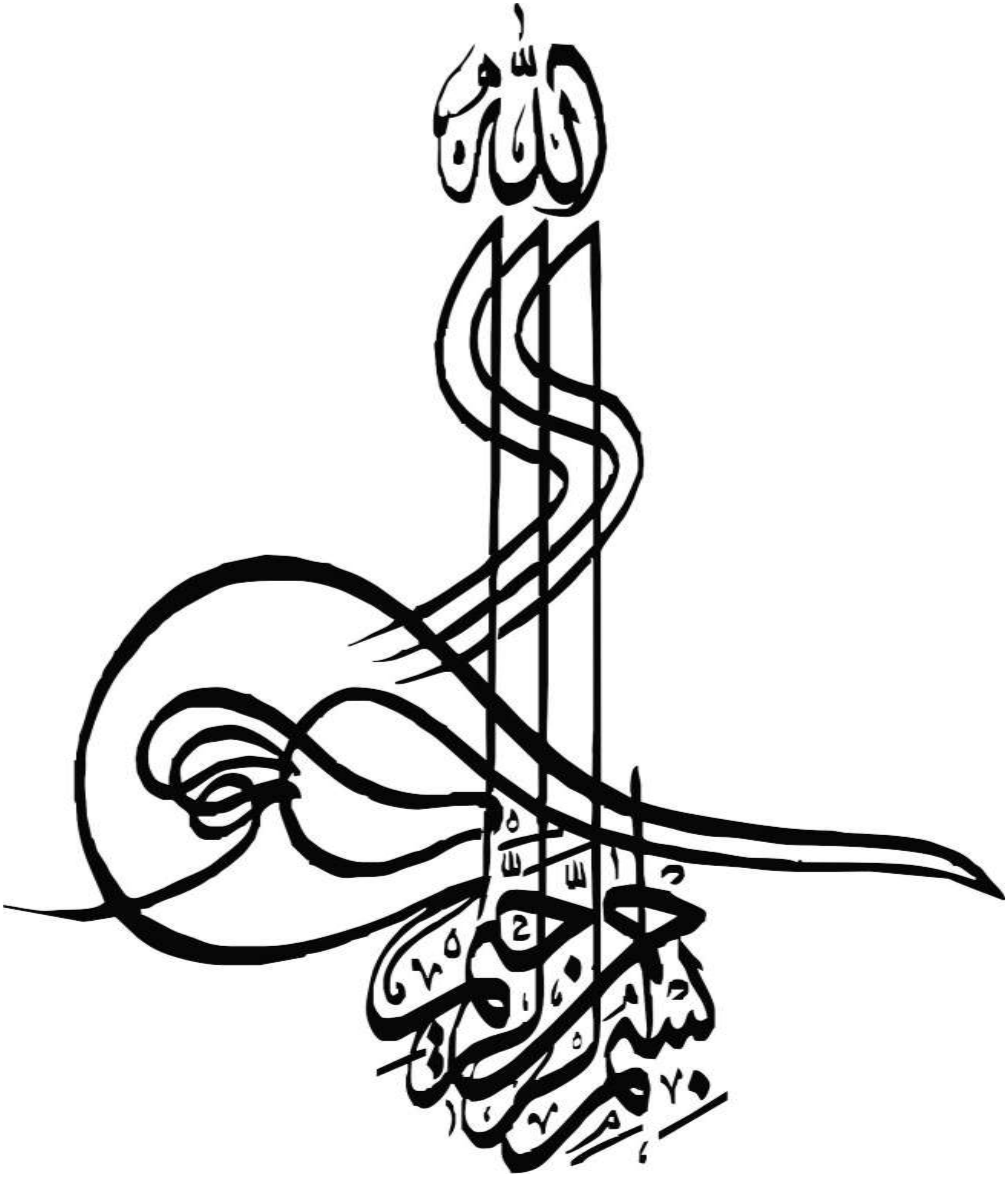

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان:

گراف‌های پوسته‌پذیر و گراف‌های دو بخشی کوهن – مکولی دنباله‌ای

از:

مینا بابایی گورابسری

استاد راهنما:

دکتر فرهاد درستکار

شهریور۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید.

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

تقدیم و تشکر

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای محترم خود، جناب آقای دکتر فرهاد درستکار، صمیمانه تشکر و قدردانی دارم که بی شک بدون راهنمایی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از داوران محترم، آقای دکتر انصاری و آقای دکتر رحیمی برای قبول زحمت داوری نیز تشکر می‌نمایم.

