؛ فریدون آل جعفر؛ مسیب ملکی؛ و خانم ها: موسوی؛ قربانی؛ اقدسی که در به پایان رساندن این مقاله همیشه کمک حال من بودند نهایت تشکر را دارم .

رضابابایان تیر ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

حدس اوسلندر: هر جبر آرتینی شرط ویژه‌ای روی صفر شدن کوهمولوژی مدولهای متناهی مولد برآورد می‌کند. رد این حدس که با یک مثال نقض در سال ۲۰۰۳ مربوط به یورگنسن و سگا است، توجّهی خاص را به کلاس حلقه‌هایی که شرط اوسلندر را برآورد می‌کنند، برانگیخت. به یک چنین حلقه‌ها، حلقه‌های AC گفته می شود . نشان خواهیم داد که یک جبر آرتینی AC گورنشتین—چپ است اگر وتنها اگر گورنشتین—راست نیز باشد.

علاوه براین، حدس اوسلندر—ریتن نیز برای حلقه‌های AC بیان می‌شود و نشان داده خواهد شد که G– بعد اوسلندر برای حلقه‌های AC که یاجابه‌جایی هستند و یا همبافت دوگان کننده دارند ، فانکتوری می شوند .

مقدمه

مطالعه‌ی جبرها و مدول‌ها با روش‌های جبر همولوژی پیرامون گروههای کوهمولوژی و فانکتورها بویژه صفر شدن آنها خواهد بود. حدس اوسلندر قویتر از حدس متناهی بودن بعد و چندین حدس برای جبرهای متناهی بعد، از جمله حدس اوسلند—ریتن و حدس‌های ناکایاما است. در این مقاله ما حلقه های AC را در نظر می گیریم. به بیانی دیگر حلقه‌های نوتری چپ A که شرط اوسلندر را روی صفر شدن کوهمولوژی برآورد می‌کند:

(AC) برای هر A- مدول چپ متناهی مولد M وجود دارد یک عدد صحیح $b_M \geq 0$، به طوریکه برای هر A- مدول چپ متناهی مولد N، اگر $\mathrm{Ext}_A^{\gg 0}(M,N) = 0$، آنگاه $\mathrm{Ext}_A^{> b_M}(M,N) = 0$. در مرجع [۱۰] یورگنسن و سگا یک جبر متناهی بعدی ارائه کرده‌اند که شرط (AC) را برآورد می‌کند، رد خواهد شد.

اگر همه‌ی جبرهای متناهی بعدشرط (AC) را برآورد کنند، آنگاه آنها همگی بعد متناهی دارند، ولی نمی‌دانیم کی جبری که شرط (AC) را برآورد می‌کند بعد متناهی بودن، بعد متناهی خواهد داشت. چیزی که می‌دانیم آنست که یک جبر متناهی بعد Λ روی میدان K بعد متناهی بودن، متناهی دارد هرگاه جبر $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^\circ$ شرط (AC) را برآورد بکند.

در این مقاله ما توجهی خاص به مسائلی از کار اوسلندر در نظریه‌ی نمایش می‌دهیم. از جمله

حدس‌هایی که در بالا به آنها اشاره شد.

حدس اوسلندر—ریتن: مدول متناهی مولد M روی جبر آرتینی Λ پروژکتیو است هرگاه برای هر $i \geq ۱$، $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M) = ۰ = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda)$.

برای سادگی بحث، حدس‌ها (درباره‌ی همه‌ی جبرها) و شرط‌ها (روی فقط یک جبر) را متمایز می‌کنیم. شرط زیر را روی حلقه‌ی نوتری چپ A در نظر می‌گیریم:

(ARC) هر A– مدول چپ متناهی مولد M با $\mathrm{Ext}_A^{\geqslant ۱}(M, M \oplus A) = ۰$، پروژکتیو است.

حدس اوسلندر—ریتن به این صورت نیز بیان می‌شود: همه‌ی جبرهای آرتینی که شرط (ARC) را برآورد می‌کنند. همه‌ی جبرهایی که شرط (AC) را برآورد می‌کنند، شرط (ARC) را نیز برآورد می‌کنند.

