بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

کدهای فضا – زمان متعامد

استاد راهنما:

دکتر حسین مومنایی

استاد مشاور:

دکتر عظیم ریواز

مولف:

سعید کرمی زرندی

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به :

پدر و مادر مهربانم

که موفقیت هایم را مدیون زحمات آنهایم.

تشکر و قدردانی :

پروای پنج روز جهان کی کنم، که عشق داده نوید زندگی جاودانیم.

"استاد شهریار"

سپاس معبودی را که عشق به آموختن را در دل انسانها به ودیعه نهاد.

خداوندا تو را سپاس می گویم که به من ارزشمندترین نعمت یعنی سلامتی را عطا فرمودی و در سرنوشت سازترین لحظات زندگی مرا یاری نموده ای .

بر خود لازم می دانم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسین مومنایی به خاطر همه راهنمایی هایشان در انجام پایان‌نامه صمیمانه قدردانی نمایم و از آقای دکتر ریواز که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند تشکر نمایم.

از جناب آقای دکتر سالمی و جناب آقای دکتر طالبی که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند تشکر می‌کنم.

در خاتمه از درگاه خداوند متعال طول عمر و توفیق روز افزون اساتید محترم و دانش‌پژوهان گرامی رشته زیبای ریاضی را در دستیابی به اهداف عالیه مسئلت دارم.

چکیده:

سیستم های مخابراتی MIMO به علت تقاضای روز افزون ارسال حجم بالایی از اطلاعات، همراه با دقت و سرعت کافی، از اهمیت فراوانی برخوردارند. ضرورت مطالعه کدهای فضا- زمان از آنجا ناشی می شود که نحوه و زمان ارسال اطلاعات از آنتن های فرستنده بر اساس این کدها صورت می گیرد .

در این پایان نامه با استفاده از نظریه ماتریس های متعامد به معرفی دسته خاصی از کدهای فضا- زمان با عنوان کدهای فضا- زمان متعامد می پردازیم.سپس با اشاره به مزیت های اصلی این کدها، روش هایی برای طراحی این کدها ارائه می گردد. ثابت خواهیم کرد که کدهای متعامد حقیقی و مختلط تنها برای تعداد محدودی آنتن فرستنده موجود هستند.از اینرو به بررسی کدهای متعامد تعمیم یافته می پردازیم و با ارائه روش های طراحی برای کدهای متعامد تعمیم یافته مختلط با نرخ کمتر از یک ، ثابت می کنیم کدهای متعامد تعمیم یافته مختلط با نرخ کامل برای تعداد بیش از ۳ آنتن فرستنده موجود نمی باشند و یک کران بالا برای نرخ این کدها را بدست می آوریم.

نهایتا به اهمیت بررسی انواع دیگر کدهای دارای نرخ بالا اشاره و دسته جدید کدها با عنوان کدهای فضا- زمان اثر متعامد را معرفی می کنیم.

این پایان نامه تحت حمایت مالی قطب جبرخطی و بهینه سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان می باشد.

کلمات کلیدی : کد فضا- زمان متعامد، اثرمتعامد، چندگانگی، نرخ، کدگشایی، اطلاعات دوجانبه.

مقدمه :

انتظار می رود نسل بعدی سیستم های مخابراتی بیسیم شامل ارائه خدمات چند رسانه ای از قبیل اینترنت پرسرعت بیسیم ، تلویزیون بیسیم، ارتباطات تصویری بیسیم و .... برای جمعیت قابل ملاحظه ای از کاربران تلفن همراه باشد.درخواست بالا برای این خدمات با وجود بالا رفتن احتمال خطا حین تبادل و دریافت اطلاعات که بواسطه فیدینگ سیگنال ارسالی توسط سیگنال های متعدد دیگر که از طریق سیستم های الکترونیکی مختلف منتشر می شوند و همچنین موانع مختلف بر سر راه سیگنال ارسالی، بوجود می آید ، زمینه های تحقیقاتی در مخابرات را به سمت طراحی سیستم هایی سوق می دهد که علاوه بر داشتن نرخ بالا در تبادل اطلاعات بر عامل فیدینگ نیز چیره شوند. در این میان یکی از روش های موثر طراحی کدهای فضا- زمان جهت بالا بردن چندگانگی و نرخ در کانال های چند ورودی – چند خروجی (MIMO) است. کدهای فضا- زمان متعامد که در این پایان نامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت یکی از انواع کدهای فضا- زمان با ویژگی های بسیار مناسب از قبیل چندگانگی بالا و کدگشایی سریع و نرخ مناسب می باشند.

کدهای فضا - زمان که در ابتدا با یک دید مخابراتی ابداع شدند، [۱و۳] دارای ساختار ریاضی قوی می باشند بویژه کدهای متعامد ریشه در نظریه ماتریس های متعامد دارند. از اینرو خواننده برای آشنایی با مفاهیم ابتدایی جبرخطی و ماتریس ها می تواند به [۱۷] مراجه کند. هرچند در بخش هایی از این پایان نامه از نظریه پیشرفته ماتریس ها که در [۲] یافت می شود بهره گرفته ایم.