با سپاس از آقای دکتر عباسی رئیس دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان و تشکر از همه‌ی اساتید محترم گروه ریاضی محض و مدیر تحصیلات تکمیلی و همه‌ی عوامل اداری و اجرایی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان.

و با تشکر از عوامل کتابخانه دانشکده علوم و کتابخانه مرکزی دانشگاه گیلان.

فهرست مطالب

چکیده:

گراف‌های پوسته‌پذیر و گراف‌های دوبخشی کوهن – مکولی دنباله‌ای
مینا بابایی گورابسری

در این پایان نامه ابتدا گراف‌های پوسته‌پذیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس به مطالعه‌ی گراف‌های کوهن - مکولی دنباله‌ای خواهیم پرداخت و تعدادی نتایج وابسته از آن‌ها را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

کلید واژه: مجتمع پوسته‌پذیر، کوهن - مکولی دنباله‌ای ، ایده‌آل‌های یالی، گراف‌های دوبخشی و وتری.

پیشگفتار

در سال ۱۹۷۵ میلادی R. Stanley برای اثبات مسأله‌ی حدس کران بالا برای کره‌ها از مفهوم حلقه‌های کوهن - مکولی استفاده نمود. با این کار استفاده از ابزارهای جبر جابجایی در مطالعه‌ی مجتمع‌های سادکی آغاز شد.

در سال ۱۹۹۰ میلادی R. Villarreal برای یک گراف متناهی G با مجموعه‌ی رأس‌های $\{x_1, \ldots, x_n\}$، ایده‌آل یالی I(G) را در حلقه‌ی $K[x_1, \ldots, x_n]$ تعریف نمود. در جبر جابجایی ترکیبیاتی مطالعه‌ی خواص حلقه‌ی $\frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{I(G)}$ را به مطالعه‌ی خواص گراف G و یا Δ_G یعنی مجتمع سادکی متشکل از تمام وجه‌های مستقل گراف G، مرتبط می‌نمایند. از جمله مباحث جالب در این شاخه می‌توان به گراف‌های کوهن - مکولی و گراف‌های کوهن - مکولی دنباله‌ای اشاره نمود که ریاضی‌دانان معروفی از جمله J. Herzog، T. Hibi، A. Van Tuyl و R. Villarreal در این زمینه نتایج جدیدی را منتشر نموده‌اند.

این پایان نامه بر اساس مقاله‌ی [9] تدوین شده است و شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم. در فصل دوم به بررسی مفهوم گراف پوسته‌پذیر و مطالب مربوط به این تعریف خواهیم پرداخت. در فصل سوم نیز گراف‌های دوبخشی کوهن – مکولی دنباله‌ای را مطالعه می‌نماییم و در فصل چهارم به یک کاربرد از موارد بالا می‌پردازیم.

فصل اول

مفاهیم پایه

۱-۱ حلقه‌های مدرج[1]

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم G یک گروه با همانی e باشد. یک حلقه مانند R را یک حلقه‌ی G - مدرج گوییم اگر بتوان خانواده‌ای از زیرگروه‌های جمعی R مانند $\{R_g \mid g \in G\}$ چنان یافت که:

(۱): $R=\bigoplus_{g \in G} R_g$. (یعنی هر عضو R مانند r را می‌توان به طور منحصربفرد به صورت جمع تعداد متناهی از عضوهای R_g مانند $x_{g_i} \in R_{g_i}$ که $r = x_{g_1} + x_{g_2} + \cdots + x_{g_k}$ نوشت.)

(۲): $R_gR_{g'} \subset R_{gg'}$ که در آن منظور از $R_gR_{g'}$ عبارت است از مجموعه‌ی تمام جمع‌های متناهی از حاصلضرب‌های $r_gr_{g'}$ که $r_g \in R_g$ و $r_{g'} \in R_{g'}$.

تعریف ۱-۱-۲. هر عضو از $\bigcup_{g \in G} R_g$ را یک عضو همگن[2] از R گوییم. چنانچه داشته باشیم $r \in R_g$، آنگاه آن‌را یک عضو همگن از درجه‌ی g گوییم و می‌نویسیم $\deg r = g$. با توجه به شرط (۱) در تعریف فوق، هر عضو $r \in R$ دارای نمایش منحصربفرد به صورت $r = \sum_{g \in G} r_g$ است که $r_g \in R_g$ به ازای هر $g \in G$ و تعداد r_gهای غیر صفر، متناهی می‌باشد.

دراین صورت r_gها را نیز مؤلفه‌ی همگن[3] از R گوییم.

