دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل‌هایی با بعد کوچک

استاد راهنما

دکتر شیرویه پیروی

استاد مشاور

دکتر ابراهیم وطن‌دوست

پژوهشگر

سهیلا خسروی اطهر

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: خسروی اطهر نام: سهیلا

عنوان: هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل‌هایی با بعد کوچک

استاد راهنما: دکتر شیرویه پیروی

استاد مشاور: دکتر ابراهیم وطن‌دوست

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: بین المللی امام خمینی دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۹۹

واژگان کلیدی: مدول‌های هم‌متناهی، مدول‌های مینیماکس، مدول‌های کوهمولوژی‌موضعی، ایده‌آل‌های اول وابسته، مدول‌های لسکرین، مدول‌های لسکرین ضعیف

چکیده

فرض کنید R حلقه جابجایی، نوتری، I ایده‌آلی از R و M یک R-مدول ناصفر و متناهی‌مولد باشد. t را عدد صحیح نامنفی قرار دهید به طوری که برای هر $i < t$، $dim\, Supp\, H^i_I(M) \leqslant 1$.
نشان می‌دهیم که $H^0_I(M), H^1_I(M), \cdots, H^{t-1}_I(M)$، R-مدول‌های I -هم‌متناهی هستند و $Hom_R(R/I, H^t_I(M))$ یک R-مدول متناهی‌مولد است. نتیجه می‌گیریم که اگر بعد I یک باشد ($dim\, R/I = 1$)، آن‌گاه برای هر $i \geqslant 0$، $H^i_I(M)$ یک R-مدول I -هم‌متناهی است. همچنین نشان می‌دهیم اگر R موضعی باشد و برای هر $i < t$، $dim\, Supp\, H^i_I(M) \leqslant 2$ ، آن‌گاه برای هر $i < t$ و $j \geqslant 0$، $Ext^j_R(R/I, H^i_I(M))$ و $Hom_R(R/I, H^t_I(M))$، R-مدول‌های لسکرین ضعیف هستند. در نهایت ثابت می‌کنیم اگر برای هر $i \geqslant 0$، $dim\, R/I \leqslant 2$، آن‌گاه مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول $H^i_I(M)$ متناهی است.

تقدیم به

اسطوره فداکاری پدرم

مظهر بردباری مادرم

و

مصداق عشق، همسرم

خدایا...

توان روی تو دیدن و نعمتی دیگر خواستن؟! توان رضایت تو را داشتن و چشم به دیگری دوختن؟! از تو می‌خواهم که مرا برای دیدن رویت انتخاب کنی، این تن را برای عبادتت لایق، این قلب را برای شیداییت عاشق، این چشم را برای دیدنت شایق، و این جان را به مقام قربت؛ واصل گردان، می‌خواهم یک واصل باشم. مثل هر آدم ضعیفی که در سختی‌ها بیش‌تر به یاد خدا می‌افتد و در بی‌کسی بیش‌تر می‌فهمد که خدا، تنها کس هر کسی است، خدا را به روشنی و صراحت صبحی که دارد در برابر چشم‌های منتظرم طلوع می‌کند، حس می‌کنم، می‌بینم، دست‌های لطیف و حمایت گرش را بر روی شانه‌هایم لمس می‌کنم و از این همه لطف و مهر که به این بنده حقیر و بی‌ارج ارزانی داشته است، غرق هیجان و خجلتم.

لطیفا ! چندیست که زمان برایم به سختی می‌گذرد، از همه رنجهایم با غم و اندوه به تو پناه بردم و حال با تمام وجود به تو پناه می‌برم، مرا از رنج چه غم که تو را دارم. مرا همین بس که توفیق یاد تو و همنشینی تو و بندگی تو را یابم. مهربانم ! لحظاتی بود که خنده و گریه را به هم پیوستم...خندان گریستم! لحظاتی که تنهایی بر وجودم چنگ انداخته بود و رنج توان از قدمهایم می‌گرفت، زمین خوردم، با یادت برخاستم و ادامه دادم! لحظاتی که هیچ پناهی را نمی‌یافتم و هیچ همراهی نبود، خدایا به تو پناه بردم! لحظاتی که دلم را مملو مهرت و ذهنم را سرشار یادت کردم و آن زمان آرامش یافتم...