هدف کلی این پایان نامه معرفی و طراحی کدهای متعامد است . در فصل اول با مفاهیم کلی مربوط به کدهای فضا- زمان آشنا خواهیم شد. در فصل دوم کدهای فضا- زمان متعامد و متعامد تعمیم یافته حقیقی و مختلط را با ارائه روش هایی برای طراحی آنها، معرفی می کنیم. در فصل سوم با اثبات یک قضیه مهم در مورد ماتریس ها یک کران بالا برای نرخ کدهای متعامد تعمیم یافته مختلط را بدست خواهیم آورد. و در فصل چهارم به معرفی دسته خاصی از کدهای فضا- زمان با نرخ بالا که تعمیمی از کدهای متعامدمی باشند، می پردازیم.

فهرست

فصل اول : ساختار کد فضا زمان و معیارهای طراحی آن **۱**

۱.۱- تعاریف و مدل سیستم مخابراتی بیسیم ۲

۱.۲- مفاهیم مربوط به یک کد فضا- زمان ۹

۱.۳- معیارهای طراحی کدهای فضا - زمان ۱۳

فصل دوم : کدهای فضا زمان متعامد و متعامد تعمیم یافته **۱۹**

۲.۱- تعاریف و مقدمات..... ۲۰

۲.۲- کد الموتی ۲۱

۲.۳- مزیت های کدهای متعامد :روش کدگشایی خطی و چندگانگی کامل ۲۶

۲.۴- کدهای متعامد و متعامد تعمیم یافته حقیقی ۳۲

۲.۵- کدهای متعامد و متعامد تعمیم یافته مختلط ۴۹

فصل سوم : محدودیت نرخ در کدهای متعامد تعمیم یافته مختلط **۶۴**

۳.۱- بازنویسی ساختار کد ۶۵

۳.۲- خاصیت هایی از ماتریس ها ۷۰

۳.۳- قضیه اصلی ۸۷

فصل چهارم : کدهای فضا زمان خطی با نرخ بالا **۹۶**

۴.۱- مقدمات ۹۷

۴.۲- بررسی کدهای خطی پراکنده از منظر بیشترین اطلاعات دو جانبه و خطا ی کم ۹۹

۴.۳- کدهای خطی پراکنده اثر متعامد ۱۰۷

منابع و ماخذ ۱۰۹

واژه نامه انگلیسی به فارسی..... ۱۱۱

واژه نامه فارسی به انگلیسی..... ۱۱۴

فصل اول

کد فضا- زمان و معیارهای طراحی آن

مقدمه :

در این فصل با تشریح سیستم مخابراتی بیسیم MIMO ، به معرفی کدهای فضا- زمان پرداخته، رابطه ورودی- خروجی را بدست می آوریم .سپس با اثبات یک قضیه در مورد خطای کدگشایی، معیارهای طراحی مربوط به کدهای فضا زمان از قبیل نرخ ، چندگانگی ، اطلاعات دو جانبه و ... را بیان می کنیم.

۱.۱ - تعاریف و مدل سیستم مخابراتی بیسیم:

سیستم های مخابراتی بیسیم از ابتدا دارای کاربردهای فراوان در شبکه های رادیویی- تلویزیونی ، ماهواره ای ، نظامی و ... بوده اند، اماکاربرد این سیستم ها با ابداع اولین نسل از شبکه های تلفن همراه در سال ۱۹۸۰ وارد مرحله جدیدی شد. پس از آن، تقاضای بازار جهت ارسال حجم زیاد و متنوع از اطلاعات مانند متن ، ویدئو،تصویر و... از طریق تلفن همراه که در ضمن منجر به کاهش مصرف انرژی باطری گوشی ها نیز شود، شرکت های مخابراتی را بر آن داشت تا به کمک محققان تلاش های جدیدی را برای ارتقاء و بهبود سیستم های مخابراتی بیسیم شروع کنند.

یکی از مشخصه های شبکه های مخابرات بیسیم وجود مسیرهای متعدد و مختلف بین فرستنده و گیرنده است ، در این مسیرها اشیاء و موانع مختلفی بر سر راه موج حامل سیگنال ارسالی قرار داردکه برخورد سیگنال ارسالی با این موانع موجب می شود، نسخه های مختلفی از آن در جهت های مختلف پخش شوند.دو مولفه ی اصلی سیگنال ارسالی یعنی فاز و توان، در نسخه های منعکس شده از موانع دستخوش تغییر می شوند. دو تغییر کلی بواسطه این موانع در سیگنال ارسالی بوجود می آید که شامل تضعیف (Attenuation) و محوشدگی (fading) می باشد. تضعیف بدلیل دور بودن آنتن ها از هم بوجود می آید و محوشدگی بواسطه ی تداخل کپی های منتشره از موانع با یکدیگر در گیرنده بوجود می آید. این دو امر موجب بالا رفتن احتمال خطا در شناسایی سیگنال ارسالی توسط گیرنده می شود. برای پائین آوردن احتمال خطا روش های مختلفی وجود دارد. یکی از این روش ها ارسال نسخه های مختلف از سیگنال ارسالی در زمان ها و مسیرهای مستقل از هم است تا در نهایت آنتن گیرنده، با ترکیب مناسب این سیگنال ها، سیگنال ارسالی را با خطای کمتری شناسایی کند(دیکد کند). به این روش چندگانگی (diversity) می گویند. چندگانگی دارای روش های مختلفی است، که یکی از موثرترین روش ها منجر به استفاده از چند آنتن در فرستنده (مبدا) و چندآنتن در گیرنده (مقصد) می شود (Multiple Input- Multiple Output) .