قضیه A: فرض کنیم A یک حلقه‌ی نوتری چپ که شرط (AC) را برآورد کند. همچنین فرض کنیم M یک A– مدول چپ متناهی مولد باشد. اگر یکی از $\mathrm{Ext}_A^{\geqslant ۰}(M,M) = ۰$ یا $\mathrm{Exty}_A^{\geqslant ۱}(M,A) = ۰$ برقرارباشد، آنگاه M پروژکتیو است. این گزاره حالت خاصی از نتیجه‌ی اصلی۲۱.۱.۴ است. تذکر اینکه، شرط صفر شدن با اعمال کردن روی M در گزاره‌ی A به نظر می‌رسد که ضعیف‌تر از حالتی که در حدس اوسلندر—ریتن گفته شد، این قسمت در۳۴.۱.۴، بحث خواهد شد.

مسئلهٔ بازی که مربوط به اوسلندر و ریتن در [۳] می‌باشد، این است که یک جبر آرتینی گورنشتین چپ است اگر و تنها اگر گورنشتین راست باشد. این همان مسئله‌ی متقارن گورنشتین است که در ۹.۱.۵ و ۲۱.۱.۵، جواب خاصی برای آن آمده است.

قضیه B: فرض کنیم A حلقه‌ی نوتری دوطرفه باشد. اگر A و A° شرط (AC) را برآورد کنند و

(۱) A یک جبر آرتینی باشد؛ یا

(۲) A همبافت دوگان کننده داشته باشد،

آنگاه $\mathrm{id}_A A < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{id}_{A^\circ} A < \infty$.

نمی‌دانیم که هر جبر آرتینی، همبافت دوگان کننده دارد یا نه. ولی بنابر ۱٦.۱.۵، هر K- جبر متناهی بعد همبافت دوگان کننده خواهد داشت.

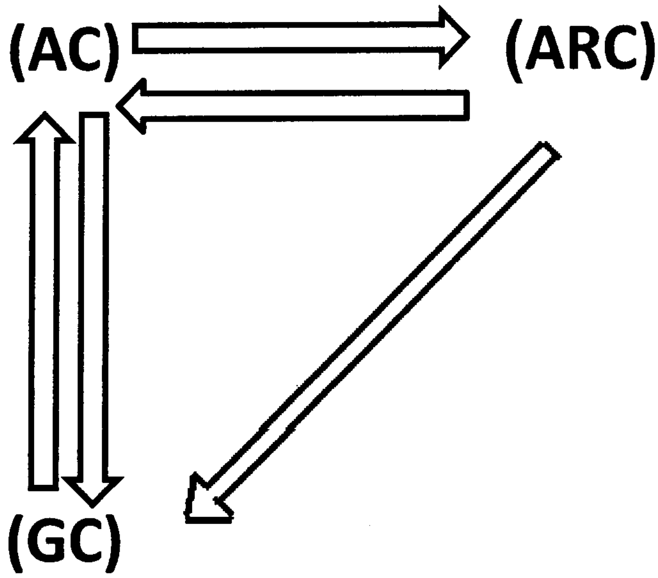
هر مدول چپ متناهی مولد $M \neq \circ$ روی حلقه‌ی نوتری دوطرفه‌ی A از G- بعد صفر است هرگاه انعکاسی باشد و برای هر $i \geq ۱$،

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = \circ = \mathrm{Ext}^i_{A^\circ}(\mathrm{Hom}_A(M, A), A).$$

(GC) هر A- مدول چپ متناهی مولد $M \neq \circ$، با $\mathrm{Ext}^{\geqslant ۱}_A(M, A) = \circ$، از G- بعد صفر است. با یک مثال دیگری از یورگنسن و سگا، همچنین این مسئله یک جواب منفی دارد، حتی برای K- جبرهای متناهی بعد موضعی جابه‌جایی، جواب ویژه‌ای برای گزاره C، در ۱۳.۲.٦،آمده است.

قضیه C: فرض کنیم A حلقه‌ی نوتری دوطرفه است که یا همبافت دوگان کننده و یا جابه‌جایی باشد. اگر A شرط (AC) را برآورد بکند، آنگاه شرط (GC) را نیز برآورد می‌کند.