مثال ۱-۱-۳. فرض کنیم K یک میدان x_1، x_2، ... ، x_r، r متغیر باشند، دراین صورت حلقه‌ی $R= K[x_1, \dots, x_r]$ یک حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ - مدرج است، زیرا می‌توانیم فرض کنیم به ازای هر $n \geq 0$،

$$R_n = \left\{\sum a_i\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} \,\middle|\, m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n\right\}$$

و به ازای هر $n < 0$، $R_n = \{0\}$.

دراین صورت $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ و چون $\mathbb{Z}$ یک گروه با عمل جمعی است، $R_nR_m \subset R_{n+m}$.

تعریف ۱-۱-۴. فرض کنیم R یک حلقه‌ی G - مدرج و M یک R مدول (چپ) باشد، M را یک R مدول (چپ) مدرج گوییم اگر

---

[1] Graded ring
[2] Homogenous element
[3] Homogenous components

خانواده‌ای از زیر مدول‌ها به صورت $\{M_\sigma | \sigma \in G\}$ چنان موجود باشند که:

(۱): $M= \bigoplus_{\sigma \in G} M_\sigma$

(۲): $R_\tau M_\sigma \subset M_{\tau\sigma}$ به ازای هر $\tau , \sigma \in G$.

تعریف ۱-۱-۵. هر عضو $h(M) = \cup_{\sigma \in G} M_\sigma$ را یک عضو همگن گوییم. اگر $0 \neq m \in M_\sigma$، آنگاه m را یک عضو همگن از درجه‌ی σ گوییم ومی‌نویسیم $\deg m = \sigma$. توجه داریم که بنا به شرط (۱) در تعریف ۱-۱-۵، هر $m \in M$ دارای نمایش منحصربفردی به صورت $m= \sum_{\sigma \in G} m_\sigma$ از مؤلفه‌های همگن است که در آن به جز تعداد متناهی m_σ، بقیه برابر صفر می‌باشد. در حلقه‌ی مدرج $R= K[x_1 , \dots , x_n]$ هر تک جمله‌ای از درجه‌ی n یک مؤلفه‌ی همگن است.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم R یک حلقه‌ی مدرج و M یک R – مدول مدرج است. می‌دانیم M دارای تحلیل آزاد مدرج مینیمال به صورت

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{p,j}(M)} \longrightarrow \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{p-1,j}(M)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

که در آن $p \leq n$ ، $R(-j)$ - R مدول مدرج به دست آمده به وسیله‌ی انتقال از R به اندازه‌ی j است. در این صورت عدد $\beta_{i,j}(M)$ را (i, j) – امین عدد مدرج بتی از M گوییم که آن دقیقا برابر با تعداد مولدهای از درجه‌ی j در i امین مدول سی زی جی است.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنیم I یک ایده‌آل همگن از حلقه‌ی مدرج R باشد که همه‌ی مولدهای آن از درجه‌ی d هستند گوییم I دارای یک تحلیل‌ی خطی[۴] است اگر به ازای هر $i \geq 0$ و $j \neq i + d$ داشته باشیم:

$$\beta_{ij} = 0$$

قرارداد۱-۱-۸. فرض کنیم I یک ایده‌آل مدرج از حلقه‌ی مدرج R باشد، ایده‌آل تولید شده توسط تمام مؤلفه‌های همگن I از درجه‌ی d را با (I_d) نشان می‌دهیم.

---

[4] linear resolution

تعریف ۱-۱-۹. یک ایده‌آل همگن I را خطی مولفه‌ای[5] است اگر برای هر d، (I_d) یک تحلیل‌ی خطی داشته باشد.

تعریف ۱-۱-۱۰. فرض کنیم I ایده‌آل تولید شده توسط تک جمله‌ای‌های خالی از مربع باشد، دراین‌صورت $I_{[d]}$ ایده‌آل تولید شده توسط تک جمله‌ای‌های خالی از مربع از درجه‌ی d از I است.

۱-۲ مجتمع سادکی[6]

تعریف۱-۲-۱. فرض کنیم [n] مجموعه‌ی $\{۱ , \dots , n\}$ باشد. یک مجموعه از زیرمجموعه‌های [n] مانند Δ را یک مجتمع سادکی گوییم اگر $F \in \Delta$ و $F' \subset F$، آنگاه $F' \in \Delta$.

توجه۱-۲-۲. گاهی اوقات در تعریف مجتمع سادکی این شرط که به ازای هر $i \in [n]$، $\{i\} \in \Delta$ را نیز در نظر می‌گیرند.

