دانشکده علوم

گروه ریاضی

گزارش پایانی پایان نامه

عنوان

روش تکراری فوق تخفیف شتاب داده شده برای مسأله‌ی کمترین مربعات با رتبه‌ی ناقص

استادان راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

دکتر بهرام فرهادی‌نیا

توسط

سید حسن عزیزی چپرپردی

دانشگاه محقق اردبیلی

آذر ۱۳۸۹

نام خانوادگی: عزیزی چپرپردی **نام:** سید حسن

عنوان پایان‌نامه: روش تکراری فوق تخفیف شتاب داده شده برای مسأله‌ی کمترین مربعات با رتبه‌ی ناقص

استادان راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

دکتر بهرام فرهادی نیا

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** کاربردی

دانشگاه: محقق اردبیلی

دانشکده: علوم **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۱۳۸۹/۹/۲ **تعداد صفحه:۹۳**

کلید واژه‌ها: مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم، رتبه‌ی ناقص، روش تکراری AOR، روش تکراری JOR، روش تکراری گوس– سایدل، نیمه‌همگرایی، پارامتر بهینه، عامل همگرایی بهینه

چکیده: در این پایان نامه نیمه‌همگرایی روش تکراری فوق تخفیف شتاب داده شده (AOR) برای مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم با رتبه‌ی ناقص را مطالعه می‌کنیم. شرایط لازم و کافی برای نیمه‌همگرایی روش‌های تکراری AOR، JOR و گوس– سایدل بیان شده است. پارامترهای بهینه و عامل همگرایی وابسته بدست آمده است و در پایان چند مثال عددی برای روشن ساختن نتایج نظری آورده‌ایم.

چکیده

در این پایان نامه نیمه‌همگرایی روش تکراری فوق تخفیف شتاب داده شده (AOR) برای مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم با رتبه‌ی ناقص را مطالعه می‌کنیم. شرایط لازم و کافی برای نیمه‌همگرایی روش‌های تکراری AOR، JOR و گوس– سایدل بیان شده است. پارامترهای بهینه و عامل همگرایی وابسته بدست آمده است و در پایان چند مثال عددی برای روشن ساختن نتایج نظری آورده‌ایم.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم یکی از مسائل مهم مهندسی و علوم می‌باشد. این مسأله در برازش داده‌ها و پردازش تصاویر[۱] و... کاربرد دارد. دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \qquad (۱)$$

که در آن $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ با $m \geq n$ و $\mathrm{rank}(A) = k < n$، بعلاوه $b \in \mathbb{C}^m$ و $x \in \mathbb{C}^n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ که در آن $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n ستون‌های A می‌باشند. در حالتی که $b \in \mathrm{span}\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، دستگاه $Ax = b$ با روش‌های عددی قابل حل می‌باشد. اما اگر $b \notin \mathrm{span}\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، آنگاه دستگاه $Ax = b$ جواب ندارد. در این حالت به دنبال y ای هستیم که در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$||b - Ay||_۲ = \min_{x\in\mathbb{C}^n} ||b - Ax||_۲ .$$

این مسأله به مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم[۲] معروف است.

در این پایان نامه برای بدست آوردن این جواب، از دستگاه $Ax = b$ دستگاه افزوده $\tilde{A}z = \tilde{b}$، که جزئیات آن در فصل سوم آمده است، را تشکیل می‌دهیم و این دستگاه را حل می‌کنیم. به طور کلی روش‌های حل این دستگاه همانند دستگاه $Ax = b$ دو دسته‌اند: روش‌های مستقیم و روش‌های تکراری.

الف— روش‌های مستقیم: روش‌هایی هستند که در آنها پس از تعداد متناهی اعمال حسابی به جواب دستگاه (جواب واقعی) می‌رسیم. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توانیم به روش حذفی گوس[۳] و روش گوس — جردن[۴] اشاره کنیم [۱۴].