توسط هونک، سگا و ورسیو، حدس اوسلندر—ریتن برقرار است حلقه‌های نوتری موضعی جابه‌جایی با ریشه‌ی مکعب صفر و مثال نقضی که در [۱۰] آمده است، نشان می‌دهد که این چنین حلقه‌ها لزوماً شرط (AC) یا (GC) را برآورد نمی‌کنند. به فرم دیاگرام زیر خلاصه می‌کنیم:



قضیه های A، B و C در فصلهای ۴، ۵ و ۶ اثبات خواهند شد. در فصل ۷، روش‌های ساده‌ای برای ایجاد کردن حلقه‌های AC، آمده‌است.

در بسیاری از برهان‌های این مقاله از کاتگوری مشتق شده روی حلقه‌ها استفاده شده است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ مفاهیمی از جبر جابجایی

در تمامی فصل‌ها فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است مگر خلاف آن ذکر شود.

گزاره های اصلی

تعریف ۱.۱.۱ رستهٔ $\mathbf{C}$ خانواده‌ای است متشکل از شئ‌های که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱) به ازای هر دو شئ مثل A و B از $\mathbf{C}$ مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ نشان داده می‌شود و برای هر چهار شی مانند A، B، C و D داریم:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,D) = \circ$$

عضو $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ را یک ریخت[۱] از A به B نامیده و با $f : A \longrightarrow B$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی ریخت‌های رسته‌ی $\mathbf{C}$ را با $Mor\mathbf{C}$ و مجموعه‌ی اشیاً آن را با $obj\mathbf{C}$ نشان می‌دهیم.

۲) برای هر $A,B,C \in obj\mathbf{C}$، ترکیب[۲]

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,C)$$

---

[۱] morphism
[۲] Composition

$$(f,g) \longmapsto g \circ f$$

در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) شرکت پذیری ؛

(ب) برای هر $A \in obj\mathbf{C}$، عضو همانی $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,A)$ موجود است بطوریکه برای هر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B,A)$ و هر $B \in obj\mathbf{C}$، $1_A \circ f = f$. همچنین برای هر $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,C)$ و هر $C \in obj\mathbf{C}$، $g \circ 1_A = g$. به عنوان مثال هرگاه R حلقه‌ای یکدار باشد، خانواده‌ی تمام R ـمدول‌های چپ(راست) یک رسته می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند. فانکتور[۳] $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$، تابعی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱)اگر $A \in obj\mathcal{A}$، آنگاه $TA \in obj\mathcal{B}$؛

۲) اگر $f : A \longrightarrow A'$ یک ریخت در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $Tf : TA \longrightarrow TA'$ یک ریخت در $\mathcal{B}$ است،

(۳) اگر f و g دو ریخت در $\mathcal{A}$ باشند که $g \circ f$ با معنی باشد، آنگاه $T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$؛

(۴) برای هر $A \in obj\mathcal{A}$، $T(1_A) = 1_{TA}$.

تعریف ۳.۱.۱ فانکتور $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را یک هم‌ارزی از رسته‌ها گوییم اگر فانکتور $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ موجود باشد بطوریکه $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ و $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$.

تعریف ۴.۱.۱ فانکتور $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را باوفا [۴] گوییم، هرگاه

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC,FC')$$

---

[۳] Functor
[۴] Faithful

یک نگاشت یک بیک باشد. به بیانی دیگر اگر $f_1 : C \longrightarrow C'$ و $f_2 : C \longrightarrow C'$ نگاشت‌های متمایز در $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه $F(f_1) \neq F(f_2)$.

تعریف ۵.۱.۱ فانکتور $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را پر[۵] گوییم، هرگاه $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC')$ یک نگاشت پوشا باشد، به بیانی دیگر برای هر $g : F(c) \longrightarrow F(c')$ در $\mathcal{D}$ یک ریخت مثل $f : C \longrightarrow C'$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد به طوریکه $g = F(f)$.