تعریف۱-۲-۳. هرعضو $F \in \Delta$ را یک وجه[7] از Δ می‌نامیم. بعد[8] وجه F برابر با $|F| - ۱$ است که $|F|$ برابر با تعداد عضوهای مجموعه‌ی F است بنابراین $\dim F= |F| - ۱$. همچنین بعد Δ را به صورت

$$\dim\Delta= \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۲-۴. هر وجه از بعد یکِ مجتمع سادکی Δ را یک یال و هر وجه از بعد صفر را یک رأس گوییم. همچنین هر وجه ماکزیمال از Δ نسبت به رابطه شمول را یک ابر وجه یا رویه[9] گوییم.

تعریف ۱-۲-۵. اگر $\{H_۱, \dots , H_s\}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی وجه‌های Δ باشد، زیر مجتمع[10] از Δ تولید شده توسط $H_۱, \dots , H_s$ را با $\langle H_۱, \dots , H_s\rangle$ نشان داده و آن را برابر با مجموعه‌ی تمام وجه‌هایی از Δ که مشمول در حداقل یکی از H_i به ازای $۱ \le i \le n$ است، تعریف می‌کنیم.

---
[5] Componentwise linear
[6] Simplicial complex
[7] Face
[8] Dimension
[9] Facet
[10] Subcomplex

تعریف ۱-۲-۶. فرض کنیم $\mathcal{F}(\Delta)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام ابروجه‌ها باشد. آنگاه $\mathcal{F}(\Delta)$ یک شاخص برای تعیین Δ است. وقتی که $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \dots, F_n\}$، می‌نویسیم $\Delta = \langle F_1, \dots, F_n \rangle$.

تعریف۱-۲-۷. یک مجتمع سادکی را محض[11] می‌نامیم اگر تعداد عضوهای تمام ابروجه‌های آن یکسان باشد.

تعریف ۱-۲-۸. زیر مجموعه‌ی F از $[n]$ را که $F \notin \Delta$، غیروجه[12] از Δ می‌نامیم.

قرارداد۱-۲-۹. $\mathcal{N}(\Delta)$ نشان دهنده‌ی تمام زیر مجموعه‌های مینیمال از $[n]$ است که هیچ یک وجهی از Δ نمی‌باشد.

تعریف ۱-۲-۱۰. فرض کنیم Δ و Γ دو مجتمع سادکی باشند بدیهی است

$$\{A \cup B \mid A \in \Delta, B \in \Gamma\}$$

یک مجتمع سادکی است، این مجتمع سادکی را با $\Delta * \Gamma$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۲-۱۱. هر $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ را یک تک جمله ای[13] می‌نامیم و آن را با نماد x^a نشان می‌دهیم که $a = (a_1, \dots, a_n)$ و $x = (x_1, \dots, x_n)$ می‌باشند. x^a را تک جمله ای خالی از مربع[14] می‌نامیم اگر مؤلفه‌های a یعنی $a_1, \dots, a_n$ همواره صفر یا یک باشند.

ایده آل تولید شده توسط تک جمله ای‌ها (خالی از مربع) را ایده آل تک جمله ای (خالی از مربع)[15] می‌نامیم.

اصطلاح ۱-۲-۱۲. فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی روی $[n]$ از بعد $d - 1$ باشد. به ازای هر $0 \leq i \leq d$، $\Delta^{(i)}$ را i امین اسکلت[16] از Δ روی $[n]$ می‌نامیم به طوری که وجه‌های آن، آن وجه‌های F از Δ است که $|F| \leq i + 1$ یعنی:

$$\Delta^{(i)} = \{F \in \Delta \mid \dim F \leq i\} \subset \Delta.$$

---

[11] Pure
[12] Non Face
[13] Monomial
[14] Squarefree
[15] (Squarefree) Monomial Ideal
[16] Ith skeleton

به وضوح دیده می‌شود که $\Delta^{(i)}$ نیز به ازای هر $0\leq i \leq d$، یک مجتمع سادکی است.

قرارداد ۱-۲-۱۳. فرض کنیم $R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه‌ی چندجمله ای[17] با n متغیر بر میدان K باشد و Δ نیز یک مجتمع سادکی روی $[n]$ است. آنگاه برای هر $F \subseteq [n]$ قرارداد می‌کنیم:

$$x_F := \prod_{i\in F} x_i .$$

در تعریف ۱-۲-۱۴ و ۱-۲-۱۵ نیز فرض می‌کنیم $R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه‌ی چندجمله ای با n متغیر بر میدان K است و Δ نیز یک مجتمع سادکی روی $[n]$ می‌باشد.