در یک سیستم MIMO ترکیبات خطی مختلف از اطلاعات ارسالی در زمان های مختلف بطور همزمان از آنتن های فرستنده ارسال می شوند تا آنتن های گیرنده چند کپی از اطلاعات ارسالی را دریافت کرده و کدگشایی (Decoding) در گیرنده با توجه به تمام سیگنال های دریافتی صورت گیرد، که این موجب کاهش احتمال خطای کدگشایی و همچنین کاهش تاثیر فیدینگ خواهد شد.

فرض کنیم که سیستم MIMO شامل N آنتن در فرستنده و M آنتن در گیرنده باشد، بر این اساس ، اطلاعات ارسالی ابتدا به یک دنباله باینری از اعداد ۰و۱ تبدیل می شود پس از آن بیت های ۰و۱ خود با نمادهایی(Symbol) از صفحه اعداد مختلط و یا حقیقی متناظر می شوند. به مجموعه شامل تمام این نمادها، الفبای نمادها (Constellation) می گوئیم. اگر در سیستم مخابراتی مورد نظر هر b بیت تشکیل یک حرف را دهد و الفبای آن شامل 2^b حرف باشد ، در این صورت هر حرف را با یک نماد از اعداد حقیقی یا مختلط متناظر می کنیم.بنابراین الفبای نمادها که با S نمایش خواهیم داد شامل 2^bعدد مختلط یا حقیقی است.

فرض کنید که بخواهیم K نماد $s_1,....,s_K$ ارسال شوند، بنا به تکنیک های کدگذاری جهت کاستن از اثر فیدینگ دقیقا خود این نمادها ارسال نمی شوند بلکه یک ترکیب خطی مختلط یا حقیقی از این نمادها برای ارسال از آنتن های مختلف و در بازه های زمانی مختلف آماده خواهند شد. بعنوان مثال آنتن اول در بازه زمانی اول، c_{11} را که یک ترکیب خطی برحسب این عددهاست را می فرستد، در بازه زمانی دوم c_{21} و بهمین ترتیب دربازه زمانی T ام c_{T1} که هر یک ترکیب خطی از این اعداد هستند فرستاده خواهد شد. برای سایر آنتن های فرستنده هم به همین شکل عمل می شود . در واقع به لحاظ زمان ارسال، در بازه زمانی tام، آنتن های اول تا Nام بطور همزمان $c_{tN},.....,c_{t2},c_{t1}$ را ارسال خواهند کرد.

ماتریس C را ماتریس متناظر با c_{tn} ها در نظر می گیریم.اکنون که در در زمان t ام سیگنال های $c_{tN},.....,c_{t2},c_{t1}$ از N آنتن در فرستنده ارسال شدند آنتن گیرنده mام سیگنال $r_{t,m}$ را دریافت می کند (در زمان t ام) که به شکل زیر می باشد :

$$r_{t,m}=\sum_{n=1}^{N}\alpha_{n,m}c_{t,n}+\eta_{t,m} \qquad (۱.۱)$$

در رابطه فوق به $\alpha_{n,m}$ ضریب فیدینگ یا ضریب کانال یا ضریب مسیر (path gain) بین آنتن فرستنده nام و آنتن گیرنده mام می گویند که مشخصه ای برای میزان فیدینگ فضای انتشار است. در واقع این ضرایب مشخصه ای برای توصیف کانال ارتباطی بین آنتن های فرستنده و آنتن های گیرنده می باشند . ماتریس متناظر با آن ها را با عنوان ماتریس کانال نامگذاری می کنند و با Hنمایش می دهند.

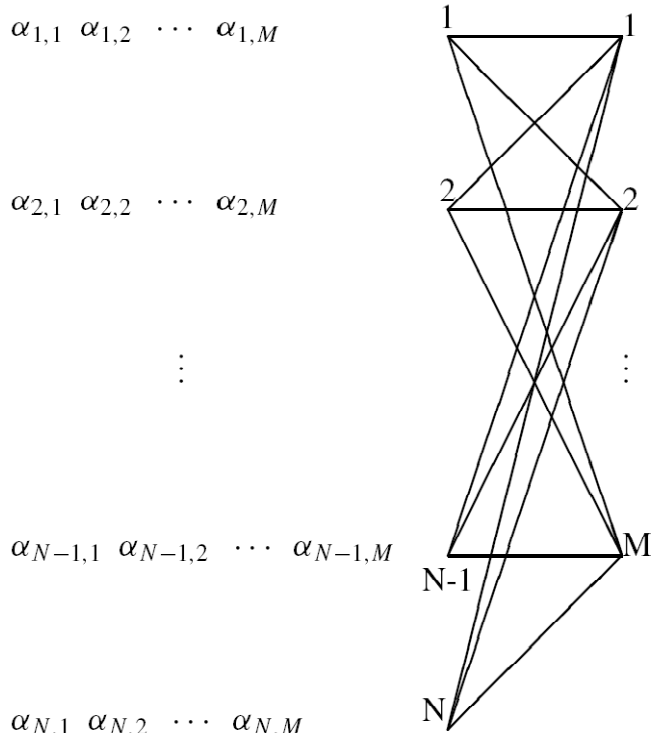
همچنین $\eta_{t,m}$ ها مولفه های نویز در آنتن گیرنده mام در بازه زمانی tاست، که ماتریس متناظر آن با $\mathcal{N}$ نمایش داده خواهد شد. r ماتریس سیگنال های دریافت شده متناظر با $r_{t,m}$ ها می باشد. یعنی

$$H=\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & .... & \alpha_{1,M} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & .... & \alpha_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & .... & \alpha_{N,M} \end{bmatrix}_{N\times M} , \qquad C=\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & .... & C_{1,N} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & .... & C_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{T,1} & C_{T,2} & .... & C_{T,N} \end{bmatrix}_{T\times N} \qquad (۱.۲)$$

$$r=\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & .... & r_{1,M} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & .... & r_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{T,1} & r_{T,2} & .... & r_{T,M} \end{bmatrix}_{T\times M} , \qquad \mathcal{N}=\begin{bmatrix} \eta_{1,1} & \eta_{1,2} & .... & \eta_{1,M} \\ \eta_{2,1} & \eta_{2,2} & .... & \eta_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{T,1} & \eta_{T,2} & .... & \eta_{T,M} \end{bmatrix}_{T\times M} \qquad (۱.۳)$$