ب — روش‌های تکراری: در روش‌های تکراری با استفاده از یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، دنباله‌ای از بردارها تولید می‌شود که به جواب دستگاه همگرا است. روش‌های

---

۱ image processing

۲ least squares problems

۳ Gaussian elimination

۴ Gauss-Jordan elimination

تکراری نیز خود شامل روش‌های ایستا [۵] و غیر ایستا [۶] می‌باشند. از روش‌های تکراری غیر ایستا می‌توان به QMR [۷] [۵]، CG [۸] [۷]، GMRES [۹] [۱۳] و FOM [۱۰] [۱۲] اشاره کرد. در یک روش ایستا ماتریس تکرار در همه‌ی گام‌های تکرار ثابت می‌باشد و تغییر نمی‌کند. به طور کلی در یک روش ایستا دستگاه معادلات خطی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x = Tx + f,$$

و سپس دنباله‌ای مثل $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + f$ ساخته می‌شود. حال شرایطی را فراهم می‌کنیم به طوری که این دنباله با هر نقطه شروع $x^{(0)}$ به جواب دستگاه، یعنی $x = A^{-1}b$ همگرا شود (در صورتی که A نامنفرد باشد). به سادگی می‌توان ثابت کرد، هنگامی که A یک ماتریس نامنفرد است، شرط لازم و کافی برای اینکه $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + f$ به ازای هر حدس اولیه‌ی $x^{(0)}$ به جواب واقعی همگرا باشد این است که $\rho(T) < 1$ [۱۲، ۱۴]. اما هنگامی که ماتریس ضرایب A منفرد است، بحث همگرایی جای خود را به نیمه‌همگرایی می‌دهد. به این معنا که دنباله $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + f$ به ازای هر نقطه شروع $x^{(0)}$ به یکی از جواب‌های دستگاه همگرا خواهد شد. اما ممکن است یک روش تکراری ایستا هنگامی که ماتریس ضرایب A منفرد است، همگرا نشود و یا به کندی به جواب همگرا شود. بنابراین برای استفاده از روش‌های تکراری، باید مواردی را برای بهبود سرعت همگرایی در نظر بگیریم که از جمله‌ی این موارد انتخاب پارامترهای بهینه برای این روش‌ها است.

به منظور بدست آوردن جواب کمترین توان‌های دوم برای دستگاه (۱) میلر [۱۱] و نیومن [۱۲] در [۱۰] ابتدا روش SOR چهار– بلوکی [۱۳] را پیشنهاد کردند. آنها در مقاله خود بازه نیمه‌همگرایی روش SOR و پارامتر تخفیف بهینه که عامل همگرایی را می‌نیمم می‌کند، بدست آوردند. همچنین آنها یک روش برای تبدیل جواب حاصل از ماتریس دستگاه افزوده، که به روش

[۵] stationary iterative methods

[۶] nonstationary iterative methods

[۷] quasi minimal residual

[۸] conjugate gradient

[۹] general minimal residual

[۱۰] full ortogonalization method

[۱۱] Miller

[۱۲] Neumann

[۱۳] 4-block SOR

تکراری SOR بدست می‌آید را به جواب مسأله‌ی اصلی ارائه کردند. بعداً تیان[۱۴] در [۱۵] نتیجه‌های میلر و نیومن را به روش تکراری AOR بسط داد، اگرچه اشتباه جزئی در جواب‌های نیمه‌همگرایی او وجود داشت. اخیراً در [۳] یک نتیجه تصحیح شده پیشنهاد شده است.