تعریف ۱-۲-۱۴. ایده آل استنلی رایزنر[18] از Δ، ایده‌آل I_Δ از R است که توسط تک جمله‌ای‌های خالی از مربع x_F ای که $F \notin \Delta$، تولید می‌شود. به عبارت دیگر

$$I_\Delta = \langle x_F \mid F \in \mathcal{N}(\Delta)\rangle.$$

تعریف۱-۲-۱۵. ایده آل ابر وجه از Δ ، ایده‌آل $I(\Delta)$ از R است که توسط تک جمله ای‌های خالی از مربع x_F ای که $F \in \mathcal{F}(\Delta)$، تولید می‌شود. بنابراین

$$I(\Delta) = \langle x_F \mid F \in \mathcal{F}(\Delta)\rangle.$$

تعریف ۱-۲-۱۶. فرض کنیم Δ یک مجتمع سادکی بر مجموعه‌ی $[n]$ باشد. دوگان Δ را با $\Delta^\vee$ نشان می‌دهیم و آن عبارت است از

$$\Delta^\vee = \{[n]\setminus F \mid F \notin \Delta\}$$

و $\Delta^\vee$ را دوگان الکساندر[19] می‌نامیم.

لم ۱-۲-۱۷.(ر.ک [6, 1.5.2]) مجموعه‌ی $\Delta^\vee$ یک مجتمع سادکی است و $(\Delta^\vee)^\vee = \Delta$.

قرارداد ۱-۲-۱۸. اگر برای هر $F \subset [n]$، فرض کنیم $\overline{F} = [n] \setminus F$ باشد دراین صورت $\overline{\Delta}$ مجتمع سادکی تولید شده توسط $\overline{F}$ هایی است که $F \in \mathcal{F}(\Delta)$ یعنی:

[17] Polynomial
[18] Stanley-Reisner ideals
[19] Alexander dual

$$\overline{\Delta} = \langle \overline{F} \mid F \in \mathcal{F}(\Delta) \rangle.$$

لم ۱-۲-۱۹.(ر.ک [6, 1.5.3]) خواهیم داشت:

$$I_{\Delta^\vee} = I(\overline{\Delta}).$$

قرارداد ۱-۲-۲۰. برای هر $F \subset [n]$ قرارداد می‌کنیم:

$$P_F := \langle x_i \mid i \in F \rangle.$$

و بدیهی است P_F یک ایده‌آل اول است.

لم ۱-۲-۲۱. (ر.ک [6, 1.5.4]) تجزیه‌ی اولیه‌ی استاندارد[20] از I_Δ به صورت زیر است:

$$I_\Delta = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} P_{\overline{F}}\,.$$

نتیجه ۱-۲-۲۲.(ر.ک [6, 1.5.5]) فرض کنیم $I_\Delta = P_{F_1} \cap \dots \cap P_{F_m}$ تجزیه‌ی اولیه‌ی استانداردی از I_Δ باشد که در آن $F_j \subset [n]$ به ازای هر $1 \le j \le m$. اگر $G(I_{\Delta^\vee})$ مجموعه مولدهای $I_{\Delta^\vee}$ باشد آنگاه:

$$G(I_{\Delta^\vee}) = \{X_{F_1}, \dots, X_{F_m}\}.$$

نکته ۱-۲-۲۳. فرض کنیم I یک ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع باشد آنگاه دوگان الکساندر خالی از مربع از ایده‌آل

$I = (x_{1,1} \dots x_{1,s_1}, \dots, x_{t,1} \dots x_{t,s_t})$، ایده‌آل

$$I^\vee = (x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}) \cap \dots \cap (x_{t,1}, \dots, x_{t,s_t})$$

است.

برهان: می‌دانیم اگر $I = \langle x_{1,1} \dots x_{1,s_1}, \dots, x_{t,1} \dots x_{t,s_t} \rangle$ باشد آنگاه یک مجتمع سادکی موجود است به طوری که، $I = I_\Delta$ و $\mathcal{N}(\Delta) = \{\{x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}\}, \dots, \{x_{t,1}, \dots, x_{t,s_t}\}\}$. اما $I^\vee = I_{\Delta^\vee}$ و بنا بر لم ۱-۲-۲۲ داریم

$$I^\vee = I_{\Delta^\vee} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(\Delta^\vee)} P_{\overline{F}}\ .$$

---

20 Standard Primary decomposition

حال از

$$\{x_{i,۱},\dots,x_{i,s_i}\}\in\mathcal{N}(\Delta)\Leftrightarrow F_i=[n]\backslash\left\{x_{i,۱},\dots,x_{i,s_i}\right\}\in\mathcal{F}(\Delta^{v})$$

