بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

عنوان:

گراف مقسوم علیه صفر حلقه های خاص

از :
مریم صفادیده

استاد راهنما :
دکتر فرهاد درستکار

آذر ۱۳۹۰

تقدیم به روان پاک پدر مهربانم :

او که راه ورسم خوب زندگی کردن را در سایه تلاش وآزادگی به فرزندان خود آموخت و خود تا آخرین لحظه حیات، باعزت نفس زندگی کرد و دمی از تلاش دست برنداشت، واگر نیست، وجودش در تمام زندگیم جاری است.

پیشگاه مادر عزیزم :

او که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش همه مهر، آنکه در رسیدن من به مدارج علمی بالاتر از هیچ کوششی دریغ نکرد، در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می نهم وبادلی مملو از عشق ومحبت وخضوع به دستانش بوسه می زنم.

تقدیر و تشکر

خداوند بزرگ را شاکرم که همواره مرا مورد لطف بی دریغ خود قرار داده و عظمت وجودش یاریگرم بوده است.

این پایان نامه حاصل راهنمایی استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر فرهاد درستکار است که در طی این مدت صبوری زیادی به خرج دادند و همیشه مدیون و قدردان زحمات بی شائبه ایشان بوده و هستم. همچنین از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی و جناب آقای دکتر منصور هاشمی که داوری این پایان نامه را پذیرفتند کمال تشکر را دارم و از جناب آقای دکتر عباس سهله به خاطر حضور در جلسه دفاعیه سپاسگزارم و همچنین از اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه گیلان که در طول تحصیل مرا یاری کرده اند، تشکر و قدردانی می نمایم.

فهرست مطالب

چکیده

گراف مقسوم علیه صفرحلقه های خاص

مریم صفادیده

در این پایان نامه ما گراف مقسوم علیه صفر حلقه جابجایی R را در حالتی که حلقه R یک حلقه منظم ون نیومن یا یک حلقه کاهش یافته است، مورد مطالعه قرارمی دهیم.

واژه های کلیدی: گراف مقسوم علیه، حلقه منظم ون نیومن، حلقه کاهش یافته.

Abstract

Zero divisor graphs of special rings

Maryam Safadideh

In this dessertation we study the Zero-divisor graph of a commutative ring R when R is a Von Neumann regular or a reduced ring.

Key words: zero-divisor graph, von neumann regular rings, reduced ring

پیشگفتار:

نظریه گراف شاخه ای از ریاضیات است که در قرن هجدهم توسط اویلر ریاضیدان بزرگ ابداع گردیده است. مهمترین کاربرد نظریه گراف مدل سازی پدیده های گوناگون و بررسی بر روی آنها می باشد. از این رو امروزه نظریه گراف در شاخه های مختلف علوم کاربردهای فراوان دارد.

گراف مقسوم علیه صفر توسط D. F. Anderson و P. S. Livingston در سال ۱۹۹۹ معرفی شد.

(ر. ک. [3]) و همچنین توسط Anderson، Frazier، Lauve ، Livingston در مقاله دیگری که در سال ۲۰۰۱ چاپ شد به ارتباط دقیقتری بین گراف مقسوم علیه صفر و ساختارحلقه پرداخت. (ر. ک. [2]) پس از چاپ اولین مقاله در مورد گراف مقسوم علیه صفر در سال ۱۹۹۹ تا کنون تحقیقات زیادی در این ارتباط صورت گرفته است. در این پایان نامه در فصل اول به بیان خواص اساسی گراف مقسوم علیه صفر می پردازیم.

در فصل های بعد نیزگراف مقسوم علیه صفر یک حلقه را تحت شرایط خاصی روی آن حلقه بررسی می نماییم. منابع اصلی در این پایان نامه مراجع [3] **و** [4] **و** [10] می باشد.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

در سراسراین پایان نامه R همواره یک حلقه جا بجایی و یکدار (با یکه مخالف صفر) است. همچنین مجموعه مقسوم علیه های صفرحلقه R را با $Z(R)$ نشان می دهیم.

برای گراف G، مجموعه رأس ها را با $V(G)$ و مجموعه یال ها را با $E(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱ : گراف مجموعه ای از رأس هاست که توسط خانواده ای از خطوط که همان یال ها می باشند به هم مربوط (وصل) شده اند. یال ها نیز دو نوع ساده و جهت دار می باشند.

تعریف ۱-۲ : گرافی که طوقه و یال چند گانه (تعداد یال هایی که فقط از دو رأس مربوطه می گذرند) نداشته باشد، گراف ساده گویند.

تعریف ۱- ۳ : گرافی که مجموعه یال های آن تهی است، یک گراف تهی (یا گراف ناهمبند کلی) می نامند. گراف تهی با nرأس را با N_n نشان می دهیم. در یک گراف تهی، تمام رئوس منفرد هستند.