در این پایان نامه، نیمه‌همگرایی روش تکراری فوق تخفیف شتاب داده شده (AOR)، برای مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم برای دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ با رتبه‌ی ناقص را مطالعه می‌کنیم. ماتریس افزوده و دستگاه حاصل از آن یعنی $\tilde{A}z = \tilde{b}$ تشکیل داده می‌شود و شرایط لازم و کافی برای نیمه‌همگرایی روش‌های تکراری AOR، JOR و گوس– سایدل بیان می‌شود و روی نیمه‌همگرایی روش‌های تکراری AOR، JOR و گوس– سایدل تولید شده با تعدادی شکافت مختلف، از ماتریس ضرایب افزوده $\tilde{A}$ که از دستگاه $Ax = b$ بدست می‌آید و پارامترهای بهینه و عامل همگرایی وابسته‌ی آنها که اخیراً توسط هوانگ[۱۵] و سانگ[۱۶] در [۸] بیان شده را با جزئیات بیشتر و مثال‌های عددی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل اول این پایان نامه برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم پس از معرفی روش‌های تکراری ایستا، به معرفی روش‌های برونیابی شده پرداخته می‌شود. در فصل سوم شرایط لازم و کافی برای نیمه‌همگرایی روش‌های تکراری AOR، JOR و گوس– سایدل، پارامترهای بهینه و عامل همگرایی وابسته‌ی آنها، بیان می‌شود و در فصل چهارم جهت روشن شدن مطالب و تائید نتایج نظری به بررسی نتایج عددی می‌پردازیم.

[۱۴] Tian
[۱۵] Huang
[۱۶] Song

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \qquad (۱)$$

که در آن $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $x \in \mathbb{C}^n$ و $b \in \mathbb{C}^m$ را در نظر بگیرید. همانطور که در پیش گفتار اشاره شد، بعضی از مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱ : فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ در این صورت:

- ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی [۱] گویند، هرگاه برای هر $i > j$ $(i < j)$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$ و ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی اکید [۲] گویند، هرگاه برای هر $i \geq j$ $(i \leq j)$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

[۱] upper(lower) triangular

[۲] strictly upper(lower) triangular

- ماتریس $A=(a_{ij})$ را قطری [3] گویند، هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij}=0$ و به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$A=diag(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}).$$

- ماتریس I را همانی [4] گویند، هرگاه $I=\{\delta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ که δ_{ij} را دلتای کرونکر [5] می‌گویند.
- ماتریس A را یک ماتریس جایگشت [6] گویند، هرگاه ستون‌های آن جایگشتی از ستون‌های ماتریس همانی باشند.
- یک ماتریس قطری بلوکی [7] کاملاً مشابه یک ماتریس قطری تعریف می‌شود، با این تفاوت که بجای درایه‌های قطری آن، ماتریس‌هایی جایگزین می‌شوند. یک ماتریس قطری بلوکی به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$A=diag(A_{11},A_{22},\dots,A_{nn}),$$

که در آن A_{ii} ها ماتریس هستند.

- ماتریس A را نامنفرد [8] گویند، هرگاه $\det(A)\neq 0$ و منفرد [9] گویند، هرگاه $\det(A)=0$.

تعریف ۲.۱ : ترانهاده‌ی [10] ماتریس $A_{m\times n}=(a_{ij})$ با A^T نشان داده می‌شود و یک ماتریس $n\times m$ است، به طوری که از تعویض سطر و ستون‌های A بدست آمده است. به عبارت دیگر $A^T=(a_{ji})$. ماتریس A را متقارن [11] گویند، هرگاه

$$A^T=A.$$

تعریف ۳.۱ : فرض کنید $A_{m\times n}=(a_{ij})$ که $a_{ij}\in\mathbb{C}$. در این صورت مزدوج [12] ماتریس A عبارت است از $\overline{A}=(\overline{a}_{i,j})$ و ترانهاده مزدوج [13] A برابر است با $\overline{A}^T=\overline{A^T}$ که آن را با A^H یا A^*

[3] diagonal
[4] identity
[5] Kronecker delta
[6] permutation
[7] block diagonal
[8] nonsingular
[9] singular
[10] transpose
[11] symmetric
[12] conjugate
[13] conjugate transpose

نشان می‌دهند. ماتریس A را هرمیتی [۱۴] گویند، هرگاه

$$A^H = A,$$

و آن را هرمیتی کج [۱۵] گویند، هرگاه

$$A^H = -A.$$

تعریف ۴.۱ : ماتریس مختلط $A^{n\times n}$ را معین مثبت هرمیتی (HPD) [۱۶] گویند، هرگاه

(الف) $A^H = A$ (A هرمیتی باشد)،

(ب) به ازای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم $x^H Ax > 0$.

