دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه :

توزیع کرانگین دو متغیره

مهدیه انور

استاد راهنما :

دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور :

دکترعلیرضا نعمت اللهی

مرداد ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکزشیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه :

توزیع کرانگین دو متغیره

مهدیه انور

استاد راهنما :

دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور :

دکترعلیرضا نعمت اللهی

مرداد ۱۳۹۲

تاریخ : ۹۲/۰۵/۰۳
شماره : ۰۵/۱۶۲۷۶
پیوست : ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه پیام نور استان فارس

دانشگاه پیام نور شیراز
باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم مهدیه انور** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۹۰۰۰۹۶۸۳۹** با عنوان:

" توزیع کرانگین دو متغیره"

با حضور هیأت داوران در روز **پنج‌شنبه** مورخ **۱۳۹۲/۰۵/۰۳** ساعت **۹:۳۰** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ......۱۸٫۵......به حروف......هیجده و نیم...... با درجه......عالی......تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر نرگس عباسی	راهنما	دانشیار	پیام‌نور شیراز	
۲	دکتر علیرضا نعمت الهی	مشاور	دانشیار	شیراز	
۳	عبدالرضا بازرگان لاری	داور	استادیار	شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام‌نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

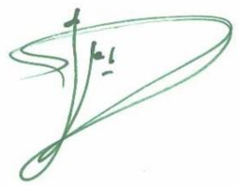
دانشگاه پیام نور مرکز شیراز

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۶۲۲۲۲۵۵ - ۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۴۹ - ۰۷۱۱
صندوق پستی: ۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب مهدیه انور دانشجوی ورودی سال۱۳۹۰ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

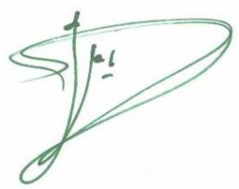
مهدیه انور



۱۳۹۲/۰۵/۰۳

اینجانب مهدیه انور دانشجوی ورودی سال۱۳۹۰ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

مهدیه انور



۱۳۹۲/۰۵/۰۳

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه مطعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

مرداد ۱۳۹۲

شکر و سپاس خدا را که بزرگترین امید و یاورم در لحظه لحظه زندگیست.

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار

و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند

و

تقدیم به خواهرم:

که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است.

سرکار خانم **دکتر نرگس عباسی** و جناب آقای **دکتر علیرضا نعمت اللهی** اساتید راهنما و مشاورم:

شما روشنایی بخش تاریکی جان هستید و ظلمت اندیشه را نور می بخشید.

چگونه سپاس گویم مهربانی و لطف شما را که سرشار از عشق و یقین است.

چگونه سپاس گویم تأثیر علم آموزی شما را که چراغ روشن هدایت را بر کلبه ی محقر وجودم فروزان ساخته است.

آری در مقابل این همه عظمت و شکوه شما مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف.

و از استاد فرزانه؛ جناب آقای **دکتر عبدالرضا بازرگان لاری** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند

و جناب آقای **امین اکبری** و جناب آقای **دانیالی**، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات شما را سپاس گویم.

چکیده

بسیاری از مدل های شناخته شده کنونی برای توزیع کرانگین دو متغیره (چند متغیره) بیش از حد محدود شده‌اند. یک مدل جدید بر اساس شرایط چند جمله‌ای معرفی شده است که بر بسیاری از نقاط ضعف مدل‌های شناخته شده غلبه می‌کند. سادگی و انعطاف‌پذیری مدل‌های جدید با اقتباس از خواص مختلف توزیعی و برنامه‌های کاربردی به داده‌های واقعی نشان داده شده است.

