دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

بررسی مسأله رگولاتور مربعی در کنترل بهینه

سهیلا عبدلی

استاد راهنما:

دکتر محمد تقی دستجردی

مهر ۱۳۹۰


إنه من سليمان وإنه
بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این پایان‌نامه، یک رگولاتور خطی – مربعی نامتناهی زمان – پیوسته مورد بررسی قرار گرفته است. از لحاظ نظری، شرایط بهینگی هم در حلقه باز و هم در شکل بازخورد، همراه با همواری تابع مقدار و پیوستگی لیپ شیتز موضعی بازخورد بهینه، نشان داده شده است. پارامترها، با توجه به ایده‌های پایه‌ای از مزدوج محدبی و به ویژه طراحی و استفاده از یک مسأله کنترل بهینه دوگان، مستقل هستند. از لحاظ عملی، روش محاسبه‌ی بازخورد بهینه و پایدارساز بدون تکیه بر بهینه‌سازی گسسته مطرح شده است.

تقدیم به پدر و مادر و همسر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه‌ی ایثار و از خود گذشتگی...

به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است...

به پاس قلب‌های بزرگ شان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناه شان به شجاعت می‌گراید...

و به پاس محبت‌های بی‌دریغ شان که هرگز فروکش نمی‌کند...

اندک توشه‌ام را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می‌کنم

اگر چه هیچ تقدیمی در هیچ تقویمی یارای حق شناسی سزاوارانه تان را نخواهد داشت.

فهرست مندرجات

مقدمه

مسأله رگولاتور خطی– مربعی مقید افقی نامتناهی زمان– گسسته، با هدف محاسبه‌ی فیدبک‌های پایدارساز برای سیستم‌های مقید، در پژوهش‌ها مورد توجه زیادی قرار گرفته است. در این راستا می‌توان به منابع [۲]، [۳] و [۹] مراجعه کرد.

روش‌های محاسباتی پیشنهادی در منابع فوق، همه به حل عددی مسائل کنترل بهینه افقی متناهی نیاز دارند. در این پایان نامه، چگونگی محاسبه‌ی فیدبک بهینه پایدارساز برای رگولاتور خطی– مربعی افقی نامتناهی زمان– پیوسته با قیدهای ورودی $(CLQR)$[۱]، بدون حل هیچ مسأله کنترل زمان–گسسته، بررسی می‌گردد. محاسبات به طور غیرمستقیم انجام شده و منتهی به یک جدول مقادیر می‌شود. چون ساختار تکه‌ای آفین موجود نیست، پس نمی‌توان انتظار داشت که یک فرمول صریح به دست آید. آنچه که چنین نتایجی را ممکن می‌سازد این است که گرادیان تابع مقدار بهینه (با دانستن اینکه بی‌درنگ به فیدبک بهینه منجر می‌شود) می‌تواند به طور پیشرو، با استفاده از سیستم دیفرانسیل همیلتونی، از طریق حل به معادله ریکاتی برسد.
طبق اصل بهینگی، ویژگی‌های تابع مقدار و فیدبک بهینه می‌تواند با کاهش مسأله به مسأله افقی متناهی با هزینه‌ی پایانی بررسی گردد.

روش فوق، برای رگولاتور زمان-گسسته بکار رفته است [۳].

برای مسائل گسسته با قیدهای حالت و ورودی، ابزارهای بهینه‌سازی پارامتری متناهی بعد ([۴]) و تکنولوژی تابع تکه‌ای خطی– مربعی ([۱۱])، می‌تواند عملی شود.

در این پایان نامه، برای $CLQR$ یک روش مستقل و مستقیم مطرح شده است که بنابر ویژگی تحدب آن این روش شدنی است. کار در چهارچوب دوگانی محدب است. به‌ویژه، یک مسأله کنترل دوگان، مربوط به $CLQR$ در نظر گرفته می‌شود که از دوگان در اثبات شرایط بهینگی استفاده می‌شود.

[۱] Continuous Time Constrained Linear Quadratic Regulator

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است.