بنابراین طبق مفروضات بالا اگر رابطه (۱.۱) را به شکل ماتریسی بنویسیم شکل کلی معادله ورودی- خروجی یک سیستم MIMO بدست خواهد آمد :

$$r=CH+\mathcal{N} \qquad (۱.۴)$$



شکل ۱.۱- طرحی ازیک سیستم MIMO

ماتریس C از مرتبه $T \times N$ که در بالا معرفی شد، مشخص می کند که برای N آنتن فرستنده و T زمان مختلف جهت ارسال ، اطلاعات با چه تغییراتی از کدام فرستنده و در چه زمانی باید ارسال شوند. در واقع برای ارتقاء مزیت یک سیستم MIMO نحوه طراحی این ماتریس دارای اهمیت فراوان است. از این رو با ارائه تعریف زیر نحوه طراحی این ماتریس ها ، را مورد بررسی قرار می دهیم:

تعریف ۱.۱:به ماتریس مختلط(حقیقی) $C = \sum(X)$,$X = (x_1, x_2, ..., x_K)^t$ از مرتبه $T \times N$ یک کد فضا- زمان (Space-time code) مختلط(حقیقی) از مرتبه $T \times N$ می گوئیم هرگاه درایه $c_{tn}; 1 \le n \le N, 1 \le t \le T$ از ماتریس C، یک ترکیب خطی مختلط(حقیقی) براساس متغیرهای $x_1, ..., x_K, \overline{x_1}, ..., \overline{x_K}$ باشد.

به کد فضا- زمان $C = \sum(X)$ از مرتبه $T \times N$ ، یک طرح فضا- زمان برای N آنتن فرستنده و T بازه زمانی، بر حسب متغیرهای $x_1, ..., x_K$ می گویند.

هرگاه با توجه به حروف مورد استفاده در متن ارسالی، بخواهیم نمادهای متناظر آنها مثلا $s = (s_1, s_2, ..., s_K)$ را بفرستیم دستگاه کد کننده(Encoder) ، $s_1, s_2, ..., s_K$ را درکد C بجای $x_1, x_2, ..., x_K$ جایگذاری کرده ،ماتریس C(ماتریس کد) را محاسبه می کند و درایه (t, n) یعنی $C_{t,n}$ که طبق تعریف، بصورت ترکیب خطی مختلط یا حقیقی از $s_1, s_2, ..., s_K$ می باشد را در زمان t ام از آنتن n ام برای ارسال آماده می کند.

تعریف ۱.۲: اگر عددهای مختلط (حقیقی) از الفبای نماد S انتخاب شوند آنگاه به هر یک از ماتریس های $C = \sum(X)$,$s_i \in S, s = (s_1, s_2, ..., s_K)^t, C = \sum(s)$، یک کلمه کد از کد فضا- زمان $C = \sum(X)$ روی S می گوئیم.

تعریف۱.۳ : اگر عددهای مختلط (حقیقی) از الفبای نماد S انتخاب شوند در این صورت به مجموعه $\left\{ \sum(s) \mid s \in S^k \right\}$ ، یعنی تمام کلمه کدهای قابل تعریف روی S ، کتاب کدها (Code Book) ی کد فضا- زمان $C = \sum(X)$ روی S می گوئیم .

مثال۱.۱: اگر در سیستم مخابراتی مورد نظر هر ۳ بیت تشکیل یک حرف را دهند آنگاه الفبای حروف دارای ۸ حرف است که شامل :

$$a \equiv 000, b \equiv 001, c \equiv 010, d \equiv 011$$
$$e \equiv 100, f \equiv 101, g \equiv 110, h \equiv 111$$

	011	010	001	000
	111	110	101	100

الفبای نماد $8-QAM$

می باشد. حال تناظر زیر را بین بیت هاو الفبای نماد مختلط $S=8-QAM$ در نظر می گیریم :

$000\equiv(2+\mathrm{i})=\mathrm{s}_1, 001\equiv(1+\mathrm{i})=\mathrm{s}_2, 010\equiv(-1+\mathrm{i})=\mathrm{s}_3, 011\equiv(-2+\mathrm{i})=\mathrm{s}_4$

$100\equiv(2-\mathrm{i})=\mathrm{s}_5, 101\equiv(1-\mathrm{i})=\mathrm{s}_6, 110\equiv(-1-\mathrm{i})=\mathrm{s}_7, 111\equiv(-2-\mathrm{i})=\mathrm{s}_8$

برای سیستم MIMO با ۲ آنتن در فرستنده و ۱ آنتن در گیرنده کد فضا- زمان زیر از مرتبه 3×2 را در نظر میگیریم:

$$C=\begin{bmatrix} x_1+2\overline{x_2} & \overline{x_1}-2x_3 \\ \overline{x_1}+\overline{x_2} & x_1+x_3 \\ \overline{x_3} & \overline{x_2} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