تعریف ۱- ۴ : دنباله ای از یالها به صورت $v_0\,v_1\,,\,v_1\,v_2\,,\,\ldots\,,v_{m-1}\ \ v_m$ را در نظر می گیریم، که آن را به صورت

$$v_0 —— v_1 —— v_2 ——\cdots—— v_{m-1} —— v_m$$

نیز نشان می دهند. اگر رئوس $v_0\,,v_1\,,\ldots,v_m$ مجزا باشند، به این دنباله از یالها یک مسیر گویند.

تعریف ۱- ۵ : یک گراف که بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد، یک گراف همبند گوییم.

تعریف ۱- ۶ : فرض کنید مجموعه رئوس یک گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای V_1 و V_2 افراز کرد، به طوریکه هر یال G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل کند. در این صورت G را یک گراف دو بخشی گویند و به صورت $G(V_1,\,V_2)$ نمایش می دهند. در یک گراف دو بخشی لزوماً هر رأس از V_1 به هر رأس از V_2 وصل نیست. اما اگر چنین باشد و اگر G ساده باشد، آنگاه G را یک گراف دو بخشی کامل گویند. هنگامی که G دو بخشی متناهی باشد، آن را با $K_{r,s}$ نشان می دهند که در آن r و s به ترتیب تعداد رئوس در V_1 و V_2 هستند. توجه کنید که $K_{r,s}$، تعداد r + s رأس و r s یال دارد.

تعریف ۱- ۷ : یک گراف دو بخشی کامل به صورت $K_{1,s}$، یک گراف ستاره نامیده می شود. به عبارت دیگرگراف G یک گراف ستاره است، اگر یک رأس وجود داشته باشد که متصل به هر رأس دیگر باشد.

تعریف ۱- ۸ : فرض کنید $v_0\,,v_1\,,\ldots,v_{m-1}$ که $m\geq 3$ رأس هایی متمایز از گراف G باشند که به ازای هر $0\leq i\leq m-1$، رأس های v_i و v_{i-1} مجاور می باشند. چنانچه رأس های v_0 و v_{m-1} نیز مجاور باشند، در این صورت $v_0 —— v_1 ——\cdots—— v_{m-1} —— v_0$ را یک دور به طول m گوییم.

تعریف ۱- ۹ : طول کوتاهترین دور در گراف G را با $girth\,(G)$ نمایش می دهند و آن را کمرگراف گویند. اگر G شامل هیچ دوری نباشد، کمرگراف G را برابر بی نهایت تعریف می کنند.

تعریف ۱-۱۰ : اگر $x_0\ ,\ x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_{m-1}\ ,\ x_m$ رأس هایی متمایز از گراف G باشند، آنگاه

$$x_0 \_\_ x_1 \_\_ \cdots \_\_ x_{m-1} \_\_ x_m \ .$$

را یک راه به طول m از x_0 به x_m گوییم. طول کوتاهترین راه از x به y را با $d(x,y)$ نمایش می دهند. در صورتی که چنین راهی از x به y موجود نباشد $d(x,y)$ را برابر بی نهایت تعریف می کنند. همچنبن $d(x,x)=0$.

تعریف ۱- ۱۱ : سوپریمم فاصله بین رئوس متمایز گراف G را قطرگراف G گویند. و آن را با $diam(G)$ نشان می دهند. بعبارت دیگر

$$\text{diam(G)= sup}\{d(x,y) \mid \text{رأس های متمایزهستند } x, y \ \} .$$

قضیه ۱- ۱۲ : اگر S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد که مجزا از ایده ال I از R است، آنگاه یک ایده ال P که در بین تمام ایده ال های شامل I مجزا با S، ماکزیمال است وجود دارد. بعلاوه چنین ایده الی یک ایده ال اول است.
اثبات: ر. ک. [8]

تعریف ۱- ۱۳ : حلقه R را یک حلقه کاهش یافته گوییم اگر برای هر $n \geq 1$ از $a^n = 0$ نتیجه شود که $a=0$ یا بعبارت معادل $Nil(R)=0$.

تعریف ۱- ۱۴ : حلقه R را یک حلقه منظم ون نیومن گوییم، اگر برای هر $x \in R$ یک $y \in R$ چنان موجود باشد به طوریکه $x = x^2 y$ باشد .

تعریف ۱- ۱۵ : عنصر a از حلقه R را یک عضو منظم حلقه R گوییم، اگر $0 \neq b \in R$ وجود نداشته باشد به طوریکه $ab=0$.