یکی از اساسی‌ترین خواص هرتوزیع، گشتاورها هستند .گشتاورها معیارهای مهم یک توزیع را شرح می دهند. آنها همچنین می‌توانند درمیان بسیاری دیگر از موارد استفاده، برای برآورد استفاده شوند. گشتاورها برای توزیع مقدار کرانگین دو متغیره شناخته شده نیستند. فرمول ها برای خواص گشتاور حتی برای ساده ترین توزیع های مقدار کرانگین دو متغیره شناخته شده نیست. در اینجا، بسط های ساده برای خواص مختلف از هر توزیع مقدار کرانگین دو متغیره مفروض استنتاج شده است. هدف از این پایان‌نامه استنتاج فرمول های مختلف برای گشتاورها و مقادیر مربوط به هرتوزیع دو متغیره کرانگین است.هر فرمول از یک مجموع نامحدود ساده نتیجه گیری شده است. خواص در نظر گرفته شده شامل گشتاورهای ضربی، گشتاورهای شرطی، تابع مولد گشتاور توأم و غیره است. کارآیی های محاسباتی از این فرمول ها با توجه به روش های استاندارد برای محاسبه خواص گشتاور صدق می کند. توزیع‌های مقدارکرانگین دو متغیره، مدل همزمان مقادیرکرانگین که از دو متغیراستفاده می‌شود. (برای مثال کرانگین‌های همزمان از بارش و سرعت باد یا کرانگین همزمان از بارش باران و برف). در بسیاری از مدل‌ها در ادبیات توزیع مقدار کرانگین دو متغیره توسعه یافته اند. برخی از برجسته‌ترین مدل‌ها آنهایی هستند که به هاشوروا (۲۰۰٤، ۲۰۰٥، ۲۰۰٦، ۲۰۰۷، ۲۰۰۸، ۲۰۱۲) نسبت داده می شوند. شیوه‌های برآورد برای برازش توزیع های مقدار کرانگین دو متغیره توسط (کلیس در سال ۲۰۰۱) به خوبی بسط داده شده اند. و (برلنت و همکاران در سال ۲۰۰٤) محاسبات پیشرفته‌ی عالی، را بسط دادند اما خصوصیات توزیعی به خوبی مورد مطالعه قرار نگرفته است.

روش و ابزار گرد آوری اطلاعات با استفاده از آخرین مقالات مرتبط با موضوع می باشد.

کلمات کلیدی: آماره‌های ترتیبی، گشتاورها، توابع مولد گشتاورها، روش‌های تخمینی

فهرست مطالب

پیشگفتار

مطالعه توزیع احتمال زمان نخستین گذر و مقادیر کرانگین فرآیندهای تصادفی در قلب موضوع ارتعاشات تصادفی نهفته است. این مطالعات در بسط روش‌های مبتنی بر طیف پاسخ در مهندسی زلزله، عامل وزش باد در رشته مهندسی باد، و در تجزیه و تحلیل قابل اطمینان سیستم‌های دینامیکی تصادفی به طور کلی، کاربردهای گسترده‌ای می‌یابد. در زمینه‌ی فرآیندهای تصادفی گاوسی، یکی از روش‌های استفاده معمول برای مطالعه شکست نخستین گذر مبتنی بر این فرض است که تعداد دفعات عبور یک سطح مشخص به عنوان یک فرآیند شمارش پواسون می‌تواند الگو باشد. این امر به مدل‌های نمایی برای زمان نخستین گذر و مدل‌های گامبل برای کرانگین‌های بیش از یک مدت زمان مشخص منجر می‌شود.

نتایج مبتنی بر این فرض و اصلاحات بیشتر برای این رویکرد، در بسیاری منابع درسی ارتعاش تصادفی استاندارد بسیار مورد بحث هستند: برای مثال؛ (لین[1] در سال۱۹۶۷)، (نایگم[2] در سال ۱۹۸۳) و (لوتز و سرکانی[3] ۱۹۹۷) را ببینید.

یک روش جایگزین، که قابل اعمال به فرآیندهای تصادفی دارای ویژگی مارکوف است، نیز تعمیم یافته است. یک بررسی معادله کولموگروف پسرو حاکم بر تغییر وضعیت تابع چگالی احتمال و همراه معادلات پونتریجین–ویت تعمیم یافته(GPV)[4] حاکم گشتاورهای زمان‌های نخستین گذر انجام شده است: برای یادآوری تاریخچه این موضوع مقاله (رابرتز[5] در سال ۱۹۸٦) را ببینید. تلاش برای حل معادلات کولموگروف پسرو و معادلات GPV با استفاده از روش عناصر محدود نیز گزارش شده است (اسپنسر و برگمن[6] در سال۱۹۸۵).