خداوندا ! به علمای ما مسئولیت، و به روشنفکران ما ایمان، به جوانان ما اصالت، به اساتید ما عقیده و به دانشجویان ما نیز عقیده و به دینداران ما دین، به محافظه کاران ما گستاخی، به راکدین ما تکان و به مردگان ما حیات، به شیعیان ما علی(ع)، به خودبینان ما انصاف و به مردم ما خودآگاهی و به همه ملت ما همت، تصمیم و استعداد فداکاری و شایستگی نجات و عزت ببخش.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر شیرویه پیروی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر ابراهیم وطن‌دوست، که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و از جناب آقای دکتر محمد اخوی‌زادگان، که داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سهیلا خسروی اطهر

۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی، نوتری، I ایده‌آلی از R، M یک R-مدول ناصفر و متناهی‌مولد باشد. t یک عدد صحیح نامنفی باشد که برای هر $i < t$، $dim\, Supp\, H_I^i(M) \leqslant ۱$. نشان می‌دهیم برای هر $i < t$، $H_I^i(M)$ یک R-مدول I-هم‌متناهی است و $Hom_R\,(R/I, H_I^t(M))$ یک R-مدول متناهی‌مولد است. نتیجه می‌گیریم اگر بعد I یک باشد ($dim\, R/I = ۱$)، آن‌گاه برای هر $i \geqslant o$، $H_I^i(M)$ یک R-مدول I-هم‌متناهی است. همچنین نشان می‌دهیم اگر R موضعی باشد و برای هر $i < t$، $dim\, Supp\, H_I^i(M) \leqslant ۲$، آن‌گاه برای هر $i < t$ و $j \geqslant o$، $Ext_R^j\,(R/I, H_I^i(M))$ و $Hom_R\,(R/I, H_I^t(M))$، R-مدول‌های لسکرین ضعیف هستند. در نهایت ثابت می‌کنیم اگر برای هر $i \geqslant o$، $dim\, R/I \leqslant ۲$، آن‌گاه مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول $H_I^i(M)$ متناهی است.

مقدمه

این پایان‌نامه برگرفته از مقاله

K. Bahmanpour, R. Naghipour, Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of small dimension, J. Algebra 321 (2009) 1997 - 2011.

است.

موضوع این پایان‌نامه، هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل‌هایی با بعد کوچک است که در سه فصل، با عناوین، پیش زمینه، مدول‌های کوهمولوژی موضعی و هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل‌هایی با بعد کوچک مورد بررسی قرار می‌گیرد.
در این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی جابجایی، نوتری با عنصر یکه و I ایده‌آلی از R فرض شده است. همچنین t عدد صحیح نامنفی در نظر گرفته شده است.
گروتندیک [1] حدس زده است که برای هر ایده‌آل I از حلقه‌ی R و هر R–مدول متناهی‌مولد M، مدول $Hom_R(R/I, H_I^i(M))$ متناهی‌مولد است. اما کمی بعد هارتشورن[2] با ارائه مثال نقضی نشان داد که این حدس برای همه‌ی مدول‌های کوهمولوژی موضعی درست نیست و سوال زیر را مطرح کرد:
تحت چه شرایطی روی R و ایده‌آل I برای هر R–مدول متناهی‌مولد M مدول‌های $H_I^i(M)$، I–هم‌متناهی هستند؟

---

[1] Grothendieck
[2] Hartshorne

با توجه به این سوال، هارتشورن، و پس از آن چیریاسیسکو [۳] نشان دادند که اگر R یک حلقه‌ی منظم موضعی کامل و I یک ایده‌آل اول از R باشد که $dim\, R/I = ۱$، آن‌گاه برای هر R-مدول متناهی‌مولد M، $H_I^i(M)$ یک R-مدول I-هم‌متناهی است.