تعریف ۱- ۱۶ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی و S مجموعه عضوهایی از R باشد که مقسوم علیه صفر نمی باشند. در اینصورت S یک مجموعه بسته ضربی می باشد. موضعی سازی حلقه R تحت مجموعه S یعنی $S^{-1}R$ را حلقه خارج قسمتی کامل از R گوییم و آن را با $T(R)$ نمایش می دهیم. از این رو

$$T(R) = S^{-1}R = \{ \ \frac{r}{s} \ \mid r \in R \ , \ s \in S = R - Z(R) \ \} \ .$$

قضیه ۱- ۱۷ : $T(R)$ حلقه منظم ون نیومن است اگر و تنها اگر برای هر $x \in R$، یک $y \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $xy = 0$ و $x+y$ یک عضو منظم حلقه باشد.
اثبات: ر. ک. [2, 2.3]

تعریف ۱- ۱۸ : دو گراف G و G' یکریختند ($G' \cong G$). اگر یک تابع دو سویی $\varphi : G \to G'$ وجود داشته باشد، به طوریکه رئوس x و y در G مجاور باشند اگر و تنها اگر رئوس $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ در G' مجاور باشند.

تعریف ۱- ۱۹: یک رأس از یک گراف، انتها نامیده می شود اگر تنها یک رأس دیگر وجود داشته باشد که با آن مجاور باشد .

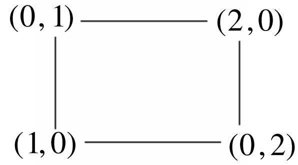
تعریف ۱- ۲۰ : گراف مقسوم علیه صفر عبارت است از گرافی با رأسهای $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ که برای هر x و y متمایز از $Z(R)^*$، رأسهای x و y مجاورهستند اگر و تنها اگر $xy=0$. گراف مقسوم علیه صفر را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می دهیم.

مثال ۱-۲۱ : اگر $R = Z_3 \times Z_3$، آنگاه $\Gamma(R)$ بصورت زیر می باشد.

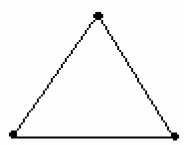
$$R = Z_3 \times Z_3 = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2) \} .$$

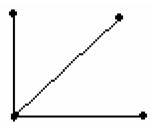
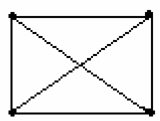
$$\Gamma(R) = \Gamma(Z_3 \times Z_3) = \{ (0,1), (0,2), (1,0), (2,0) \} .$$

همچنین نمودار گراف مقسوم علیه صفر $\Gamma(R)$ به صورت زیر می باشد.



تبصره ۱- ۲۲ : در [2] ثابت شده است که تمام گراف های مقسوم علیه صفر $\Gamma(R)$ که در آن $|\Gamma(R)| \leq 4$ به یکی از صورت های زیر است:

۱)
۲)
۳)
۴) 

۵) 
۶) 
۷) 

که برای آنها بر حسب یکریختی حلقه هایی که گراف مقسوم علیه صفر آنها بصورت فوق می باشد، به یکی از صورت های زیر می باشد.

۱) $Z_4 \ , \ Z_2[x]/(x^2)$

۲) $Z_9 \ \ , \ \ Z_2 \times Z_2 \ \ , \ \ Z_3[x]/(x^2)$

۳) $Z_6 \ \ , \ \ Z_8 \ \ , \ \ Z_2[x]/(x^3) \ \ , \ \ Z_4[x]/(2x \ , \ x^2 - 2)$

۴) $F_4[x]/(x^2) \ \ , \ \ Z_4[x]/(x^2 + x + 1) \ , \ \ Z_4[x]/(2 \, , x)^2 \ \ , \ \ Z_2[x, y]/(x, y)^2$

۵) $Z_2 \times F_4$

۶) $Z_3 \times Z_3$

۷) $Z_{25} \ \ , \ \ Z_5[x] \ / (x^2)$

با توجه به اینکه در این پایان نامه می خواهیم گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه را تحت شرایط خاصی بررسی کنیم ، لذا در اینجا تعدادی از قضایای اساسی گراف مقسوم علیه صفر را بیان می نماییم.

قضیه ۱-۲۳: فرض کنید R یک حلقه آرتینی باشد (به عنوان مثال اگر R یک حلقه جابجایی متناهی باشد). اگر $\Gamma(R)$ شامل یک دور باشد، آنگاه $gr\,(\Gamma(R)) \leq 4$.

اثبات: ر. ک. [3]

قضیه ۱-۲۴ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ یک گراف کامل است اگر و تنها اگر $R \cong Z_2 \times Z_2$ یا برای هر $x, y \in Z(R)$، داشته باشیم $xy = 0$.
اثبات: ر. ک. [3]

قضیه ۱- ۲۵ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. در این صورت یک رأس از $\Gamma(R)$ وجود دارد که با تمام رأسها مجاور است اگر و تنها اگر $R \cong Z_2 \times D$ که در آن D یک دامنه صحیح است یا $Z(R)$ یک ایده ال پوچ ساز باشد.
اثبات: ر. ک. [3, 2.5]

قضیه ۱- ۲۶ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی متناهی باشد که $\left|\Gamma(R)\right| \geq 4$. در این صورت $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است اگر و تنها اگر $R \cong Z_2 \times F$ که در آن F یک میدان متناهی است. بخصوص اگر $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره باشد، آنگاه برای یک عدد اول P و $n \geq 0$ ، $\left|\Gamma(R)\right| = P^n$.
اثبات: ر. ک. [3, 2.13]

تعریف ۱- ۲۷ : (ر. ک. [5]) فرض کنید R یک حلقه باشد. برای $a \in R$ قرار می دهیم

$$V(a) = \{ P \in Spec(R) \, , \, a \in P \} \quad , \quad D(a) = Spec(R) \setminus V(a)$$

در این صورت مجموعه های $V(I) = \bigcap_{a \in I} V(a)$ برای ایده ال های I از R در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $V(\phi) = R$ ، $V(R) = \phi$.