در فصل اول، با تعاریف و قضایای مقدماتی سیستم‌های خطی آشنا شده [۱۵] و بعد از تعاریف پایه‌ای در نظریه کنترل، به تشریح سه مفهوم اساسی که در کنترل اهمیت ویژه‌ای دارند، پرداخته شده است. در ادامه، مسأله کنترل بهینه معرفی شده و شرایط لازم بهینه بودن جواب ارائه شده است. همچنین تابع همیلتونی و معادلات ژاکوبی– همیلتون و اصل مینیمم پونتریاگین معرفی شده‌اند [۱۴].

فصل دوم، مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی خطی– مربعی است که در آن ابتدا، چند تعریف مهم ذکر شده است [۲۰]. سپس برنامه‌ریزی خطی– مربعی در بعد متناهی و همچنین مسأله دوگان متناظر با آن معرفی شده و ویژگی‌هایی از مقدار بهینه این مسائل بیان شده است. در ادامه، به بررسی برنامه‌ریزی خطی– مربعی بین زمانی و مسأله دوگان آن پرداخته شده و در آخر حالت‌های خاص از مدل‌های کنترل بهینه، به ویژه مسأله رگولاتور خطی– مربعی، مورد بررسی قرار گرفته است [۱۱].

در فصل سوم، ابتدا مسأله رگولاتور خطی– مربعی معرفی شده است. سپس با توجه به تابع همیلتونی، مسأله دوگان متناظر با آن محاسبه می‌شود. در ادامه شرایط بهینگی و نتایج رگولاتوری درباره تابع مقدار اثبات می‌شود. یک الگوریتم برای محاسبه فیدبک بهینه برای $CLQR$ مطرح شده است به‌طوری‌که برمبنای بهینگی متناهی بعد نیست و تابع مقدار بهینه دوگان می‌تواند در محاسبه‌ی فیدبک مورد استفاده قرار گیرد. در آخر برای درک بهتر الگوریتم، مثال عددی حل شده است [۵].

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مورد نیاز

معادلات دیفرانسیل در تبیین و توصیف پدیده‌های فیزیکی و مهندسی نقش اساسی دارند، زیرا مدل ریاضی بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی به صورت معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند. به ویژه پدیده‌های مرتبط با زمان به صورت دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی موسوم به سیستم‌های دینامیکی نوشته می‌شوند.

مطالب این بخش از منبع [۱٦] گردآوری شده‌اند.

۱.۱ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی عادی به صورت

$$\dot{x} = Ax$$

بیان می‌شود که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و A یک ماتریس ثابت $n \times n$ و $\dot{x}$ یک بردار ستونی با n مؤلفه به صورت زیر است

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

برای ماتریس $n \times n$، A، e^{At} یک ماتریس $n \times n$ است.

در ادامه خواهیم دید که ماتریس e^{At} را می‌توان با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A محاسبه نمود.

قضیه ۲.۱.۱ اگر $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی حقیقی و متمایز ماتریس A باشند، آنگاه بردارهای ویژه‌ی متناظر با این مقادیر ویژه، یعنی $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$، تشکیل یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^n$ می‌دهند. ماتریس $P = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ که ستون‌های آن بردارهای ویژه‌ی ماتریس A هستند، وارون‌پذیر بوده و رابطه‌ی زیر برقرار است

$$P^{-1}AP = diag[\lambda_1, \cdots, \lambda_n].$$

برهان . با توجه به متمایز بودن مقادیر ویژه‌ی ماتریس A، وارون‌پذیری P به وضوح برقرار است. همچنین با مفروضات قضیه‌ی فوق رابطه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A عبارت است از

$$Av_i = v_i\lambda_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.1}$$

با استفاده از رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت

$$[Av_1 \ \cdots \ Av_n] = [v_1\lambda_1 \ \cdots \ v_n\lambda_n],$$

یا

$$A[v_1 \ \cdots \ v_n] = [v_1 \ \cdots \ v_n]\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

با تعریف $\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ و $P = [v_1 \ \cdots \ v_n]$ داریم $AP = P\Lambda$ یا $P^{-1}AP = \Lambda$.