نتیجه می‌گیریم که

$$I^{v}\;=\;I_{\Delta^{v}}=\bigcap_{F\;\in\mathcal{F}(\Delta^{v})}P_{\overline{F}}=\bigcap_{i=۱}^{k}P_{\{x_{i,۱},\dots,x_{i,s_i}\}}=\bigcap_{i=۱}^{k}\langle x_{i,۱},\dots,x_{i,s_i}\rangle$$

از این‌رو اگر $I=\langle x_{۱,۱}\,\dots\,x_{۱,s_۱},\dots,x_{t,۱}\,\dots\,x_{t,s_t}\rangle$ منظور از I^{v} همان $\bigcap_{i=۱}^{k}\langle x_{i,۱},\dots,x_{i,s_i}\rangle$ است. □

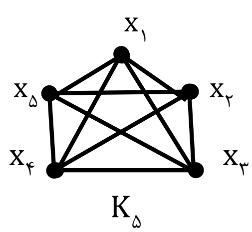
۱-۳ گراف[۲۱]

قرارداد ۱-۳-۱. فرض کنیم G یک گراف باشد. مجموعه‌ی رأس‌های گراف را با $V(G)$ یا V_G و مجموعه یال‌های گراف را با $E(G)$ یا E_G نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۳-۲. گرافی را که بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد و طوقه نداشته باشد، گراف ساده [۲۲]می‌نامیم.

تعریف ۱-۳-۳. دو رأس متمایز v و w از گراف G را مجاور[۲۳] می‌نامیم اگر بین آن‌ها یک یال وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۳-۴. گراف ساده‌ی متناهی G را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند، گراف کامل[۲۴] می‌نامیم. یک گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم. به طور مثال گراف $K_۵$ به صورت



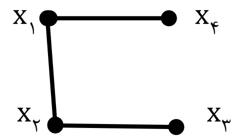
است.

تعریف ۱-۳-۵. یک زیر گراف از گراف G، خود یک گراف است که هر رأس آن به V_G تعلق دارد و هر یال آن عضو $E(G)$ است.

---

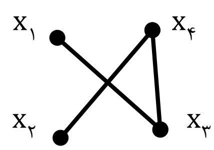
[21] Graph
[22] Simple graph
[23] Adjacent
[24] Complete graph

تعریف ۱-۳-۶. فرض کنیم G یک گراف متناهی است، گراف متناهی $\overline{G}$ روی V_G را که مجموعه یالی $E(\overline{G})$ شامل تمام زیرمجموعه-های دو عضوی $\{i,j\}$ از V_G است که $\{i,j\} \notin E(G)$ را گراف مکمل[۲۵] از گراف G می‌نامیم. به عنوان مثال اگر G گراف



G

باشد آنگاه گراف مکمل آن یعنی $\overline{G}$ به صورت

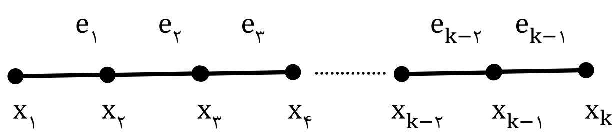


$\overline{G}$

است.

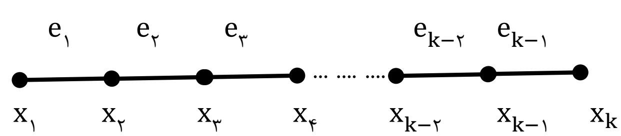
توجه ۱-۳-۷. متناظر با هر گراف متناهی می‌توان یک مجتمع سادکی از بعد یک در نظر گرفت.

تعریف ۱-۳-۸. یک راه[۲۶] از گراف G با طول q بین دو رأس i و j دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌ها به صورت



است که در آن $x_1 = i$ و $x_k = j$.

تعریف ۱-۳-۹. یک دور[۲۷] از گراف G با طول q، یک زیرگراف C از گراف G به صورت



است که در آن $x_1 = x_k$.

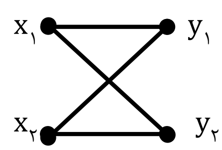
تعریف ۱-۳-۱۰. یک گراف G با مجموعه‌ی رأسی V_G را همبند[۲۸] گوییم اگر برای هر دو رأس از آن یک راه وجود داشته باشد.

[25] Complementary Graph
[26] Walk
[27] Cycle
[28] Connected

تعریف ۱-۳-۱۱. هر گراف متناهی بدون هیچ دور را یک جنگل[۲۹] گوییم و هر جنگل را که همبند باشد یک درخت[۳۰] می‌نامیم.