۲) برای ایده ال های I_1 , I_2 از R ، $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$.

۳) برای هر خانواده از ایده ال های R مانند $\{ I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ داریم $V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$.

از این رو مجموعه $\{ V(I) \mid$ که I یک ایده ال از R است$\}$، یک توپولوژی روی $Spec(R)$ القا می کند. این توپولوژی را توپولوژی زاریسکی می گوییم. در این توپولوژی مجموعه $V(I)$ یک مجموعه بسته است.

تعریف ۱- ۲۸ : بستار مجموعه A، کوچکترین مجموعه بسته ای است که حاوی A باشد و آن را با $\overline{A}$ نشان می دهیم.

تعریف ۱- ۲۹ : درون مجموعه A، بزرگترین مجموعه بازی است که جزء A باشد و آن را با $\operatorname{int}(A)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱- ۳۰ : فضای توپولوژیک X را یک فضای هاسدورف گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه X مانند x و y مجموعه های بازی مانند U و V در X موجود باشند به طوریکه $x \in U$ و $y \in V$ و $U \cap V = \phi$.

تعریف ۱- ۳۱ : فضای توپولوژیک X را یک فضای نرمال گوییم هرگاه به ازای هر دو مجموعه بسته از X مانند U و V که $U \cap V = \phi$ ، دو مجموعه باز جدا از هم مانند U' و V' چنان موجود باشند که $U \subseteq U'$ و $V \subseteq V'$.

فصل دوم

یکریختی

$$\Gamma(T(R)) \quad , \quad \Gamma(R)$$

یکریختی $\Gamma(T(R))$, $\Gamma(R)$

تبصره ۲-۱ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. رابطه ~ بر R را بدین صورت تعریف می کنیم که برای هر x و y از R، $x \sim y$ اگر و تنها اگر $Ann_R(x) = Ann_R(y)$. بدیهی است که ~ یک رابطه هم ارزی بر R است. همچنین بدیهی است که تحدید ~ بر $\Gamma(R)(=Z(R)^*)$ نیز یک رابطه هم ارزی است.

قضیه ۲-۲ : فرض کنید R یک حلقه جابجایی با حلقه خارج قسمتی کامل $T(R)$ باشد. در این صورت گرافهای $\Gamma(T(R))$ و $\Gamma(R)$ یکریختند.

برهان : فرض کنید $S = R - Z(R)$ و $T = T(R)$ باشد . رابطه هم ارزی روی $Z(R)^*$ و $Z(T)^*$ را به ترتیب با نماد های $\sim_R$ و $\sim_T$ نشان می دهیم و کلاس هم ارزی مربوط به آنها را با نماد $[a]_R$ و $[a]_T$ نشان می دهیم .

حال ثابت می کنیم

$$Ann_T(\frac{x}{s}) = (Ann_R(x))_S \ .$$

فرض کنید $\frac{a}{b} \in Ann_T(\frac{x}{s})$. پس $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{s} = 0$. بنا براین $\lambda a x = 0$ که $\lambda \in S = R - Z(R)$.

پس $a x = 0$. بنا براین $a \in Ann_R(x)$. لذا $\frac{a}{b} \in (Ann_R(x))_S$. در نتیجه

$$Ann_T(\frac{x}{s}) \subseteq (Ann_R(x))_S \ .$$

برای نشان دادن عکس این شمول فرض کنید $\frac{\lambda}{\mu} \in (Ann_R(x))_S$. پس $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{z}{y}$ که در آن $y \in S$ و $z \in Ann_R(x)$.

بنا براین $t \in S$ چنان موجود است که $t(\lambda y - \mu z) = 0$. پس $t \lambda y = t \mu z$. از طرفی چون $z \in Ann_R(x)$، پس $z x = 0$.

بنا براین $t\lambda y x = t \mu z x = 0$. چون $t y \in S$ ، بنا براین $\lambda x = 0$. لذا $\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{x}{s} = 0$. در نتیجه $\frac{\lambda}{\mu} \in Ann_T(\frac{x}{s})$. پس

$$(Ann_R(x))_S \subseteq Ann_T(\frac{x}{s}) \ .$$

از این رو $Ann_T(\frac{x}{s}) = Ann_R(x)_S$.