ماتریس A را نیمه معین مثبت هرمیتی (SHPD) [۱۷] گویند، هرگاه (الف) برقرار باشد و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم $x^H Ax \geq 0$.

ماتریس حقیقی $A^{n\times n}$ را معین مثبت متقارن (SPD) [۱۸] گویند، هرگاه

(ج) $A^T = A$ (A متقارن باشد)،

(د) به ازای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $x^T Ax > 0$.

ماتریس A را نیمه معین مثبت متقارن گویند، هرگاه (ج) برقرار باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $x^T Ax \geq 0$.

تعریف ۵.۱ : یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی یا مختلط V تابع‌ای است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V اسکالر حقیقی یا مختلط (x, y) نسبت می‌دهد به طوری که در شرایط زیر صدق کند

(الف) (x, x) حقیقی باشد و $(x, x) \geq 0$. بعلاوه $(x, x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(ب) برای هر اسکالر α، $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$.

(ج) برای هر $z \in V$، $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

(د) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

---

[۱۴] Hermitian

[۱۵] skew Hermitian

[۱۶] Hermitian positive definition

[۱۷] Hermitian positive semidefinite

[۱۸] symmetric positive definite

هر فضای برداری حقیقی یا مختلط که یک ضرب داخلی در آن تعریف شده باشد، یک فضای حاصلضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱ : ضرب داخلی استاندارد برای دو بردار

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T, \qquad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T,$$

را با (u, v) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(u, v) = u^H v = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i \,.$$

تعریف ۷.۱ : یک نرم برداری روی فضای حقیقی یا مختلط V تابع‌ای است مثل $||.||$ از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند

(الف) به ازای هر $x \in V$، $||x|| \geq 0$. بعلاوه $||x|| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $||\alpha x|| = | \alpha | \, ||x||$؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$(نامساوی مثلث).

هر ضرب داخلی، مانند ضرب داخلی استاندارد تعریف شده در ۶.۱ روی فضای برداری، یک نرم تولید می‌کند. کافی است برای ضرب داخلی $(.\,,.)$ قرار دهیم $||.|| = (.\,,.)^{1/2}$. نرم‌های برداری متداول و پر کاربرد در جبرخطی، حالت‌های خاصی از نرم هلدر [19]

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

می‌باشند. در حالت‌های $p = 1$، $p = 2$ و $p = \infty$ نرم‌های مهم زیر تولید می‌شوند

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,$$

$$||x||_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2},$$

$$||x||_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|.$$

تعریف ۸.۱ : λ یک مقدار ویژه‌ی [20] ماتریس A متناظر به بردار ویژه x [21] است، هرگاه $Ax = \lambda x$ و $x \neq 0$. در این صورت زوج مرتب $(\lambda \,, \mathrm{x})$ را یک زوج ویژه‌ی A گویند.

[19] Holder
[20] eigenvalue
[21] eigenvector

تعریف ۹.۱ : بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A از حیث قدر مطلق را، شعاع طیفی [22] ماتریس A گویند و با $\rho(A)$ نشان می‌دهند، به عبارت دیگر

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \ \sigma(A)} |\lambda| \,,$$

که در آن $\sigma(A)$ مجموعه تمام مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد، و به آن طیف [23] ماتریس A گویند.