براساس این کد اطلاعات در ۳ زمان مختلف از ۲ آنتن در فرستنده ارسال می شوند.فرض کنید که بخواهیم متن afd را ارسال کنیم، نمادهای متناظر با آنها به ترتیب $\mathrm{s}_4,\mathrm{s}_6,\mathrm{s}_1$ می باشند. دستگاه کدکننده با جایگذاری $x_1=s_1, x_2=s_6, x_3=s_4$ در کد فوق ،در زمان اول به طور همزمان به ترتیب اعداد مختلط $s_1+2\overline{s_6}=4+3\mathrm{i}$ و $\overline{s_1}-2s_4=6-3\mathrm{i}$ را از آنتن های اول و دوم ارسال می کند.

در بازه زمانی دوم بطور همزمان به ترتیب اعداد مختلط $s_1+s_4=2\mathrm{i}$ و $\overline{s_1}+\overline{s_6}=3$ از آنتن های اول و دوم ارسال می شوند. و در زمان سوم هم به ترتیب اعداد مختلط $\overline{s_4}=-2-\mathrm{i}$ و $\overline{s_6}=1+\mathrm{i}$ از آنتن های اول و دوم ارسال خواهند شد.

گیرنده به ترتیب در زمان های اول ،دوم وسوم اعداد مختلط r_3, r_2, r_1 را دریافت خواهد کرد که:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3\mathrm{i} & 6-3\mathrm{i} \\ 3 & 2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + (3\alpha_1 - 3\alpha_2)\mathrm{i} + \eta_1 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2\mathrm{i} + \eta_2 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\mathrm{i} + \eta_3 \end{pmatrix}$$

در رابطه فوق α_2, α_1 ضرایب کانال بین آنتن فرستنده اول و گیرنده و آنتن فرستنده دوم و گیرنده می باشند . همچنین η_3, η_2, η_1 ضرایب نویز در گیرنده در زمان های اول ، دوم و سوم می باشند.

یادآوری می کنیم که در کاربرد اکثرا S یک مجموعه متناهی مانند الفبای QAM است ولی برای بررسی کلی یک کد گاهی اوقات فرض می شودالفبای نمادها نامتناهی باشد و سپس چون خواص ماتریس ها بر زیر مجموعه به ارث می رسد ساختار کد بر روی S نیز حفظ خواهد شد.

اکنون به توضیح برخی اصطلاحات مخابراتی رایج در بحث کدهای فضا - زمان می پردازیم[۴] :

هرگاه سیستم مخابرات ارتباطی بین آنتن های فرستنده و دریافت کننده طوری باشد که سیگنال دریافتی در بازه زمانی t ام از سیگنال های فرستاده شده در زمان های قبل از t مستقل باشد در این صورت کانال مورد استفاده اصطلاحا یک کانال flat است.

بعلاوه ضرایب کانال (path gains) ممکن است در طول زمان Tتغییر کنندولی هرگاه در بازه زمانی Tثابت فرض شوند در این صورت کانال یک کانال شبه ایستا (Quasi-static) می باشد.

یک واژه مصطلح دیگر SNR است که نمایانگر توان سیگنال دریافتی به توان نویز می باشد . در واقع هرگاه E_s مقدار میانگین توان نمادهای ارسالی و $N_0/2$ واریانس متغیر تصادفی نویز باشند (N_0 عددی ثابت است) آنگاه مقدار SNR برابر $\rho = \frac{NE_s}{N_0}$ می باشد.

تذکر۱.۱ : از این پس همه کانال ها از نوع Quasi static flat fading chanel می باشند.

تذکر ۱.۲ : همچنین از این پس فرض می شود که در آنتن های گیرنده ضرایب کانال و ساختار کدشناخته شده اند و دستگاه کد گشا مقدار مولفه های ماتریس های C, H را در اختیار دارد.

مدل آماری سیستم :

همانطور که در بالا اشاره شد یکی از مشخصه های سیستم های بیسیم ، وجود مسیرهای متعدد بین فرستنده ها و گیرنده هاست از اینرو کانال بین گیرنده و فرستنده مدام در حال تغییر است بنابراین ضرایب کانال متغیرهایی تصادفی اند. همچنین نویزهای ایجاد شده در گیرنده ها نیز متغیرهایی تصادفی می باشند. طبق رابطه (۱.۲) نمادهای ارسالی و دریافتی ، نویزها و ضرایب کانال همگی متغیرهای تصادفی اند از اینرو همه بحث ها از شاخصه احتمالی برخوردارند.

بنابر تجربه در یک سیستم بیسیم MIMO ، قسمت های حقیقی و موهومی ضرایب کانال متغیرهای تصادفی iid با توزیع گاوسی (نرمال) دارای میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 = 0/5$ فرض می شوند.یعنی:

$$Var(\mathrm{Re}(\alpha_{n,m})) = Var(\mathrm{Im}(\alpha_{n,m})) = 0/5 \qquad (۱.۵)$$

از اینرو توزیع $|\alpha_{n,m}|$ها، توزیع رایلی[۱] با میانگین صفر و واریانس ۱ خواهد بود که به همین دلیل کانال H را دارای توزیع رایلی با میانگین صفر و واریانس ۱ خطاب می کنند.البته در بعضی موارد ماتریس کانال Hرا دارای توزیع گاووسی با میانگین صفر و واریانس ۱ خطاب می کنند که منظور از آن نیز همین است.