حال نشان می‌دهیم $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ تشکیل یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^n$ می‌دهند. کافیست نشان دهیم $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مستقل خطی هستند. برای اثبات فرض کنید که تنها اولین $k(< n)$ بردار ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ مستقل خطی باشند. این بردارهای ویژه را با $v_1, \cdots, v_k$ نمایش می‌دهیم. بنا بر فرض می‌توان v_{k+1} را به صورت ترکیب خطی از این بردارهای ویژه نوشت لذا

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_{i\ k+1} v_i \ ,$$

که در آن $a_{i\ k+1}$ ها همگی با هم صفر نیستند. از این رو طبق رابطه (۱.۱)

$$Av_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_{i\ k+1} Av_i = \sum_{i=1}^{k} a_{i\ k+1} \lambda_i v_i \ ,$$

از طرف دیگر بنا بر تعریف داریم

$$Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_{i\ k+1} \lambda_{k+1} v_i \ ,$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا داریم

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i\ k+1} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) v_i = 0.$$

بنابراین از آنجا که v_i ها برای $i = 1, \cdots, k$ مستقل خطی هستند، لذا باید $a_{i\ k+1}(\lambda_i - \lambda_{k+1})$ ها همگی صفر باشند. توجه کنید که $a_{i\ k+1}$ ها همگی صفر نیستند و لذا برای یک i باید λ_i برابر λ_{k+1} باشد، که با فرض متمایز بودن مقادیر ویژه تناقض دارد. بنابراین فرض مستقل خطی بودن تنها اولین $k < n$ بردار ویژه نادرست است و لذا تمامی n بردار ویژه ماتریس A مستقل خطی هستند. □

نتیجه ۳.۱.۱ با مفروضات قضیه‌ی فوق جواب دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ به صورت زیر است

$$x(t) = P \ diag \left[e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t} \right] P^{-1} \ x(0).$$

برهان . برای تبدیل دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ به یک دستگاه جداشدنی، از قضیه‌ی فوق استفاده می‌کنیم. برای این منظور تبدیل $y = P^{-1}x$ را به کار می‌گیریم که در آن P ماتریس وارون‌پذیر اشاره شده در قضیه‌ی قبل است. بنابراین داریم:

$$x = Py,$$

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy.$$

به این ترتیب دستگاه جداشدنی زیر را به دست می‌آوریم

$$\dot{y} = diag[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]y,$$

که دارای جوابی به صورت

$$y(t) = diag[e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]y(0)$$

می‌باشد. از طرفی از آنجا که $y(0) = P^{-1}x(0)$ و $x(t) = Py(t)$، دستگاه خطی جوابی به صورت زیر دارد

$$x(t) = P\ diag[e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}\ x(0).$$

□

نکته ۴.۱.۱ با استفاده از خواص تبدیلات خطی اگر $P^{-1}AP = diag[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$، آنگاه

$$e^{At} = Pdiag\left[e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\right] P^{-1}.$$

نکته ۵.۱.۱ اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$، آنگاه

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

نکته ۶.۱.۱ اگر $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$، آنگاه

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} cosb & -sinb \\ sinb & cosb \end{pmatrix}.$$

نکته ۷.۱.۱ با استفاده از خواص تبدیلات خطی اگر $B = P^{-1}AP$، آنگاه $e^B = P^{-1}e^AP$.

قضیه ۸.۱.۱ (قضیه‌ی اساسی دستگاه‌های خطی)

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد، در این صورت برای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ مسأله‌ی مقدار اولیه

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

یک جواب یگانه به صورت زیر دارد

$$x(t) = e^{At}x_0\ .$$

با استفاده از قضیه‌ی فوق یافتن ماتریس e^{At} معادل با حل دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ می‌باشد.