هونیکه و کوه [۴] ثابت کردند که اگر R یک حلقه‌ی کامل، موضعی و گرنشتاین، I ایده‌آلی از R و M،N دو R-مدول متناهی‌مولد باشند به طوری که $dim\, R/I = ۱$ و $SuppN \subseteq V(I)$، آن‌گاه برای هر i, j مدول $Ext_R^j(N, H_I^i(M))$ متناهی‌مولد است.

در نهایت دلفینو و مارلی [۵] و یاشیدا [۶] با استفاده از دنباله‌های طیفی و تغییر حلقه‌ی اصلی ثابت کردند که اگر M یک مدول متناهی‌مولد روی حلقه‌ی جابجایی، نوتری و موضعی R با ایده‌آل I باشد به طوری که $dim\, R/I = ۱$، آن‌گاه برای هر i مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H_I^i(M)$، I-هم‌متناهی هستند.

نخستین فصل این پایان‌نامه با عنوان پیش‌زمینه شامل پنج بخش است. در بخش اول مفاهیم پایه و مقدماتی و همچنین قضایا و لم‌هایی را که برای اثبات قضایای اصلی مورد نیاز هستند بدون اثبات می‌آوریم. در بخش دوم ایده‌آل‌های اول وابسته و در بخش سوم ایده‌آل‌های اول چسبیده را تعریف و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم با معرفی پوش انژکتیو یک مدول به تعریف اعداد باس و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم. بخش آخر در مورد کمال است.

فصل دوم را با تعریف و قضایای مربوط به مدول‌های کوهمولوژی موضعی شروع می‌کنیم. برای هر R-مدول M، i-امین کوهمولوژی مدول موضعی M نسبت به ایده‌آل I به صورت

---

[۳] Chiriacescu

[۴] Huneke and Koh

[۵] Delfino and Marley

[۶] Yoshida

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{n \geqslant ۱} Ext_R^i(R/I^n, M)$$

تعریف می‌شود.

در بخش دوم، نظریه مدول‌های I-هم‌متناهی را بررسی می‌کنیم. M یک R-مدول I-هم‌متناهی نامیده می‌شود، هرگاه $SuppM \subseteq V(I)$ و برای هر i مدول $Ext_R^i(R/I, M)$ متناهی‌مولد باشد. سپس خانواده‌ی مدول‌های مینیماکس را معرفی می‌کنیم. از آن جا که شرط اول تعریف مدول‌های I-هم‌متناهی برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی برقرار است، I-هم‌متناهی بودن آن‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد. به دنبال این تعریف این سوال مطرح می‌شود که:

تحت چه شرایطی مدول‌های کوهمولوژی موضعی I-هم‌متناهی هستند؟

در آخر این بخش به بررسی شرایطی می‌پردازیم که تحت آن مدول‌های $H_I^i(M)$، I-هم‌متناهی می‌شوند.

فصل سوم شامل دو بخش است. بخش اول هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی نسبت به ایده‌آل‌هایی با بعد کوچک است. در بخش دوم ابتدا مدول‌های لسکرین و لسکرین ضعیف را تعریف می‌کنیم. N یک مدول لسکرین ضعیف نامیده می‌شود، هرگاه مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به هر مدول خارج‌قسمت آن متناهی باشد. سپس ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

پیش زمینه

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز را بیان می‌کنیم. این فصل را به پنج بخش تقسیم می‌کنیم. بخش اول شامل مفاهیم و تعاریف اولیه، بخش دوم شامل ایده‌آل‌های اول وابسته است. بخش سوم در مورد ایده‌آل‌های اول چسبیده بحث می‌کند، در بخش چهارم اعداد باس و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم و در بخش آخر به تعریف کمال می‌پردازیم.