نویز ها نیز ، متغیرهای تصادفی گاوسی (نرمال) با میانگین صفر و واریانس $\frac{N_0}{2}$ (N_0 عددی ثابت است) می باشند یعنی :

$$Var(\mathrm{Re}(\eta_{t,m})) = Var(\mathrm{Im}(\eta_{t,m})) = \frac{N_0}{2} \qquad (۱.۶)$$

حال اگر آنتن های دریافت کننده و فرستنده به اندازه کافی از هم دور بوده و بر روی هم تاثیری نداشته باشند آن گاه می توان فرض کرد که ضرایب کانال(path gain) بین هر دو آنتن گیرنده و فرستنده از سایر ضرایب کانال مستقل اند. همچنین ما فرض می کنیم که ضرایب کانال، نویزهاوسیگنال های فرستاده شده همگی نسبت به هم مستقل باشند.

اغلب اوقات برای بررسی راحتر سیستم فرض می شود که همه متغیرهای تصادفی نرمالیزه شده اند. یک روش برای نرمال کردن متغیرها این است که میانگین توان نماد ارسالی از هر آنتن فرستنده برابر

---

[۱] -Reyleigh

$E_s = 1/N$ باشد و واریانس نویز را هم برابر $N_0 = 1/\rho$ فرض کنیم یعنی $\frac{1}{2\rho}$. طبق این روش میانگین توان دریافتی در هر آنتن برابر ۱ است و $SNR = \rho$. اما یک روش دیگر برای نرمال کردن متغیرها این است که رابطه ورودی- خروجی (۱.۴) را به شکل زیر بنویسیم:

$$r = \sqrt{\frac{\rho}{N}} C.H + \mathcal{N}$$

که در آن ρ همان مقدار SNR است.

البته در کاربرد برای اینکه بتوانند کد را از نظر اطلاعات بررسی نمایند، باید رابطه فوق را بشکل برداری نوشت. جهت اینکار از دو طرف رابطه فوق ترانهاده گرفته و با تجدید نامگذاری ها،بدون از دست دادن کلیت رابطه ورودی خروجی را برای سیستم به شکل زیر می نویسند :

$$r = \sqrt{\frac{\rho}{N}} H.C + \mathcal{N} \qquad (۱.۷)$$

که در آن ماتریس سیگنال دریافتی r ، از مرتبه $M \times T$ همچنین H ماتریس ضرایب کانال از مرتبه $M \times N$ و $\mathcal{N}$ ماتریس ضرایب نویز از مرتبه $M \times T$ خواهند بود.

۱.۲- مفاهیم مربوط به یک کد فضا - زمان:

در این بخش به معرفی مفاهیم مربوط به کدهای فضا - زمان می پردازیم و سپس در بخش بعد با توجه به این مفاهیم معیارهای طراحی را بیان خواهیم کرد.

نرخ: اگر کد C طبق تعریف ۱.۱ یک کد فضا - زمان باشد آنگاه نرخ آنرا با R نشان می دهیم که : $R = \frac{K}{T}$. در واقع نرخ یک کد معیار مناسبی برای بیان تعداد نماد های ارسالی در واحد زمان است.کد مثال ۱.۱ یک کد فضا- زمان با نرخ ۱ است .

کدگشایی : همانطور که می دانید منظور از کدگشایی عبارتست از سلسله محاسباتی که در گیرنده صورت می گیرد تاگیرنده با بیشترین احتمال درستی ممکن، اطلاعات فرستاده شده توسط فرستنده را شناسایی نماید. روش های مختلفی جهت کدگشایی دریک سیستم MIMO وجود دارد ازجمله روش ML و روش کدگشایی کره ای(Sphere) . در این پایان نامه فرض می کنیم که گیرنده از روش ML جهت کدگشایی بهره می گیرد.

روش کدگشایی ML :

متداول ترین روش دیکدینگ سیگنال های دریافتی در یک سیستم MIMO روش کدگشایی Maximum-Likelihood(ML) می باشد . همانطور که گفته شد یکی از مزیت های کدهای فضا- زمان نسبت به کدهای کلاسیک بحث چندگانگی می باشدکه داشتن چند نسخه از اطلاعات ارسالی در قالب ماتریس r توسط آنتن های گیرنده مهمترین نتیجه آن است . در روش کدگشایی بیشترین احتمال (ML) دستگاه گیرنده پس از دریافت ماتریس r توسط آنتن های گیرنده ، این نسخه ها را برای پیدا کردن کلمه کد ارسال شده از میان همه کلمه کدهای عضو کتاب کدهای کد فضا- زمان C و در نتیجه نمادهای ارسالی با بیشترین احتمال درستی استفاده می کند.

از آنجایی که نویزها متغیر تصادفی گاوسی iid هستند برای ماتریس کانال و نمادهای ارسالی داده شده با توجه به(۱.۱) چون ترکیبات خطی متغیرهای تصادفی گاوسی iid متغیرهای تصادفی گاوسی iid می باشند بنابراین سیگنال های دریافتی نیز متغیر تصادفی گاوسی iid هستند و تابع چگالی احتمال ماتریس دریافتی به شرط ماتریس کانال Hو کد ارسالی C عبارت است از :

$$f(r \mid C,H) = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{M \times M}{2}}} \exp\left\{\frac{-\| r - C.H \|^2}{N_0}\right\} \qquad (۱.۸)$$

در عبارت بالا منظور از $\| . \|$ همان نرم فروبنیوسی ماتریس هاست که به شکل زیر تعریف می شود:

$$\| A \| = \sqrt{Tr(A^* A)}$$

که منظور از $Tr(A)$ اثر ماتریس Aاست و برابر جمع عناصر روی قطر A می باشد. .