تعریف ۶.۱.۱ یک زیر رسته $\mathcal{B}$ از $\mathcal{C}$، خانواده‌ای است شامل اشیاء و ریخت‌های $\mathcal{C}$ بطوریکه ریخت‌ها در $\mathcal{B}$ تحت ترکیب بسته‌اند و برای هر $B \in obj(\mathcal{B})$، $1_B \in Mor\mathcal{B}$. زیر رسته در واقع یک رسته است. هرگاه $\mathcal{B}$ دارای شرط $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B')$ برای هر $B, B' \in \mathcal{B}$ باشد $\mathcal{B}$ را زیر رسته‌ی پر[۶] می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ رسته‌ی $\mathcal{A}$ را آبلی گوئیم اگر هر مجموعه‌ی $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D)$ در $\mathcal{A}$ ساختاری آبلی داشته باشد؛ یعنی برای دیاگرام

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{h} D$$

داشته باشیم $h(g + g')f = hgf + hg'f$.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد. یک R ـ جبر[۷] حلقه‌ای مانند S همراه با یک همریختی حلقه‌ای مانند $f : R \longrightarrow S$ می‌باشد.

[۵] Full
[۶] Full subcategory
[۷] Algebra

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی باشد. تعداد عناصر مجموعه‌ی مولد مینیمال m را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{edim}(R)=\dim_{R/\mathfrak{m}}\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^{2}}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱ حلقه‌ی موضعی $(R,\mathfrak{m})$ را یک حلقه‌ی منظم[8] گوییم هرگاه $\operatorname{edim}(R)=\dim(R)$. حلقه‌ی دلخواه R را منظم گوئیم هرگاه برای هر $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}R$، $R_{\mathfrak{p}}$ یک حلقه‌ی موضعی منظم باشد.

۲.۱ مفاهیمی از جبر همولوژی

تعریف ۱.۲.۱ یک R- همبافت مانند X یک دنباله از R- مدول‌های $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و R-همریختی های $\{d_n^X : X_n \longrightarrow X_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ است که برای هر $n\in\mathbb{Z}$ داریم: $d_n^X d_{n+1}^X=0$ و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$X:\cdots\to X_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}^X}X_n\xrightarrow{d_n^X}X_{n-1}\to\cdots\qquad(n\in\mathbb{Z})$$

که در آن برای هر $n\in\mathbb{Z}$ همریختی d_n^X رایک دیفرانسیل X می‌نامیم.

فرض کنیم $I=\{u,\cdots,v\}$ مجموعه‌ای از اعداد صحیح متوالی باشد. همبافت X را متمرکز شده[9] در I گوییم، هرگاه برای هر $j\in\mathbb{Z}-I$ داشته باشیم $X_j=0$. به بیان دیگر، همبافتی به صورت زیر باشد:

$$0\longrightarrow X_u\to\cdots\to X_v\longrightarrow 0.$$

[8] Regular
[9] cocentrated

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم M یک R ـ همبافت و n یک عدد صحیح باشد. برش سخت[۱۰] بالای M در n یک همبافت است که آن را با $M_{\leq n}$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_v^{M_{\leq n}} = \begin{cases} \circ & v > n \\ d_v^M & v \leq n. \end{cases} \quad \text{و} \quad (M_{\leq n})_v = \begin{cases} \circ & v > n \\ M_v & v \leq n. \end{cases}$$

بطور مشابه همبافت برش سخت پایین M در n رابا $M_{\geq n}$ نمایش می‌دهیم و آن را بصورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$d_v^{M_{\geq n}} = \begin{cases} d_v^M & v \geq n \\ \circ & v < n. \end{cases} \quad \text{و} \quad (M_{\geq n})_v = \begin{cases} M_v & v \geq n \\ \circ & v < n. \end{cases}$$

تذکر ۳.۲.۱ برای هر n، دنباله کوتاه دقیق از R ـ همبافتها را داریم:

$$\circ \longrightarrow M_{\leq n} \longrightarrow M \longrightarrow M_{\leq n+1} \longrightarrow \circ.$$

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم M یک R ـ همبافت و n یک عدد صحیح باشد. برش نرم[۱۱] بالای M در n همبافت $M_{\subset n}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