ماتریس e^{At} برای ماتریس‌های ۲×۲ به روش زیر قابل محاسبه است:

برای ماتریس‌های $A_{۲\times۲}$، همواره ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$B = P^{-۱}AP,$$

که در آن ماتریس B بسته به مقادیر ویژه A به یکی از شکل‌های زیر است:

i) اگر A دارای مقادیر ویژه حقیقی متمایز λ و μ باشد
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \mu \end{pmatrix}$$

ii) اگر A دارای مقدار ویژه حقیقی تکراری λ باشد
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{pmatrix}$$

iii) اگر A دارای مقادیر ویژه مختلط $a \pm ib$ باشد
$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

آنگاه بنا به نکات ذکر شده به ترتیب داریم

$$i)\; e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & ۰ \\ ۰ & e^{\mu t} \end{pmatrix}, \qquad ii)\; e^{Bt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} ۱ & t \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad iii)\; e^{Bt} = e^{at}\begin{pmatrix} cosbt & -sinbt \\ sinbt & cosbt \end{pmatrix}.$$

بنا به نکته ۷.۱.۱ ماتریس e^{At} به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-۱}.$$

در این صورت $x(t) = e^{At}x_۰$ جواب مسأله‌ی مقدار اولیه (۱.۲) می‌باشد.

مقادیر ویژه مختلط

قضیه ۹.۱.۱ اگر ماتریس حقیقی $A_{۲n\times۲n}$ دارای $۲n$ مقدار ویژه‌ی مجزای مختلط $\lambda_j = a_j + ib_j$ و $\overline{\lambda}_j = a_j - ib_j$ و بردارهای ویژه‌ی مختلط متناظر $w_j = u_j + iv_j$ و $\overline{w}_j = u_j - iv_j$ باشد که $j = ۱, ۲, \cdots, n$ آنگاه $\{u_۱, v_۱, \cdots, u_n, v_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^{۲n}$ است. ماتریس $P = [v_۱, u_۱, \cdots, v_n, u_n]$ وارون‌پذیر بوده و $P^{-۱}AP = diag(\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix})$ یک ماتریس $۲n \times ۲n$ حقیقی با n بلوک ۲×۲ در طول قطر است.

نتیجه ۱۰.۱.۱ با فرض‌های قضیه‌ی بالا جواب مسأله‌ی مقدار اولیه (۱.۲) به صورت زیر است

$$x(t) = Pdiag(e^{a_jt}\begin{pmatrix} cosb_jt & -sinb_jt \\ sinb_jt & cosb_jt \end{pmatrix})P^{-1}\ x_0\ .$$

اگر A هم دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی مجزا و هم دارای مقادیر ویژه‌ی مختلط مجزا باشد، ترکیبی از قضایای ۲.۱.۱ و ۹.۱.۱ و نتایج آن‌ها برقرار است.

قضیه ۱۱.۱.۱ اگر A دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی مجزای λ_j با بردارهای ویژه متناظر v_j برای $j = 1, 2, \cdots, k$ باشد و همچنین دارای مقادیر ویژه‌ی مجزای مختلط $\lambda_j = a_j + ib_j$ و $\overline{\lambda}_j = a_j - ib_j$ با بردارهای ویژه‌ی متناظر مختلط $w_j = u_j + iv_j$ و $\overline{w}_j = u_j - iv_j$ برای $j = k+1, k+2, \cdots, n$ باشد، آنگاه ماتریس $P = [v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, v_n, u_n]$ وارون‌پذیر است و

$$P^{-1}AP = diag[\lambda_1, \cdots, \lambda_k, B_{k+1}, \cdots, B_n]$$

که در آن $B_j = \begin{pmatrix} a_j & -bj \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ ها بلوک‌های 2×2، برای $j = k+1, k+2, \cdots, n$ می‌باشند.