حال نشان می دهیم

$$Ann_T(\frac{x}{s}) \bigcap R = Ann_R(x) \ .$$

فرض کنید $\frac{\lambda}{1} \in Ann_T(\frac{x}{s})$ و $\lambda \in R$. در نتیجه $\frac{\lambda}{1} \cdot \frac{x}{s} = 0$. لذا $t \in S = R - Z(R)$ چنان موجود است که $t\lambda x = 0$.

پس $\lambda x = 0$. در نتیجه $\lambda \in Ann_R(x)$. بنا براین $Ann_T(\frac{x}{s}) \bigcap R \subseteq Ann_R(x)$. حال برای اثبات عکس این شمول فرض کنید $y \in Ann_R(x)$. پس $y x = 0$. بنابراین $\frac{y}{1} \cdot \frac{x}{s} = 0$. در نتیجه $\frac{y}{1} \in Ann_T(\frac{x}{s})$. لذا $\frac{y}{1} \in Ann_T(\frac{x}{s}) \bigcap R$.

بنا براین $Ann_R(x) \subseteq Ann_T(\frac{x}{s}) \bigcap R$. از این رو

$$Ann_T(\frac{x}{s}) \bigcap R = Ann_R(x) \ .$$

از آنجا که $Ann_T(\frac{x}{t})=(Ann_R(x))_S=Ann_T(\frac{x}{s})$. پس $\frac{x}{t}\sim_T \frac{x}{s}$. ازطرف دیگر اگر $x\sim_R y$، آنگاه

$$Ann_R(x)=Ann_R(y).$$

پس

$$(Ann_R(x))_S=(Ann_R(y))_S.$$

در نتیجه $Ann_T(\frac{y}{s})=Ann_T(\frac{x}{s})$. لذا $\frac{y}{s}\sim_T \frac{x}{s}$. از این رو اگر $x\sim_R y$، آنگاه $\frac{y}{s}\sim_T \frac{x}{s}$. از طرفی اگر $\frac{y}{s}\sim_T \frac{x}{s}$، آنگاه $Ann_T(\frac{y}{s})=Ann_T(\frac{x}{s})$. لذا

$$Ann_T(\frac{x}{s})\cap R=Ann_T(\frac{y}{s})\cap R.$$

در نتیجه $Ann_R(x)=Ann_R(y)$ و بنا براین $x\sim_R y$. از این رو اگر $\frac{y}{s}\sim_T \frac{x}{s}$، آنگاه $x\sim_R y$. پس $x\sim_R y$ اگر و تنها اگر $\frac{y}{s}\sim_T \frac{x}{s}$.

حال ثابت می کنیم $\left[\frac{x}{1}\right]_T=([x]_R)_S$. فرض کنید $\frac{y}{s}\in\left[\frac{x}{1}\right]_T$. پس $\frac{y}{s}\sim_T \frac{x}{1}$. از طرفی چون $\frac{x}{s}\sim_T \frac{x}{1}$. پس $\frac{y}{s}\sim_T \frac{x}{s}$. این نیز ایجاب می کند که $x\sim_R y$. پس $y\in[x]_R$. در نتیجه $\frac{y}{s}\in([x]_R)_S$. لذا

$$\left[\frac{x}{1}\right]_T\subseteq([x]_R)_S.$$

برای اثبات عکس این شمول نیز فرض کنید $\frac{a}{s}\in([x]_R)_S$. پس $\frac{a}{s}=\frac{\lambda}{\mu}$ که در آن $\mu\in S$ و $\lambda\in[x]_R$. بنا براین یک $t\in S=R-Z(R)$ چنان موجود است که $t(a\mu-s\lambda)=0$. پس $ta\mu=ts\lambda$. از طرفی چون $\lambda\in[x]_R$، پس $\lambda\sim_R x$. این نیز ایجاب می کند $\frac{\lambda}{1}\sim_T \frac{x}{1}$. در نتیجه $\left[\frac{\lambda}{1}\right]_T=\left[\frac{x}{1}\right]_T$. از طرف دیگر

$$\frac{\lambda}{1}=\frac{ts\lambda}{ts}=\frac{ta\mu}{ts}=\frac{a\mu}{s}\sim_T \frac{a\mu}{s\mu}=\frac{a}{s}.$$

بنا براین $\frac{a}{s}\in\left[\frac{\lambda}{1}\right]_T=\left[\frac{x}{1}\right]_T$. لذا

$$([x]_R)_S\subseteq\left[\frac{x}{1}\right]_T.$$

از این رو $\left[\frac{x}{1}\right]_T=([x]_R)_S$. اکنون ثابت می کنیم

$$\left[\frac{x}{s}\right]_T\cap R=[x]_R.$$

فرض کنید $R\cap\left[\frac{x}{s}\right]_T\ni\frac{y}{1}$. پس $\frac{y}{1}\in\left[\frac{x}{s}\right]_T$. بنا براین $\frac{y}{1}\sim_T \frac{x}{s}$. از طرفی $\frac{x}{1}\sim_T \frac{x}{s}$. پس $\frac{y}{1}\sim_T \frac{x}{1}$. در نتیجه $([x]_R)_S=\left[\frac{x}{1}\right]_T\ni\frac{y}{1}$. لذا $y\in[x]_R$. از این رو