تعریف ۱۰.۱ : فرض کنید $(V, \mathbb{F})$ یک فضای برداری و $X = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_k\}$ به طوری که $v_i \in V$، $i = ۱, \ldots, k$. در این صورت مجموعه‌ی گسترنده‌ی X را با $\text{span}(X)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{span}(X) = \text{span}\{v_۱, v_۲, \ldots, v_k\} = \{v : v = \alpha_۱ v_۱ + \ldots + \alpha_k v_k \ ; \ \alpha_i \in \mathbb{F}, \ v_i \in X\}.$$

تعریف ۱۱.۱ : برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ دو زیر فضای مهم بُرد[24] و فضای پوچ [25] A را می‌توان به ترتیب به صورت زیر تعریف کرد

$$R(A) = \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax \text{ ،} \mathbb{C}^n \text{ به ازای } x \text{ ی در } \},$$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = ۰\}.$$

به وضوح اگر $A = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$، آنگاه $R(A) = \text{span}\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$.

تعریف ۱۲.۱ : حداکثر تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی ماتریس A را رتبه‌ی [26] ماتریس A گویند و با $\text{rank}(A)$ نشان می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که

$$rank(A) = \dim(R(A)).$$

تعریف ۱۳.۱ : فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_s\}$.

- چند جمله‌ای مشخصه [27] A عبارت است از: $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

[22] spectral radius
[23] spectrum
[24] range
[25] null space
[26] dimension
[27] characteristic polynomial

- تکرار جبری [۲۸] مقدار ویژه λ، تعداد تکرارهای λ به عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A است و با $alg\ mult_A(\lambda)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر $alg\ mult_A(\lambda) = a_i$ اگر و تنها اگر

$$(x-\lambda_1)^{a_1}(x-\lambda_2)^{a_2}\cdots(x-\lambda_s)^{a_s} = 0.$$

- هنگامی که $alg\ mult_A(\lambda) = 1$، λ یک مقدار ویژه ساده [۲۹] نامیده می‌شود.

- تکرار هندسی مقدار ویژه‌ی λ، برابر با $dim N(A-\lambda I)$ است و با $geo\ mult_A(\lambda)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر تکرار هندسی λ تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی نظیر مقدار ویژه λ می‌باشد.

- هنگامی که $alg\ mult_A(\lambda) = geo\ mult_A(\lambda)$ ، λ یک مقدار ویژه نیمه ساده [۳۰] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱ : اندیس [۳۱] ماتریس A، کوچکترین عدد صحیح نامنفی k است، به طوری که حداقل یکی از عبارت‌های زیر برقرار باشد

$$(i)\quad \mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^{k+1}),$$

$$(ii)\quad R(A^k) = R(A^{k+1}),$$

$$(iii)\quad N(A^k) = N(A^{k+1}).$$

و برای ماتریس‌های نامنفرد، اندیس صفر تعریف می‌شود.

- اندیس مقدار ویژه‌ی [۳۲] λ از A، اندیس ماتریس $A-\lambda I$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۵.۱ : ماتریس A همگرا [۳۳] نامیده می‌شود، هرگاه $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ موجود و برابر صفر باشد و نیمه‌همگرا [۳۴] نامیده می‌شود، هرگاه $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ موجود و نه لزوماً برابر صفر باشد.

[۲۸] algebraic multiplicity
[۲۹] simple eigenvalue
[۳۰] semisimple eigenvalue
[۳۱] index
[۳۲] index of eigenvalue
[۳۳] convergent matrix
[۳۴] semiconvergent matrix

تعریف ۱۶.۱ : فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ مقادیر ویژه $B = A^H A$ باشند. قرار می‌دهیم

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

مقادیر $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ را مقادیر تکین [۳۵] A گویند.

تعریف ۱۷.۱ : فرض کنید $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$. در این صورت $A = M - N$ را یک "شکافت" از A گویند، هرگاه M نامنفرد باشد.