---

[۱۰] hard truncation
[۱۱] soft truncation

$$d_v^{M_{\subset n}} = \begin{cases} 0 & v > n \\ \overline{d_n^M} & v = n \\ d_v^M & v < n. \end{cases} \quad \text{و} \quad (M_{\subset n})_v = \begin{cases} 0 & v > n \\ C_n(M) & v = n. \\ M_v & v < n. \end{cases}$$

که در آن $\overline{d_n^M} : C_n(M) \longrightarrow M_{n-1}$ و $C_n(M) = \mathrm{coKer} d_{n+1}^M$. بطور مشابه برش نرم پایین M در n همبافت $M_{\supset n}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_v^{M_{\supset n}} = \begin{cases} d_v^M & v > n \\ 0 & v = n \\ 0 & v < n. \end{cases} \quad \text{و} \quad (M_{\supset n})_v = \begin{cases} M_v & v > n \\ Z_n(M) & v = n. \\ 0 & v < n. \end{cases}$$

که در آن $Z_n(M) = \mathrm{Ker} d_n^M$.

تذکر ۵.۲.۱ فرض کنید N یک R ـ مدول باشد. می‌توانیم N را به عنوان یک R ـ همبافت متمرکز شده در درجه‌ی صفر در نظر بگیریم، به بیانی دیگر برای هر $n \neq 0$، $N_n = 0$ و برای $n = 0$، $N_0 = N$. از طرف دیگر، هر R ـ همبافت متمرکز شده در درجه‌ی صفر مثل N را می‌توانیم یک R ـ مدول در نظر بگیریم.

تعریف ۶.۲.۱ $R-$ همبافت X را از بالا کراندار[۱۲] گوییم، اگر $n \in \mathbb{Z}$ موجود باشد به طوری که برای هر $l > n$، داریم: $X_l = 0$. در این صورت همبافتی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^X} \cdots \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

[۱۲] Bounded above

تعریف ۷.۲.۱ $R-$ همبافت X را از پایین کراندار گوییم، اگر $m \in \mathbb{Z}$ موجود باشد که برای هر $l < m$، داریم: $X_l = 0$. در واقع X همبافتی به صورت زیر است:

$$\cdots \longrightarrow X_{m+1} \xrightarrow{d^X_{m+1}} X_m \xrightarrow{d^X_m} 0 \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

هرگاه یک همبافت از بالا و از پایین کراندار باشد، گوییم آن همبافت کراندار است.

تعریف ۸.۲.۱ برای هر $R-$ همبافت مثل X و $n \in \mathbb{Z}$، $R-$ مدول X_n را مدول از درجه‌ی n و عناصر هسته‌ی d^X_n را یک $n-$ دور[۱۳] نامیده و با Z^X_n نشان می‌دهیم. همچنین عناصر تصویر d^X_{n+1} را $n-$ مرز[۱۴] نامیده و با B^X_n نشان می‌دهیم. ازآنجائیکه $d^X_n d^X_{n+1} = 0$، پس B^X_n زیرمدول Z^X_n است. بنابراین می توانیم مدول خارج قسمتی زیر را تعریف کنیم :

$$\mathrm{H}_n(X) = \frac{Z^X_n}{B^X_n}.$$

و آن را $n-$ امین همولوژی مدول از همبافت X می‌نامیم. برای هر $l \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم:

$$d^{\mathrm{H(X)}}_l = 0, \quad \mathrm{H}(X)_l = \mathrm{H}_l(X).$$

همبافت $\mathrm{H}(X) = (\mathrm{H}_l(X), 0)$ را همبافت همولوژی از همبافت X می‌نامیم، که می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}(X)_{l+1} \xrightarrow{0} \mathrm{H}(X)_l \xrightarrow{0} \mathrm{H}(X)_{l-1} \to \cdots.$$

تعریف ۹.۲.۱ همبافت X را همولوژی بدیهی[۱۵] گوییم، هرگاه $\mathrm{H}(X) = 0$. بعضی مواقع همبافت همولوژی بدیهی را دنباله‌ی دقیق نیز می‌نامند. به ویژه، دنباله‌ی دقیق کوتاه از $R-$ مدول ها

[۱۳] n-cycle
[۱۴] n-boundary
[۱۵] trivial homology