$$\left[\frac{x}{s}\right]_T\cap R\subseteq[x]_R.$$

حال برای اثبات عکس شمول فرض کنید $y\in [x]_R$. پس $y \sim_R x$. این نیز ایجاب می کند $\frac{y}{s} \sim_T \frac{x}{s}$. از طرفی $\frac{y}{1} \sim_T \frac{y}{s}$.
پس $\frac{y}{1} \sim_T \frac{x}{s}$. در نتیجه $\frac{y}{1}\in \left[\frac{x}{s}\right]_T$ و از طرفی $y\in R$. پس $\frac{y}{1}\in \left[\frac{x}{s}\right]_T \bigcap R$. لذا

$$[x]_R \subseteq \left[\frac{x}{s}\right]_T \bigcap R .$$

از این رو $[x]_R = \left[\frac{x}{s}\right]_T \bigcap R$. در این مرحله ثابت می کنیم

$$Z(T) = (Z(R))_S .$$

فرض کنید $\frac{a}{s}\in (Z(R))_S$. پس $\frac{a}{s}=\frac{b}{s'}$ که در آن $b\in Z(R)$ و $s'\in S$. بنا براین یک $t\in S = R - Z(R)$ چنان موجود است که $t s'a = t s b$. از طرفی $b\in Z(R)$. پس $0\neq x\in R$ چنان موجود است که $bx=0$. بنا براین

$$ts'ax = tsbx = 0 .$$

چون $ts'\in S$. پس $\frac{a}{s}\cdot\frac{x}{1}=0$. کافی است نشان دهیم $\frac{x}{1}\neq 0$. اگر $\frac{x}{1}=0$. آنگاه $\lambda\in S = R - Z(R)$ موجود است که $\lambda x = 0$. در نتیجه $x=0$ که این با $x\neq 0$ درتناقض است. پس $\frac{x}{1}\neq 0$ از آنجا که $\frac{a}{s}\cdot\frac{x}{1}=0$. بنا براین $\frac{a}{s}\in Z(T)$.
لذا $(Z(R))_S \subseteq Z(T)$.

برای اثبات $Z(T)\subseteq (Z(R))_S$. فرض کنید $\frac{a}{s}\in Z(T)$. پس یک $\frac{b}{s'}\neq 0$ چنان موجود است که $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{s'}=0$. بنا براین یک $t\in S = R - Z(R)$ موجود است که $tab=0$. پس $ab=0$. چون $\frac{b}{s'}\neq 0$. پس $b\neq 0$. این نیز نشان می دهد $a\in Z(R)$. لذا $\frac{a}{s}\in (Z(R))_S$. در نتیجه

$$Z(T)\subseteq (Z(R))_S .$$

از این رو $Z(T) = (Z(R))_S$. چون تحدید $\sim_R$ به $(Z(R))^*$ یک رابطه هم ارزی است، پس می توان $Z(R)^* = \bigcup_{\alpha\in A}[a_\alpha]_R$ را در نظرگرفت. این نیز نتیجه می دهد که

$$(Z(R))^*{}_S = \bigcup_{\alpha\in A}([a_\alpha]_R)_S .$$

لذا $Z(T)^* = \bigcup_{\alpha\in A}\left[\frac{a_\alpha}{1}\right]_T$.

در اینجا ثابت می کنیم برای هر $a\in Z(R)^*$، $\left|\left[\frac{a}{1}\right]_T\right| = |\,[a]_R|$. فرض کنید $[a]_R$ متناهی باشد. فرض کنید $x\in [a]_R$.
پس $x \sim_R a$. این نیز ایجاب می کند $\frac{x}{1} \sim_T \frac{a}{1}$. بنا براین $\frac{x}{1}\in\left[\frac{a}{1}\right]_T$. این نشان می دهد

$$|\,[a]_R\,| \le \left|\left[\frac{a}{1}\right]_T\right| .$$

برای اثبات $\left|\left[\frac{a}{1}\right]_T\right| \le |\,[a]_R|$ فرض کنید که $x\in\left[\frac{a}{1}\right]_T = (\,[a]_R)_S$. پس $x=\frac{b}{s}$ که در آن $b\in [a]_R$ و $s\in S$. از اینکه $b\in [a]_R$ نتیجه می گیریم که

$$Ann(b) = Ann(a) .$$

به ازای هر $s \in S = R - Z(R)$، نتیجه می گیریم $Ann(sb) = Ann(b)$. زیرا اگر $t \in Ann(sb)$. پس $tsb = 0$. چون حلقه R جابجایی است، پس $tbs = 0$, $s \in R - Z(R)$. بنا براین $tb = 0$. پس $t \in Ann(b)$. لذا