تعریف ۱۸.۱ : فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. در این صورت ماتریس‌های A و B را متشابه گویند، هرگاه ماتریس وارون پذیری چون P موجود باشد به طوری که

$$B = P^{-1}AP.$$

تعریف ۱۹.۱ : عدد شرط ماتریس A با $cond(A)$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

می‌توان دید که برای هر ماتریس A داریم $cond(A) \geq 1$. برای دستگاه‌های خوش حالت این عدد کوچک و در صورتی‌که این عدد بزرگ باشد، دستگاه بد حالت است.

۳.۱ قضایا

قضیه ۱.۱: مقادیر ویژه ماتریس‌های هرمیتی کج، موهومی محض هستند.

اثبات: با توجه به تعریف ضرب داخلی استاندارد داریم

$$(x, Ay) = x^H Ay = (A^H x)^H y = (A^H x, y).$$

فرض کنید $(\lambda\ ,\ x)$ یک زوج ویژه‌ی A باشد. با توجه به تعریف ضرب داخلی

$$\lambda(x, x) = (x, \lambda x) = (x, Ax) = (A^H x, x) = (-Ax, x) = (-\lambda x, x) = -\bar{\lambda}(x, x).$$

[۳۵] singular value

در نتیجه

$$\lambda = -\bar{\lambda},$$

که این رابطه نشان می‌دهد λ موهومی محض است. □

قضیه ۲.۱: فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $B = A^H A$. همچنین فرض کنید $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ مقادیر تکین A باشند، در این صورت

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sigma_1.$$

اثبات: به [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۳.۱: فرض کنید که A یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه مقادیر ویژه آن مثبت هستند، همچنین

$$\det(A) > 0.$$

اثبات: به [۱۴] رجوع شود. □

قضیه ۴.۱: ماتریس‌های متشابه چند جمله‌ای مشخصه یکسان دارند. بنابراین طیف ماتریس‌های متشابه یکسان هستند.

اثبات: به [۹] رجوع شود. □

قضیه ۵.۱: فرض کنید S یک ماتریس مربعی به صورت

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

باشد. اگر A^{-1} موجود باشد، آنگاه

$$\det(S) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B),$$

و اگر D^{-1} موجود باشد، آنگاه

$$\det(S) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C).$$

اثبات: با توجه به اینکه

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

نتیجه واضح است. اثبات مورد دیگر نیز به طور مشابه بدست می‌آید. □

قضیه ۶.۱ (شکل کانونی جردن [۳۶]): برای هر ماتریس A با مقادیر ویژه متمایز λ_1، λ_2، ...، λ_s ماتریس نامنفردی چون P موجود است چنان که

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

و

$$J(\lambda_j) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}, \quad J_*(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

ماتریس J شکل جردن ماتریس A نامیده می‌شود.

اثبات: به [۹] رجوع شود. □

قضیه ۷.۱: فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و k کوچکترین عدد صحیح نامنفی باشد به طوری که بتوان A^k را به صورت

$$A^k = \prod_{i=1}^{k} B_i \prod_{i=1}^{k} G_{k+1-i},$$

نوشت که هر کدام از ماتریس‌های B_1، B_2، ...، B_k و $\prod_{i=1}^{k} B_i$ دارای رتبه‌ی ستونی کامل و هر کدام از ماتریس‌های G_1، G_2، ...، G_k و $\prod_{i=1}^{k} G_{k+1-i}$ دارای رتبه‌ی سطری کامل باشند و همچنین ماتریس‌های B_i و G_i با رابطه‌های زیر مشخص شوند

$$A = B_1G_1,$$

و

$$G_iB_i = B_{i+1}G_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

---

[۳۶] Jordan canonical form

آنگاه شرایط زیر معادلند.

(الف) G_kB_k نامنفرد است؛

(ب) A دارای اندیس k است.