۱.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

در این بخش R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با $SpecR$ نشان می‌دهیم و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را با نماد $MaxR$ نشان می‌دهیم. اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را رادیکال ژاکبسون R می‌نامیم و با نماد $J(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ دو ایده‌آل از حلقه‌ی R باشند. ایده‌آل خارج‌قسمت $\mathfrak{a} :_R \mathfrak{b}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{a} :_R \mathfrak{b} = \{x \in R : \ x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}.$$

ایده‌آل خارج‌قسمت $o :_R \mathfrak{b}$ را پوچ‌ساز $\mathfrak{b}$ می‌نامیم و با نماد $Ann_R(\mathfrak{b})$ نشان می‌دهیم. عضو r از حلقه‌ی R را مقسوم‌علیه صفر نامیم، هرگاه $s \neq o$ در R موجود باشد که $rs = o$. مجموعه تمام مقسوم‌علیه‌های صفر R را با نماد $Z(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. حلقه‌ی جابجایی و یکدار R را حوزه‌ی صحیح نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab = o$، آن‌گاه $a = o$ یا $b = o$. یعنی R فاقد مقسوم‌علیه صفر ناصفر است.

تعریف ۳.۱.۱. اگر $X = \{x\}$ یک زیر مجموعه‌ی تک عضوی از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه ایده‌آل تولید شده توسط مجموعه‌ی X را یک ایده‌آل اصلی می‌نامیم و با نماد $< x >$ نشان می‌دهیم.

اگر R حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد، آن‌گاه

$$< x >= \{ax | a \in R\}.$$

و اگر یکدار نباشد، آن‌گاه

$$< x >= \{rx + nx | r \in R, n \in \mathbb{Z}\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. هر حوزه‌ی صحیح با ایده‌آل‌های اصلی را PID (حوزه‌ی ایده‌آل اصلی) می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. اگر D یک حوزه‌ی صحیح باشد $a, b \in D$ را دو عضو وابسته (شریک) گوییم، هرگاه عضو وارون‌پذیر $u \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $a = ub$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید D یک حوزه‌ی صحیح باشد و $p \in D$. p را در D تحویل‌ناپذیر گوییم، هرگاه

i) $p \neq o$ و p وارون‌پذیر نباشد،

ii) هرگاه p به‌صورت $p = ab$ با $a, b \in D$ نوشته شود، آن‌گاه a یا b یک عضو وارون‌پذیر باشد.

تعریف ۷.۱.۱. حوزه‌ی صحیح D را یک UFD (حوزه‌ی تجزیه یکتا) می‌نامیم، هرگاه برای هر عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر مانند a در D داشته باشیم:

i) a به شکل حاصل ضرب تعداد متناهی عامل تحویل‌ناپذیر در D تجزیه شود.

ii) اگر $a = p_1p_2\cdots p_r = q_1q_2\cdots q_s$ دو تجزیه از a باشد، آن‌گاه $r = s$ و با تغییر ترتیب q_iها در صورت لزوم به ازای هر i، p_i و q_i وابسته باشند.

تعریف ۸.۱.۱. برای هر ایده‌آل I از R مجموعه‌ی $\{\mathfrak{p} \in SpecR : \mathfrak{p} \supseteq I\}$ را واریته‌ی I می‌نامیم و با نماد $V(I)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. برای هر ایده‌آل I از R رادیکال I را مجموعه‌ی $\{x \in R : \ x^n \in I, \ \exists\, n \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم و با نماد $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۰.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه‌ی جابجایی R باشد. در این صورت*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}.$$

برهان. برای اثبات به لم ۴۸.۳ از [۳۷] مراجعه نمایید. □

قضیه ۱۱.۱.۱. (*لم ناکایاما*) *فرض کنید I ایده‌آلی از R مشمول در $J(R)$ و M یک R-مدول متناهی‌مولد باشد. در این صورت اگر $IM = M$ آن‌گاه $M = o$.*

برهان. برای اثبات به گزاره‌ی ۶.۲ از [۱] مراجعه نمایید. □

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر R-مدول M را با نماد $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم و

$$Z_R(M) = \{r \in R : \exists\, o \neq m \in M, rm = o\}.$$

فرض کنید M یک R-مدول و L، N دو زیرمدول از M باشند. در این صورت ایده‌آل خارج‌قسمتی $N :_R L$ را به صورت

$$N :_R L = \{r \in R : rL \subseteq N\}$$

تعریف می‌کنیم. با فرض $N = o$، ایده‌آل حاصل را پوچ‌ساز L می‌نامیم و با نماد $Ann_R(L)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید M یک R-مدول و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. در این صورت $S = R \backslash \mathfrak{p}$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R است. در این حالت $S^{-1}M$ را با نماد $M_{\mathfrak{p}}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید M یک R-مدول باشد. محمل M در R را با نماد $Supp_R(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Supp_R(M) = \{\mathfrak{p} \in SpecR : \ M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