تعریف ۱-۳-۱۲. یک گراف G با مجموعه رأسی V_G را دوبخشی[۳۱] می‌نامیم اگر یک تجزیه‌ی[۳۲] $V_G = V_۱ \cup V_۲$ چنان وجود داشته باشد که هر یال از G به صورت $\{i , j\}$ است که $i \in V_۱$ و $j \in V_۲$.

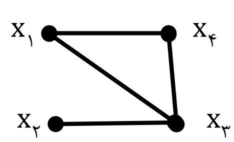
تعریف ۱-۳-۱۳. یک گراف دوبخشی G با تجزیه‌ی $V_G = V_۱ \cup V_۲$ را دوبخشی کامل می‌نامیم هرگاه بین هر رأس از $V_۱$ و هر رأس از $V_۲$ یال وجود داشته باشد. گراف دوبخشی کامل G را که $|V_۱| = m$ و $|V_۲| = n$ است با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. به طور مثال



$K_{۲,۲}$

لم ۱-۳-۱۴. (ر.ک [6, 9.1.1]) یک گراف متناهی G، دوبخشی است اگر و تنها اگر هر دور از G دارای طول زوج باشد در نتیجه هر جنگل یک گراف دوبخشی است.

تعریف ۱-۳- ۱۵. یک زیر مجموعه‌ی C از مجموعه رأس‌های G را که برای هر رأس i و j از آن، $\{i , j\}$ یالی از گراف G است، یک دسته[۳۳] می‌نامیم. به طور مثال اگر G گراف



G

باشد آنگاه $C= \{x_۱ , x_۳ , x_۴\}$ یک دسته از گراف G می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۱۶. فرض کنیم G یک گراف متناهی با n رأس باشد. مجموعه‌ی تمام دسته‌های گراف G تشکیل یک مجتمع سادکی روی $[n]$ را می‌دهد. این مجتمع سادکی را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

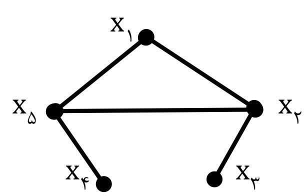
---

[29] Forest
[30] Tree
[31] Bipartite
[32] Decomposition
36 Cliqe

تعریف ۱-۳-۱۷. فرض کنیم $R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه‌ی چندجمله ای‌ها با n متغیر بر میدان K باشد، به هر یال $e = \{x_i , x_j\}$ از گراف G یک تک جمله‌ای $U_e = x_i x_j$ مرتبط می‌کنیم. ایده آل تک جمله ای $I(G)$ را که به وسیله‌ی تمام تک جمله‌ای‌های خالی از مربع U_e که $e \in E(G)$ تولید می‌شود را ایده آل یالی[34] از گراف G می‌نامیم.

$$I(G) = \langle \{x_i x_j \mid \{x_i , x_j\} \in E(G)\} \rangle.$$

به عنوان مثال اگر G گراف زیر باشد



G

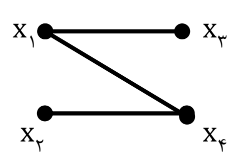
آنگاه

$$I(G) = \langle x_1x_2 , x_2x_3 , x_4x_5 , x_2x_5, x_1x_5 \rangle.$$

توجه ۱-۳-۱۸. بدیهی است ایده آل یالی از گراف G با ایده آل استنلی رایزنر از مجتمع سادکی $\Delta(\overline{G})$ برابر است یعنی:

$$I(G)= I_{\Delta(\overline{G})}.$$

تعریف ۱-۳-۱۹. فرض کنیم G یک گراف با مجموعه رأسی V_G باشد. زیر مجموعه‌ی C از V_G را یک پوشش رأسی[35] از گراف G می‌نامیم اگر اشتراک هر یال از گراف G با مجموعه ی C غیر تهی باشد. به عنوان مثال برای گراف

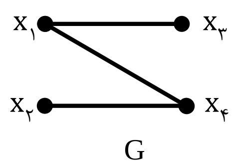


G

مجموعه‌ی $C = \{x_1, x_2 , x_4\}$ یک پوشش رأسی از گراف G است.