اثبات: به [۴] رجوع شود. □

قضیه۱.۸: فرض کنید $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ به طوری که $\operatorname{rank}(B) = r$ و

$$J = \begin{pmatrix} \circ_{m\times m} & B \\ -B^H & \circ_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

در این صورت J یک ماتریس هرمیتی کج و مقادیر ویژه غیر صفر آن $\lambda_i = \pm i\sigma_i$، $i = ۱,۲,\dots,r$ هستند که در آن σ_i، $i = ۱,۲,\dots,r$ مقادیر تکین غیر صفر B می‌باشند. بعلاوه

$$\rho(J) = \|B\|_۲ .$$

اثبات: فرض کنید λ مقدار ویژه J باشد، آنگاه

$$\begin{pmatrix} \circ & B \\ -B^H & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$\begin{cases} Bx_۲ = \lambda x_۱, \\ -B^H x_۱ = \lambda x_۲. \end{cases}$$

به سادگی می‌توان دید

$$-B^H B x_۲ = -\lambda B^H x_۱ = \lambda^۲ x_۲,$$

بنابراین

$$B^H B x_۲ = -\lambda^۲ x_۲.$$

یعنی $-\lambda^۲$ مقدار ویژه B^HB است. از طرفی مقادیر ویژه B^HB مربع مقادیر تکین B^HB می‌باشند. بنابراین اگر σ_i، $i = ۱,۲,\dots,r$ مقادیر تکین غیر صفر B باشند، آنگاه $-\lambda_i^۲ = \sigma_i^۲$، $i = ۱,۲,\dots,r$. بنابراین داریم

$$\lambda_i = \pm i\sigma_i \,, \quad i = ۱,۲,\dots,r.$$

همچنین

$$\rho(J) = \max_{1 \le i \le r} |\sigma_i| = \|B\|_2 . \qquad \square$$

قضیه۹.۱: مسأله‌ی کمترین توان‌های دوم

$$\|b - Ay\|_2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \|b - Ax\|_2 ,$$

که در آن $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $x \in \mathbb{C}^n$ و $b \in \mathbb{C}^m$ را در نظر بگیرید. مجموعه همه‌ی جواب‌های دستگاه بالا را به صورت

$$S = \{y \in \mathbb{C}^n : \|b - Ay\|_2 = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \|b - Ax\|_2\},$$

در نظر بگیرید. آنگاه y جواب کمترین توان‌های دوم، برای دستگاه بالا است اگر و تنها اگر $A^H r = 0$، که در آن r بردار مانده و برابر $r = b - Ay$ است. به عبارت دیگر

$$y \in S \quad \Leftrightarrow \quad A^H r = 0.$$

اثبات: فرض کنید $\hat{y}$ در $A^H \hat{r} = 0$ صدق کند، که $\hat{r} = b - A\hat{y}$. آنگاه برای هر $y \in S$ داریم

$$r = b - Ay = \hat{r} + A(\hat{y} - y) = \hat{r} + Ae,$$

که در آن $e = \hat{y} - y$. بنابراین

$$r^H r = (\hat{r} + Ae)^H (\hat{r} + Ae) = \hat{r}^H \hat{r} + \|Ae\|_2^2 ,$$

در نتیجه

$$\|r\|_2^2 = \|\hat{r}\|_2^2 + \|Ae\|_2^2 \le \|\hat{r}\|_2^2 + \|A\|_2^2 \, \|e\|_2^2$$

بنابراین بردار مانده‌ی r وقتی می‌نیمم می‌شود که $e = 0$ باشد، یعنی $y = \hat{y}$ در نتیجه $\hat{y} \in S$.
برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $\hat{y} \in S$ و $A^H \hat{r} = z \neq 0$ (برهان خلف). قرار دهید $y = \hat{y} + \epsilon z$، آنگاه $r = \hat{r} - \epsilon Az$ و

$$r^H r = \hat{r}^H \hat{r} - 2\epsilon z^H z + \epsilon^2 (Az)^H Az,$$

چون ϵ دلخواه است، لذا ϵ را می‌توان به قدری کوچک انتخاب کرد که

$$r^H r < \hat{r}^H \hat{r},$$