اگر M یک R-مدول متناهی‌مولد باشد، آن‌گاه

$$Supp_R(M) = V(Ann(M)) = \{\mathfrak{p} \in SpecR : \exists\, o \neq m \in M, \ Ann(m) \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

در صورتی که حلقه مشخص باشد از $Supp(M)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. بعد مدول M به صورت $dim(M)$ نشان داده می‌شود و برابر است با سوپریمم طول زنجیرهای اکید از ایده‌آل‌های اول به صورت $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset ... \subset \mathfrak{p}_n$ در $Supp(M)$ که n طول زنجیر است. در صورتی که سوپریمم وجود نداشته باشد $dim(M) = \infty$ و اگر $M = o$ بنا بر قرارداد می‌نویسیم $dim(M) = -1$.

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنید $o \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow o$ دنباله‌ی دقیق کوتاه از R-مدول‌ها و R-هم‌ریختی‌ها باشد. در این صورت M یک R-مدول نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر L و N نوتری (آرتینی) باشند.*

برهان. به نتیجه‌ی ۱۹.۷ از [۳۷] مراجعه نمایید. □

قضیه ۱۷.۱.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد. اگر R حلقه‌ای نوتری (آرتینی) باشد، آن‌گاه هر R-مدول متناهی‌مولد، نوتری (آرتینی) است.*

برهان. به نتیجه‌ی ۲۲.۷ از [۳۷] مراجعه نمایید. □

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید E یک R-مدول باشد. R-مدول E را انژکتیو [۱] نامیم، هرگاه به ازای هر نمودار مانند

$$\begin{tikzcd} o \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & E & \end{tikzcd}$$

از R-مدول‌ها و R-هم‌ریختی‌ها با سطر دقیق، بتوان R-هم‌ریختی $E \longrightarrow B$ را یافت به طوری که $ABE = AE$.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. دنباله‌ی

$$o \longrightarrow M \longrightarrow E^o \longrightarrow E^{۱} \longrightarrow \dots \longrightarrow E^n \longrightarrow \dots$$

از R-مدول‌ها و R-هم‌ریختی‌ها یک تحلیل انژکتیو [۲] برای M است، هرگاه یک دنباله‌ی دقیق باشد و همه E^iها انژکتیو باشند.

---
[۱] Injective
[۲] Injective resolution

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید P یک R-مدول باشد. R-مدول P را تصویری [۳] نامیم، هرگاه به ازای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow & & \\ M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & o \end{array}$$

از R-مدول‌ها و R-هم‌ریختی‌ها با سطر دقیق، بتوان R-هم‌ریختی $P \longrightarrow M$ را یافت به طوری که $PMN = PN$.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد، دنباله‌ی

$$P_M : \cdots \longrightarrow p_n \xrightarrow{d_n} p_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow p_1 \xrightarrow{d_1} p_o \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow o$$

یک تحلیل تصویری برای M است، هرگاه دنباله‌ی فوق دقیق و همه‌ی p_i ها تصویری باشند.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید M و N دو R-مدول باشند و

$$o \longrightarrow N \longrightarrow E^o \longrightarrow E^1 \longrightarrow ... \longrightarrow E^n \longrightarrow ...$$

یک تحلیل انژکتیو برای N باشد از اثر تابعگون هموردا $Hom_R(M,-)$ روی دنباله‌ی دقیق فوق همبافت

$$o \longrightarrow Hom(M,E^o) \longrightarrow Hom(M,E^1) \longrightarrow ... \longrightarrow Hom(M,E^n) \longrightarrow ...$$

حاصل می‌شود. $n-$امین همولوژی مدول این همبافت را با نماد $Ext^n_R(M,N)$ نشان می‌دهیم. همچنین با انتخاب یک تحلیل تصویری برای M و اثر تابعگون پادورد $Hom_R(-,N)$ روی آن می‌توان نشان داد که $n-$امین همولوژی مدول همبافت حاصل با $Ext^n_R(M,N)$ یک‌ریخت است. همچنین $Ext^o_R(M,N)$ به طور طبیعی با $Hom_R(M,N)$ هم‌ارز است.