مثال ۱.۱.۱ ماتریس $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ دارای مقادیر ویژه $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = 2 + i$ $(\overline{\lambda}_2 = 2 - i)$ می‌باشد. بردارهای ویژه‌ی متناظر این مقادیر ویژه عبارت‌اند از

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = u_2 + iv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix},$$

درنتیجه

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

در این صورت جواب مسأله‌ی مقدار اولیه (۱.۲) عبارت است از

$$x(t) = P\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}cost & -e^{2t}sint \\ 0 & e^{2t}sint & e^{2t}cost \end{pmatrix}P^{-1}x_0$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}(cost+sint) & -2e^{2t}sint \\ 0 & e^{2t}sint & e^{2t}(cost-sint) \end{pmatrix} x_0 .$$

مقادیر ویژه تکراری

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ی ماتریس $A_{n\times n}$ با $m \leq n$ تکرار باشد، آنگاه برای $k = 1, 2, \cdots, m$ هر جواب غیرصفر v از $(A-\lambda I)^k v = 0$ **بردار ویژه‌ی تعمیم یافته** A نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ ماتریس $N_{n\times n}$ **پوچ توان مرتبه** k نامیده می‌شود هر گاه $N^{k-1} \neq 0$ و $N^k = 0$.

قضیه ۱۴.۱.۱ فرض کنید A ماتریس حقیقی $n \times n$ با مقادیر ویژه‌ی حقیقی $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ باشد، که دارای تکرار می‌باشند، آنگاه یک پایه از بردارهای ویژه‌ی تعمیم یافته A برای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد. اگر $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ی بردارهای ویژه‌ی تعمیم یافته A برای $\mathbb{R}^n$ باشد، ماتریس $P = [v_1, \cdots, v_n]$ وارون‌پذیر بوده و $A = S + N$ که در آن $P^{-1}SP = diag([\lambda_j])$ و ماتریس $N = A - S$ پوچ توان مرتبه $k \leq n$ است و S و N جابجایی‌پذیرند، به عبارت دیگر $NS = SN$.

نتیجه ۱۵.۱.۱ با فرض‌های قضیه‌ی بالا جواب مسأله‌ی مقدار اولیه (۱.۲) به صورت زیر است

$$x(t) = Pdiag[e^{\lambda_j t}]P^{-1} \left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] x_0 .$$

قضیه ۱۶.۱.۱ فرض کنید A ماتریس حقیقی $2n \times 2n$ با مقادیر ویژه‌ی مختلط $\lambda_j = a_j + ib_j$ و $\overline{\lambda}_j = a_j - ib_j$، $j = 1, 2, \cdots, n$ باشد که دارای تکرار می‌باشند. همچنین فرض کنید $w_j = u_j + iv_j$ و $\overline{w}_j = u_j - iv_j$، $j = 1, 2, \cdots, n$ بردارهای ویژه‌ی مختلط تعمیم یافته‌ی متناظر با این مقادیر ویژه باشند، در این صورت $\{u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^{2n}$ است. برای چنین پایه‌ای ماتریس $P = [v_1, u_1, \cdots, v_n, u_n]$ وارون‌پذیر است و $A = S + N$ که در آن $P^{-1}SP = diag(\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix})$ و ماتریس $N = A - S$ پوچ توان مرتبه $k \leq 2n$ بوده و N و S جابجایی‌پذیرند.

نتیجه ۱۷.۱.۱ با فرض‌های قضیه‌ی بالا جواب مسأله‌ی مقدار اولیه (۱.۲) به صورت زیر است

$$x(t) = Pdiag(e^{a_j t}\begin{pmatrix} cosb_j t & -sinb_j t \\ sinb_j t & cosb_j t \end{pmatrix})P^{-1}\left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right] x_0 .$$

مثال ۲.۱.۱ مسأله‌ی مقدار اولیه (۱.۲) را برای $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ حل می‌کنیم. ماتریس A دارای مقدار ویژه $\lambda = i$ و $\overline{\lambda} = -i$ با دو بار تکرار است. با حل دستگاه زیر

$$(A - \lambda I)w = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0$$

روابط $z_1 = z_2 = 0$ و $z_3 = iz_4$ به دست می آیند. در نتیجه یک بردار ویژه به صورت $w_1 = (0, 0, i, 1)^T$ می‌باشد. همچنین با حل دستگاه زیر

$$(A - \lambda I)^2 w = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0$$

روابط $z_1 = iz_2$ و $z_3 = iz_4 - z_1$ به دست می آیند. در نتیجه بردار ویژه‌ی تعمیم یافته به صورت $w_2 = (i, 1, 0, 1)^T$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت

$$v_1 = (0, 0, 1, 0)^T, \quad u_1 = (0, 0, 0, 1)^T,$$

$$v_2 = (1, 0, 0, 0)^T, \quad u_2 = (0, 1, 0, 1)^T.$$

بنابراین مطابق قضیه‌ی بالا

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = P \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad N^2 = 0.$$