$$Ann(sb) \subseteq Ann(b) .$$

برای عکس این شمول، فرض کنید $t \in Ann(b)$. پس $tb = 0$. بنا براین $t(bs) = 0$. چون حلقه R جابجایی است و $s \in S = R - Z(R)$. پس $tsb = 0$. بنا براین $t \in Ann(sb)$. در نتیجه

$$Ann(b) \subseteq Ann(sb) .$$

لذا $Ann(sb) = Ann(b)$. از این تساوی نیز نتیجه می گیریم که

$$Ann(s^k b) = \cdots = Ann(s^2 b) = Ann(sb) = Ann(b) = Ann(a) .$$

بنا براین

$$\{ s^k b \mid k \geq 1 \} \subseteq [a]_R .$$

چون $[a]_R$ متناهی است، پس $s^K b = s^t b$. فرض کنید $t < k$. پس

$$s^t (b - s^{k-t} b) = 0 .$$

چون $s^t \in R - Z(R)$. پس $b - s^{k-t} b = 0$. بنا براین $b = s^{k-t} b$. قرار می دهیم $k - t = i$. پس $b = s^i b$. در نتیجه

$$\frac{b}{s} = \frac{s^i b}{s} = \frac{s^{i-1} b}{1} .$$

چون $Ann(s^{i-1} b) = Ann(a)$. پس $s^{i-1} b \in [a]_R$. یعنی $x = \dfrac{b}{s} \in [a]_R$. لذا $\left[\dfrac{a}{1}\right]_T \subseteq [a]_R$. از این رو

$$[a]_R = \left[\frac{a}{1}\right]_T .$$

از اینکه $b \in [a]_R$. پس $a \sim_R b$. بنا براین $\dfrac{a}{1} \sim_T \dfrac{b}{1}$. پس $\dfrac{b}{1} \in \left[\dfrac{a}{1}\right]_T$.

فرض کنید $[a]_R$ نامتناهی باشد. پس نگاشت $[a]_R \to \left[\dfrac{a}{1}\right]_T$ با تعریف $b \to \dfrac{b}{1}$ خوش تعریف و یک به یک است. خوش تعریفی این نگاشت بدیهی است.

برای اثبات یک به یک بودن این نگاشت فرض کنید که $\dfrac{b}{1} = \dfrac{b'}{1}$ ، در این صورت

$$t(b - b') = 0 .$$

که در آن $t \in S = R - Z(R)$. در نتیجه $b - b' = 0$. پس $b = b'$. لذا نگاشت یک به یک است. بنا براین

$$\left| [a]_R \right| \leq \left| \left[\frac{a}{1}\right]_T \right| .$$

یک رابطه هم ارزی $\approx$ روی S بصورت $s \approx t$ اگر و تنها اگر $sa = ta$ تعریف می کنیم.

پس $s \approx t$ اگر و تنها اگر برای هر $b \in [a]_R$،

$$sb = tb .$$

یعنی $sa = ta$ اگر و تنها اگر برای هر $b \in [a]_R$،

$$sb = tb .$$

فرض کنید $sa = ta$. پس $(s - t)a = 0$. بنا براین

$$s - t \in Ann(a) .$$

از اینکه $b \in [a]_R$. پس $Ann(a) = Ann(b)$. در نتیجه

$$s - t \in Ann(b) .$$

لذا $(s - t)b = 0$. از این رو

$$sb = tb\ .$$

اکنون فرض کنید $sb = tb$. پس $(s-t)b = 0$. بنا براین

$$s-t \in Ann(a)\ .$$

از اینکه $b \in [a]_R$. پس $Ann(b) = Ann(a)$. در نتیجه

$$s-t \in Ann(a)\ .$$

لذا $(s-t)a = 0$. از این رو $sa = ta$.

نگاشت $\left[\frac{a}{1}\right]_T \to [a]_R \times \frac{S}{\approx}$ تعریف شده با $(b,[s]) \to \frac{b}{s}$ خوش تعرف و پوشا است.

اگر $(b,[s]) = (b',[s'])$ ، آنگاه

$$b = b'\ , [s] = [s'].$$

اما $sa = s'a$ اگر و تنها اگر $sb = s'b$. چون $b = b'$.

پس $sb' = s'b$. بنا براین $sb' - s'b = 0$. پس به ازای هر $t \in S = R - Z(R)$، $t(sb' - s'b) = 0$. بنا براین $\frac{b}{s} = \frac{b'}{s'}$.

از این رو نگاشت خوش تعریف است.