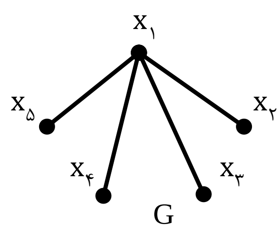
تعریف ۱-۳-۲۰. اگر C یک پوشش رأسی از G باشد و هیچ زیر مجموعه‌ی سره از C یک پوشش رأسی از G نباشد، C را یک پوشش رأسی مینیمال[36] می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام پوشش‌های رأسی مینیمال را با $M(G)$ نشان می‌دهیم. به طور مثال در گراف

---
[34] Edge ideal
[35] Vertex cover
[36] Minimal vertex cover



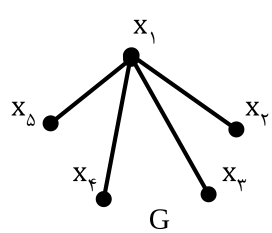
مجموعه‌ی $C = \{x_۱, x_۴\}$ یک پوشش رأسی مینیمال از گراف G نیز می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۲۱. فرض کنیم G یک گراف روی مجموعه رأسی V_G باشد. زیر مجموعه‌ی S از V_G را مجموعه مستقل[۳۷] از G گوییم اگر به ازای هر دو رأس i و j از S، $\{i , j\}$ یالی از گراف G نباشد. به عنوان مثال در گراف



مجموعه‌ی $S = \{x_۲ , x_۳ , x_۵\}$ یک مجموعه‌ی مستقل از گراف G است.

تعریف ۱-۳-۲۲. S یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال از گراف G است اگر S یک مجموعه مستقل از G باشد و هیچ زیر مجموعه‌ی مستقل از G شامل S موجود نباشد. به طور مثال در گراف



مجموعه‌ی $\{x_۲ , x_۳ , x_۴ , x_۵\}$ یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال از گراف G است.

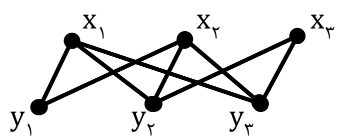
تبصره ۱-۳-۲۳. فرض کنیم G یک گراف متناهی است. بدیهی است زیرمجموعه S از V_G یک مجموعه‌ی مستقل (ماکسیمال) از G است اگر وتنها اگر $V_G \setminus S$ یک پوشش رأسی (مینیمال) از G باشد.

تعریف ۱-۳-۲۴. یک مجموعه از یال‌های گراف G را مستقل[۳۸] گوییم اگر هر دو یال از آن مجموعه دارای انتهای یکسان نباشند.

---

[37] Independent set
[38] Independent

در گراف



G

یال‌های $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$, $\{x_3, y_3\}$ یک مجموعه مستقل از یال‌ها را تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱-۳-۲۵. فرض کنیم G یک گراف متناهی باشد.

(i) در بین تعداد عضوهای تمام پوشش‌های رأسی مینیمال از گراف G کوچکترین عدد را با $\alpha_0(G)$ نشان داده و آن را عدد پوشش رأسی[39] از گراف گوییم.

(ii) بیشترین تعداد یال‌های مستقل از گراف G را با $\beta_1(G)$ نشان داده و آن را عدد استقلال[40] گراف G گوییم.

تعریف ۱-۳-۲۶. فرض کنیم G یک گراف با مجموعه رأس‌های V_G باشد و $U \subset V_G$ باشد. مجموعه‌ی مجاور با U را با $N_G(U)$ یا $N(U)$ نشان می‌دهیم و مجموعه‌ی رأس‌هایی از G است که حداقل با یکی از رأس‌های U مجاور باشد.

گزاره ۱-۳-۲۷.(ر.ک[10, 6.1.4]) فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با مجموعه های رأسی V_1 با m رأس و V_2 با n رأس باشد. اگر برای هر $A \subset V_1$، $|A| \leq |N(A)|$ باشد آنگاه m یال مستقل در G وجود دارد.

نتیجه ۱-۳-۲۸. (ر.ک[10, 6.1.5]) فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با مجموعه‌های رأسی V_1 و V_2 باشد، اگر یک عدد صحیح $p \geq 0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $A \subset V_1$، $|A| - p \leq |N(A)|$ آنگاه m - p یال مستقل در G وجود دارد که

$$m = |V_1|.$$

قضیه ۱-۳-۲۹ (König): اگر G یک گراف دوبخشی باشد آنگاه: $\beta_1(G) = \alpha_0(G)$.

برهان: فرض کنیم $V_G = V_1 \cup V_2$ یک جدا سازی برای مجموعه رأس‌های G باشد به طوری که هر یال از G، V_1 را به V_2 وصل می‌کند. فرض می‌کنیم که $r = \beta_1(G)$ و $m = |V_1|$، بنابراین چون r یال مستقل در G وجود دارد نتیجه می‌گیریم که

[39] Vertex covering number
[40] Independenece number