در نتیجه جواب مسأله‌ی مقدار اولیه (1.2) به صورت زیر است:

$$x(t) = P \begin{pmatrix} cost & -sint & 0 & 0 \\ sint & cost & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cost & -sint \\ 0 & 0 & sint & cost \end{pmatrix} P^{-1}[I + Nt]\; x_0$$

$$= \begin{pmatrix} cost & -sint & 0 & 0 \\ sint & cost & 0 & 0 \\ -tsint & sint - tcost & cost & -sint \\ sint + tcost & -tsint & sint & cost \end{pmatrix} x_0\ .$$

لازم به ذکر است که اگر A مقادیر ویژه‌ی تکراری حقیقی و مختلط داشته باشد، می‌توان ترکیبی از دو قضیه‌ی فوق را به کار برد.

دستگاه‌های خطی ناهمگن

دستگاه خطی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + b(t),$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و $b(t)$ یک بردار با مؤلفه‌های پیوسته است.

تعریف 18.1.1 **ماتریس اساسی** دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ یک ماتریس $n \times n$ نامنفرد است که با $\psi(t)$ نمایش داده می‌شود که عناصر آن توابعی هستند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند

$$\dot{\psi}(t) = A\psi(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

به عبارت دیگر $\psi(t) = [\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n]$ که ستون‌های آن جواب‌های مستقل خطی دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ هستند.

با توجه به رابطه‌ی زیر

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + \frac{1}{3!}A^4t^3 + \cdots = Ae^{At}$$

ماتریس $\psi(t) = e^{At}$ یک ماتریس اساسی دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ است که در شرط $\psi(0) = I$ صدق می‌کند، I ماتریس همانی $n \times n$ است. به علاوه هر ماتریس اساسی $\psi(t)$ مربوط به $\dot{x} = Ax$ می‌تواند به فرم $\psi(t) = Ce^{At}$ در نظر گرفته شود که در آن C یک ماتریس نامنفرد است و با استفاده از شرط اولیه تعیین می‌شود. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که با در دست داشتن ماتریس اساسی دستگاه خطی، دستگاه خطی ناهمگن به راحتی قابل حل است.

قضیه ۱۹.۱.۱ اگر $\psi(t)$ یک ماتریس اساسی دستگاه $\dot{x} = Ax$ باشد، آنگاه جواب دستگاه خطی ناهمگن $\dot{x} = Ax + b(t)$ با شرط اولیه $x(0) = x_0$ به صورت زیر خواهد بود

$$x(t) = \psi(t)\psi(0)^{-1}x_0 + \int_0^t \psi(t)\psi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

برهان . برای تابع $x(t)$ که به صورت بالا تعریف شده داریم

$$\dot{x}(t) = \dot{\psi}(t)\psi^{-1}(0)x_0 + \psi(t)\psi^{-1}(t)b(t) + \int_0^t \dot{\psi}(t)\psi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$$

و چون $\psi(t)$ یک ماتریس اساسی دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$ است

$$\dot{x}(t) = A\psi(t)\psi^{-1}(0)x_0 + b(t) + A\int_0^t \psi(t)\psi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$$