روش کدگشایی بیشترین احتمال (ML) در میان تمام کلمه کدهای عضو کتاب کدهای کد C، کلمه کدی را بعنوان ماتریس فرستاده شده توسط گیرنده ها (در زمان های مختلف) قلمداد می کند که تابع $f(r \mid C,H)$ را ماکزیمم نماید. با توجه به (۱.۸) به این نتیجه می رسیم که دیکد کننده ،کلمه کدی را بعنوان کلمه کد فرستاده شده تلقی می کند که در آن عبارت زیر مینیمم شود:

$$\| r - C.H \|^2 = Tr[(r - C.H)^* (r - C.H)] = \sum_{t=1}^{T} \sum_{m=1}^{M} | (r - C.H)_{t,m} |^2 \qquad (۱.۹)$$

از این پس ما از $\hat{y} = \arg\min_{y \in Y} F(y)$ برای بیان این مفهوم استفاده می کنیم که : در میان مقادیر ممکن $y \in Y$ ، $\hat{y}$ ، $F(y)$ را مینیمم می کند .

بنابراین اگر روش کدگشاییML پس از جستجوی مینیمم کننده ی (۱.۹) روی کلمه کدهای موجود در کتاب کدها ، ماتریس $\hat{C}$ را بعنوان مینیمم کننده انتخاب کند در این صورت با بیشترین احتمال ممکن ماتریس $\hat{C}$ توسط آنتن های فرستنده ارسال شده است و این یعنی :

$$\hat{C} = \underset{C \in codeBook}{\arg\min} (\| r - C.H \|^2) = \underset{C \in codeBook}{\arg\min} (Tr[(r - C.H)^*(r - C.H)]) \qquad (۱.۱۰)$$

هدف اصلی در کدگشایی ،پیدا کردن نمادهای $s_K,....,s_1$ای است که قرار بوده فرستاده شوند. و چون با جایگذاری $s_K,....,s_1$ بجای $x_K,....,x_1$در ساختار کد C توسط دستگاه کد کننده (encoder) ماتریس ارسالی تشکیل شده است، بنابراین پیدا کردن $\hat{C}$ به معنای پیدا کردن $\hat{s}_K,....,\hat{s}_1$ است که دستگاه دیکدکننده(decoder) با بیشترین احتمال درستی ممکن ،آنهارا نمادهای ارسالی توسط فرستنده ها تلقی می کند یعنی:

$$(\hat{s}_1,...,\hat{s}_K) = \underset{(x_1,...,x_K) \in S^K}{\arg\min} (Tr[(r - C.H)^*(r - C.H)]) \qquad (۱.۱۱)$$

که در آن منظور از S^K، حاصلضرب دکارتی $\underbrace{S \times S \times ... \times S}_{K}$ است (S الفبای نمادهاست).

در مثال ۱.۱ دیکد کننده پس از دریافت سیگنال های دریافتی r_3, r_2, r_1 کلمه کد $\hat{C}$ را از میان کتاب کدهای

$$CB = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + 2\overline{x_2} & \overline{x_1} - 2x_3 \\ \overline{x_1} + \overline{x_2} & x_1 + x_3 \\ \overline{x_3} & \overline{x_2} \end{bmatrix} \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in S = 8-QAM \right\}$$

از کد C روی الفبای نماد $8-QAM$ برمی گزیند که داشته باشیم:

$$\hat{C} = \underset{C \in CB}{\arg\min} (Tr[(r - C.H)^*(r - C.H)])$$

که معادل اینست که: دیکدکننده با بیشترین احتمال ممکن نمادهای $\hat{s}_3, \hat{s}_2, \hat{s}_1$ را به عنوان نمادهای ارسالی تلقی می کند که:

$$(\hat{s}_1,\hat{s}_2,\hat{s}_3) = \underset{(x_1,x_2,x_3) \in S^3}{\arg\min} (| r_1 - \alpha_1 x_1 - 2\alpha_1 \overline{x_2} - \alpha_2 \overline{x_1} + 2\alpha_2 x_3 |^2$$

$$+ | r_2 - \alpha_1 \overline{x_1} - \alpha_1 \overline{x_2} - \alpha_2 x_1 - \alpha_2 x_3 |^2 + | r_3 - \alpha_1 \overline{x_3} - \alpha_2 \overline{x_2} |^2)$$

همانطور که می بینید دیکد کننده برای پیدا کردن مینمم کننده مجبور است در میان 8^3 حالت جستجو انجام دهد که منجر به محاسباتی با یک فرآیند نمایی خواهد شد.

منظور از خطا در کدگشایی اینست که کد c توسط فرستنده ها فرستاده شده باشد ولی دیکد کننده به اشتباه $e \neq c \in codeBook$ را بعنوان کد ارسالی دیکد کند.همانطور که توضیح داده شد روش ML برمبنای جستجوی مینمم کننده $\| r - C.H \|^2$ روی تمام کلمه کدهای ممکن در کتاب کدهای کد C روی الفبای S، سیگنال های دریافتی را دیکد می کند. از اینرو در این روش زمانی خطا رخ می دهد که داشته باشیم

$$\| r - e.H \|^2 \leq \| r - c.H \|^2$$

و این یعنی ماتریس $e.H$ کمترین فاصله را با ماتریس دریافتی r داشته باشد.