به ازای هر $\left[\frac{a}{1}\right]_T = ([a]_R)_S$ ،$y \in$ که در آن $y = \frac{b}{s}$, $b \in [a]_R$, $s \in S$ است، یک $(b,[s])$ وجود دارد که $(b,[s]) \to \frac{b}{s}$ می باشد. از این رو نگاشت فوق پوشا است. بنا براین

$$\left|\left[\frac{a}{1}\right]_T\right| \le \left|[a]_R \times \frac{s}{\approx}\right| = |\,[a]_R|\ \left|\frac{s}{\approx}\right|.$$

همچنین نگاشت $\frac{s}{\approx} \to [a]_R$ تعریف شده با $[s] \to sa$ خوش تعریف و یک به یک است. برای اثبات خوش تعریفی آن فرض کنید $[s] = [s']$. پس $sa = s'a$. بنا براین نگاشت خوش تعریف است. برای اثبات یک به یک بودن این نگاشت فرض کنید $sa = s'a$. پس $s \approx s'$. بنا براین $[s] = [s']$. از این رو نگاشت یک به یک است. بنا براین $\left|\frac{s}{\approx}\right| \le |\,[a]_R|$. از طرفی

$$\left|\left[\frac{a}{1}\right]_T\right| \le |\,[a]_R|\ \left|\frac{s}{\approx}\right| \le |\,[a]_R||\,[a]_R| = |\,[a]_R|^{\,2}\ .$$

چون $|\,[a]_R|$ نا متناهی است، پس $\left|\left[\frac{a}{1}\right]_T\right| \le |\,[a]_R|$. لذا $\left|\left[\frac{a}{1}\right]_T\right| = |\,[a]_R|$.

بنا براین برای هر $\alpha \in A$، یک تابع دو سویی $\varphi_\alpha : [a_\alpha] \to \left[\frac{a_\alpha}{1}\right]$ وجود دارد. اکنون نگاشت

$$\varphi : Z(R)^* \to Z(T)^*$$

را با $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$ تعریف می کنیم اگر $x \in [a_\alpha]$. چون φ_α تابعی دو سویی است، پس $\varphi(x)$ تابع دو سویی می باشد. برای تکمیل اثبات نشان می دهیم که $y\,, x$ در مجاورت هم در $\Gamma(R)$ هستند اگرو تنها اگر $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ در $\Gamma(T)$ مجاور باشند. یعنی $xy = 0$ اگر و تنها اگر $\varphi(x)\,\varphi(y) = 0$.

فرض کنید $x\,, y \in Z(R)^* = \bigcup_{\alpha \in A} [a_\alpha]_R$ و $w\,, z \in Z(T)^* = \bigcup_{\alpha \in A} \left[\frac{a_\alpha}{1}\right]_T$. بنا براین فرض کنید $x \in [a]_R$, $y \in [b]_R$, $w \in \left[\frac{a}{1}\right]_T$, $z \in \left[\frac{b}{1}\right]_T$. کافی است نشان دهیم $xy = 0$ اگر و تنها اگر $wz = 0$.

چون $x\in [a]_R$. پس $x \; a\sim_R$. این نیز ایجاب می کند $\frac{x}{1} \sim_T \frac{a}{1}$. پس $\frac{x}{1}\in \left[\frac{a}{1}\right]_T$. از طرفی $w\in \left[\frac{a}{1}\right]_T$. پس $w \sim_T \frac{a}{1}$. بنا براین

$$Ann_T(\frac{x}{1}) = Ann_T(\frac{a}{1}) = Ann_T(w) \ .$$

چون $y\in [b]_R$. پس $y \; b\sim_R$. این نیز ایجاب می کند $\frac{y}{1} \sim_T \frac{b}{1}$. پس $\frac{y}{1}\in \left[\frac{b}{1}\right]_T$. از طرفی $z\in \left[\frac{b}{1}\right]_T$. پس $z \sim_T \frac{b}{1}$. بنا براین

$$Ann_T(\frac{y}{1}) = Ann_T(\frac{b}{1}) = Ann_T(z) \ .$$

اما $xy=0$ اگر و تنها اگر $\frac{y}{1}\in Ann_T(\frac{x}{1}) = Ann_T(w)$. از طرفی $\frac{y}{1}w=0$ اگر و تنها اگر

$$w\in Ann_T(\frac{y}{1}) = Ann_T(z) \, .$$

پس $xy=0$ اگر و تنها اگر $wz=0$. این نتیجه می دهد گراف های $\Gamma(T(R))$ و $\Gamma(R)$ یکریخت می باشند.

نتیجه ۲- ۳ : فرض کنید A و B حلقه های جابجایی باشند. بطوریکه $T(A)\cong T(B)$. در این صورت

$$\Gamma(A)\cong \Gamma(B) \, .$$

برهان: فرض کنید A و B حلقه های جابجایی به ترتیب با حلقه های خارج قسمتی کامل $T(A)$ و $T(B)$ باشند. بنا بر قضیه ۲- ۲ گرافهای $\Gamma(A)$ و $\Gamma(T(A))$ یکریختند. همچنین بنا بر قضیه ۲- ۲ گرافهای $\Gamma(B)$ و $\Gamma(T(B))$ نیز یکریخت می باشند. چون حلقه های خارج قسمتی کامل دو حلقه A و B یکریختند، پس $\Gamma(T(A))$ و $\Gamma(T(B))$ یکریختند. بنا براین $\Gamma(A)$ و $\Gamma(B)$ یکریختند .