[۳] Projective

قضیه ۲۳.۱.۱.

i) اگر M یک R-مدول تصویری باشد، آن‌گاه برای هر R-مدول N و برای هر $i \geqslant 1$، $Ext^i_R(M,N)=o$.

ii) اگر N یک R-مدول انژکتیو باشد، آن‌گاه برای هر R-مدول M و برای هر $i \geqslant 1$، $Ext^i_R(M,N)=o$.

برهان. برای اثبات به قضیه‌ی ۷.۷ از [۱۸] مراجعه نمایید. □

قضیه ۲۴.۱.۱. *اگر M و N دو R-مدول متناهی‌مولد باشند، آن‌گاه برای هر $i \geqslant o$، $Ext^i_R(M,N)$ متناهی‌مولد است.*

برهان. برای اثبات به ۲۱.۹ از [۳۵] مراجعه نمایید. □

گزاره ۲۵.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R، M یک R-مدول متناهی‌مولد و N یک R-مدول دل‌خواه باشد. فرض کنید $p \geqslant o$ عدد صحیح دل‌خواه و ثابت باشد. اگر برای هر $i \leqslant p$ مدول $Ext^i_R(M,N)$ متناهی‌مولد باشد، آن‌گاه برای هر $i \leqslant p$ و هر R-مدول متناهی‌مولد L با $Supp\, L \subseteq Supp\, M$ مدول $Ext^i_R(L,N)$ متناهی‌مولد است.*

برهان. برای اثبات به گزاره‌ی ۱ از [۱۱] مراجعه نمایید. □

نتیجه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R و N یک R-مدول باشد. در این صورت عبارات زیر هم‌ارزند:*

(۱) *برای هر $i \geqslant o$ مدول $Ext^i_R(R/I,N)$ متناهی‌مولد است؛*

(۲) *برای هر $i \geqslant 0$ و هر ایده‌آل $I \subseteq J$ مدول $Ext^i_R(R/J, N)$ متناهی‌مولد است؛*

(۳) *برای هر $i \geqslant 0$ و هر ایده‌آل اول مینیمال $\mathfrak{p}$ روی I مدول $Ext^i_R(R/\mathfrak{p}, N)$ متناهی‌مولد است.*

برهان. اثبات (۱) به (۲) و (۲) به (۳) با توجه به گزاره‌ی ۲۵.۱.۱ واضح است. کافی است (۳) به (۱) را نشان دهیم. فرض کنید $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌های اول مینیمال I باشند و

$$M = R/\mathfrak{p}_1 \oplus \ldots \oplus R/\mathfrak{p}_n.$$

در این صورت برای هر i مدول $Ext^i_R(M, N)$ متناهی‌مولد است. چون $Supp\, R/I = Supp\, M$، پس از گزاره ۲۵.۱.۱ نتیجه می‌شود که $Ext^i_R(R/I, N)$ یک R-مدول متناهی‌مولد است. $\square$

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول ناصفر و متناهی‌مولد باشد و x_1،...،x_n عناصری از R باشند. $x_1, \cdots, x_n$ را یک M-رشته منظم نامیم، هرگاه

(۱) x_1 روی M مقسوم‌علیه صفر نباشد و برای هر $i = 2, \cdots, n$ عنصر x_i روی $M \setminus \sum_{j=1}^{i-1} x_j M$ مقسوم‌علیه صفر نباشد.

(۲) $M \neq \sum_{j=1}^{n} x_j M$.

طول M-رشته‌های ماکزیمال در ایده‌آل I مقدار ثابتی است، این عدد را درجه‌ی I در M می‌نامیم و با $grade_M(I)$ نشان می‌دهیم.

اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی باشد، آن‌گاه هر M-رشته در $\mathfrak{m}$ قرار می‌گیرد، در این حالت $grade_M(\mathfrak{m})$ را با $depth M$ نشان می‌دهیم، که طول بلندترین M-رشته موجود است.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R و I یک ایده‌آل دل‌خواه و واقعی از R باشد.

i) ارتفاع [۴] ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را با $ht(\mathfrak{p})$ نشان می‌دهیم و آن را سوپریمم طول زنجیرهای اکید از ایده‌آل‌های اول که به $\mathfrak{p}$ ختم می‌شوند، تعریف می‌کنیم و اگر سوپریمم موجود نباشد آن را ∞ در نظر می‌گیریم.

ii) ارتفاع ایده‌آل I را با $ht(I)$ نشان می‌دهیم و آن را کوچکترین ارتفاع بین ایده‌آل‌های اول مینیمال I تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. حلقه‌ی نوتری R را کوهن-مکالی [۵] نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آل واقعی I از R، $ht(I) = grade(I)$.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای نوتری و موضعی با بعد n باشد و $k = R/\mathfrak{m}$.

(الف) R را یک حلقه گرنشتاین [۶] نامیم، هرگاه R کوهن-مکالی باشد و $Ext_R^n(k, R) \cong k$.

(ب) R را منظم نامیم، هرگاه $dimR = dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

لم ۳۱.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی نوتری، موضعی و منظم باشد. در این صورت R حلقه‌ای گرنشتاین و در نتیجه کوهن-مکالی است.*

برهان. برای اثبات به قضیه‌ی ۲۰.۱.۳ از [۸] مراجعه نمایید. □

۲.۱ ایده‌آل‌های اول وابسته

تعریف ۱.۲.۱. ایده‌آل Q در حلقه‌ی R اولیه نامیده می‌شود، هرگاه Q یک ایده‌آل واقعی از R باشد و برای هر $x, y \in R$ اگر $xy \in Q$، آن‌گاه $x \in Q$ یا $y^n \in Q$ به ازای یک عدد صحیح مثبت n. به عبارت دیگر Q اولیه است، هرگاه

[۴] Height
[۵] Cohen-Macaulay
[۶] Gorenstein

$$xy \in Q \Longrightarrow x \in Q \text{ یا } y \in \sqrt{Q}.$$

در نتیجه هر ایده‌آل اول یک ایده‌آل اولیه است ولی عکس آن درست نیست.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از R و $I = \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ تجزیه اولیه و مینیمال I باشد که در آن برای هر i، $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$. در این صورت ایده‌آل‌های اول $\{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}$ به طور منحصر بفردی توسط I تعیین می‌شود. این ایده‌آل‌ها را ایده‌آل‌های وابسته به I می‌نامیم و آن را با $ass(I)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد، ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R را ایده‌آل اول وابسته به M می‌نامیم، هرگاه $0 \neq m \in M$ موجود باشد که $\mathfrak{p} = Ann_R(m)$.

تعریف ۴.۲.۱. اگر M یک R-مدول باشد، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با نماد $Ass_R(M)$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$Ass_R(M) = \{\mathfrak{p} \in SpecR : \exists\, o \neq m \in M,\ Ann(m) = \mathfrak{p}\}.$$

در صورتی که حلقه مشخص باشد از $Ass(M)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۱. برای هر R-مدول L، $\{\mathfrak{p} \in Ass_R L : dimR/\mathfrak{p} = dimL\}$ را مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال $Ass_R L$ می‌نامیم و آن را با نماد $Assh_R L$ یا $mAss_R L$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه و M و M' دو R-مدول باشند به طوری که $M \cong M'$. در این صورت داریم $Ass(M) = Ass(M')$.*

برهان. برای اثبات به صفحه ۱۸۰ از [۳۷] مراجعه نمایید. □

قضیه ۷.۲.۱. *فرض کنید M یک R-مدول باشد و $\mathfrak{p} \in Ass(M)$. در این صورت M زیرمدولی مانند N دارد که $N \cong R/\mathfrak{p}$. در نتیجه $Hom_R(R/\mathfrak{p}, M) \neq o$.*