ظرفیت کانال :

چون بحث ظرفیت به مقدار اطلاعات فرستاده شده توسط سیستم برمیگرددهمانطور که اشاره شد برای بررسی سیستم از منظر اطلاعات ، رابطه ورودی خروجی (۱.۷)را برای یک سیستم MIMO با N آنتن در فرستنده ، M آنتن در گیرنده که دارای مقدار SNR، ρ می باشد، بکار میگیریم.
همچنین فرض می کنیم ماتریس کانال H(و در واقع یعنی ضرایب کانال)، در گیرنده ها شناخته شده باشد در این صورت ظرفیت کانال به شکل

$$C(\rho, N, M) = \underset{R_S \geq 0, TrR_S = N}{Max} [E_H Log \det\left(I_M + \frac{\rho}{N} H R_s H^* \right)] \qquad (۱.۱۲)$$

تعریف می شود [۷] ، که با توجه به توزیع در نظرگرفته شده برای کانال، منظور از E_H امید ریاضی روی تمام ماتریس های کانال H می باشد.زمانی که توزیع Hبه گونه ای باشد که نسبت به دوران پایا باشد(توزیع نرمال دارای این خاصیت است) آنگاه ثابت می شود[۷]که $R_s = I_N$ و بنابراین ظرفیت کانال به شکل زیر می باشد:

$$C(\rho, N, M) = E_H Log \det\left(I_M + \frac{\rho}{N} H H^* \right) \qquad (۱.۱۳)$$

چندگانگی :

چندگانگی بحث بسیار گسترده ای در مخابرات است[۱۳] . آنچه در کاربرد برای کدهای فضا- زمان بعنوان معیار چندگانگی قرار می گیرد اینست که : در یک سیستم MIMO با Nآنتن در فرستنده چندگانگی یک کد فضا- زمان برای M آنتن در گیرنده عبارت است از rM که در آن r مینیمم رتبه ممکن در بین ماتریس های $A(c',c) = (c'-c)^*(c'-c),\ \ c,c' \in codeBook$ می باشد .

منظور از اینکه گفته می شود یک کد فضا- زمان دارای چندگانگی کامل می باشد اینست که همه ماتریس های $A(c',c),\ c,c' \in codeBook$ دارای رتبه کامل (که برابر N است) باشند وچون این ماتریس ها مربعی اند زمانی اتفاق می افتد که همه ماتریس های $A(c',c)$ معکوس پذیر باشند.

۱.۳- معیارهای طراحی کدهای فضا - زمان

اکنون برای دست یافتن به معیارهای مناسب تر جهت طراحی کد های فضا- زمان به یک کران بالا جهت خطای کدگشایی نیازمندیم که در قضیه زیر می آید :

قضیه ۱.۱ : یک سیستم MIMO با N آنتن فرستنده و M آنتن گیرنده که از کد فضا- زمان C جهت ارسال اطلاعات استفاده می کند و روش کدگشایی ML را برای کدگشایی بکار می گیرد، را در نظر می گیریم . فرض می کنیم میانگین توان سیگنال ارسالی از هر آنتن برابر $E_s = \frac{1}{N}$ باشد و نویزها متغیرهای تصادفی گاوسی دارای میانگین صفر و واریانس $\frac{N_0}{2}$ باشند که $N_0 = \frac{1}{\rho}$ (ρ مقدار SNR و N_0 عددی ثابت است) .همچنین ضرایب کانال (path gain) متغیرهای تصادفی رایلی با میانگین صفر و واریانس ۱ باشند. اگر c ماتریس سیگنال فرستاده شده باشد، احتمال اینکه دیکدکننده به اشتباه c' را ماتریس سیگنال فرستاده شده قلمداد کند دارای کران بالای زیر است:

$$P(c' \to c) \le \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}[1+(\rho\lambda_n/4)]^M} \qquad (۱.۱۴)$$

که در رابطه فوق λ_n ها مقادیر ویژه ماتریس $A(c',c)$ می باشند که بصورت زیر تعریف می شود:

$$A(c',c) = (c'-c)^*(c'-c) \qquad (۱.۱۵)$$

اثبات[۴] :برای اثبات رابطه فوق ابتدا احتمال خطا را برای یک H ثابت حساب می کنیم و سپس با حساب میانگین روی توزیع H احتمال خطا را بدست می آوریم :

چون c ماتریس فرستاده شده است داریم $r = c.H + \mathcal{N}$ بنابراین طبق آنچه در توضیح روش ML آمد احتمال خطا برای کانال ثابت H عبارتست از :

$$\begin{aligned}
&P(c' \to c \mid H) = P(Tr[(r-c.H)^*(r-c.H)] - Tr[(r-c'.H)^*(r-c'.H)] > 0 \mid H) \\
&= P(Tr[\mathcal{N}^*\mathcal{N} - ((c-c').H+\mathcal{N})^*.((c-c').H+\mathcal{N})] > 0 \mid H) \\
&= P(Tr[H^*(c-c')*.(c-c')H + \mathcal{N}^*.(c-c')H + H^*(c-c')^*.\mathcal{N}] < 0 \mid H) \\
&= P(\|(c-c').H\|^2 - X < 0 \mid H) = P(X > \|(c'-c).H\|^2 \mid H) \qquad (۱.۱۶)
\end{aligned}$$