$$= Ax(t) + b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

۲.۱ نظریه کنترل

از آنجا که رفتار دینامیکی سیستم‌ها را می‌شود به صورت معادلات دیفرانسیل بیان نمود در بخش قبل با معادلات دیفرانسیلی، آشنا شدیم که به آن سیستم‌های دینامیکی می‌گوئیم و از آنجا که هر سیستم دینامیکی نیاز به کنترل دارد تا به هدف مورد نظر نایل آید در این بخش با علم و ابزار کنترل این سیستم‌ها آشنا می‌شویم.
نظریه‌ی کنترل مدیریت سیستم‌های دینامیکی را بر عهده دارد، به این ترتیب که متغیر کنترل را طوری اعمال می‌کند که بر مقدار خروجی سیستم تأثیرگذار باشد.مسأله‌ی اصلی در کنترل، پیدا کردن راه حلی تکنیکی برای کار روی مفروضات و ورودی‌هاست به طوری که رفتار سیستم با دقت بالا منطبق بر رفتار مورد نظر باشد.
مطالب این بخش جز در مواردی که به صورت خاص اشاره شده‌اند، عمدتاً از منبع [۱۵, ۱۸] گردآوری شده‌اند.
در نظریه کنترل همواره سه مفهوم اساسی مورد توجه قرار می‌گیرد

۱) کنترل پذیری

۲) مشاهده پذیری

۳) پایداری

سیستم‌های کنترل

تعریف ۱.۲.۱ [۱۴] تعدادی اجزای به هم وابسته که در تعامل با یکدیگر هدف خاصی را دنبال می‌کنند، یک **سیستم** می‌نامند. رفتار دینامیکی سیستم‌های مختلف را می‌توان به صورت معادلات دیفرانسیل بیان نمود.

تعریف ۲.۲.۱ [۸] یک **سیستم کنترل** یک سیستم دینامیکی است که با نمو زمان به روش تعیین شده‌ی خاصی رفتار می‌کند.

بخش‌های اصلی یک سیستم کنترل را می‌توان چنین برشمرد [۱۹]:

۱) ورودی‌های کنترل

۲) اجزای سیستم کنترل

۳) خروجی‌ها یا متغیرهای کنترل شونده

به طور کلی هدف سیستم کنترل، کنترل خروجی‌ها به روشی معین به کمک ورودی‌ها از طریق اجزای سیستم کنترل است (شکل ۱.۱).

شکل ۱.۱

همچنین تعاریف زیر برقرارند:

سیستم تحت کنترل: سیستمی است که کنترل می‌شود.

کنترل‌گر: در واقع مهم‌ترین بخش یک سیستم کنترلی است که متغیرهای ورودی به سیستم تحت کنترل را تنظیم می‌کند.

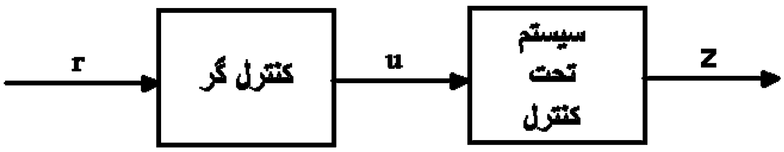
دریافت‌گر: بخشی از سیستم است که اطلاعات دریافت شده از سیستم تحت کنترل را نمایش می‌دهد.

دسته‌بندی سیستم‌های کنترلی

سیستم‌های کنترل از نظر نوع اتصال به دو دسته تقسیم می‌شوند [۸]:

۱) سیستم کنترل حلقه باز

سیستم کنترلی را که کنترل (ورودی) به خروجی بستگی ندارد و با یک پیش فرض مشخصی روی ورودی تنظیم می‌شود، سیستم کنترل حلقه باز می‌نامند. شمای کلی یک سیستم حلقه باز در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.



شکل ۱.۲

متغیر مرجع ($(r(t)$): ورودی با مقدار مشخص است.

متغیر ورودی ($(u(t)$): متغیری است که روی سیستم تحت کنترل اثر می‌گذارد و می‌تواند تغییر داده شود.

متغیر کنترل شده ($(z(t)$): خروجی سیستم تحت کنترل است.

در واقع کنترل‌گرهای حلقه باز، $u(t)$ را بر اساس مقادیر حال و گذشته‌ی متغیر مرجع تولید می‌کنند، یعنی

$$u(t) = f[r(\tau);\ t_\circ \leq \tau \leq t],$$