در زمینه تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های دینامیکی، تعیین توزیع احتمال مقادیر کرانگین، یک مسأله قابل اطمینان زمان– وردا را قادر می‌سازد همانگونه که یک مسأله تجزیه و

---

[1] Lin
[2] Nigam
[3] Lutes and Sarkani
[4] generalized Pontriagin–Vitt (GPV)
[5] Roberts
[6] Spencer and Bergman

تحلیل قابل اطمینان زمان–ناوردا را قادر می‌سازد. (مدسن و همکاران[1] درسال۱۹۸٦ ؛ ملچرز[2] در سال ۱۹۹۹) اصل اساسی این رویکرد در این واقعیت نهفته است که توزیع مقادیر کرانگین فرآیندهای تصادفی بیش از یک مدت مشخص از زمان بدقت مرتبط با نرخ عبور سطح میانگین آنها است.

نرخ پیوند دو بردار فرآیندهای تصادفی در زمینه‌ی مسائل موجود در ترکیبات بار (ناس[3] در سال ۱۹۸۹) و در قابلیت اطمینان ساختاری، (ون زیانو و همکاران[4] در سال ۱۹۷۷)؛ (دایت لوسن[5]؛ ون و چن[6] در سال ۱۹۸۹)؛ (هاگن و تی ودت[7] در سال ۱۹۹۱)، (هاگن در سال۱۹۹۲) مورد مطالعه قرار گرفته است. تمرکز بسیاری از این مطالعات در تعیین احتمال تجاوز از مجموع فرآیندهای جزء بوده است و رویداد پیوند دو نژاد به عنوان یک فرآیند پیوند دو نژاد اسکالر فرموله شده است. با این حال، مسأله تعیین تابع توزیع احتمال توأم[8] از کرانگین‌های فرآیندهای جزء را آدرس می‌دهد. در این زمینه، آن از نکات مورد علاقه در نوشتگان ریاضی است، مسأله توزیع‌های مقدار کرانگین توجه تحقیقات گسترده‌ای را دریافت کرده است: برای مثال، (گالامبوس[9] در سال۱۹۷۸)، (کاستیلو[10] در سال۱۹۸۸) و (کُتز[11] و نادرجاه[12] در سال۲۰۰۰) را ببینید.

تمرکز این مطالعات بر بسط اشکال مجانبی توزیع مقدار کرانگین برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی اسکالر و بردار بوده است.

در مورد دیگر، اغلب دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی، مانند $\{\mathrm{X_i}\}_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}$ و $\{\mathrm{Y_i}\}_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}$ ، به طوری که $\mathrm{X_i}$ ها هم توزیع و مستقل $(\mathrm{i.i.d})$، $\mathrm{Y_i}$ ها هم توزیع و مستقل $(\mathrm{i.i.d})$ و $\mathrm{X_i}$ همبسته با $\mathrm{Y_i}$ می باشد. سوالات مطرح شده در توزیع احتمال توأم $X_m = \max_{1\le i\le k}(X_i)$ و

[1] Madsen et al.
[2] Melchers
[3] Naess
[4] Veneziano et al.
[5] Ditlevsen
[6] Wen and Chen
[7] Hagen and Tvedt
[8] probability distribution function (PDF)
[9] Galambos
[10] Castillo
[11] Kotz
[12] Nadarajah

$Y_m = \max_{1\le i\le k}(Y_i)$ خواسته شده و به طور خاص، تحت شرایطی که X_m و Y_m متقابلاً مستقلند مورد مطالعه قرار گرفته است.

به عنوان یک امید ممکن، مطالعات بر روی دنباله‌ای از بردارهای متغیرهای تصادفی مرتبط با مبدأ جدید و کمتر سر راست انجام شده است. این منابع همچنین شامل بررسی‌های گسترده‌ای از نوشتگان مربوط به آمار و احتمال ریاضی است. اطلاع از تابع توزیع احتمال PDF توأم مقادیر کرانگین همراه با یک بردار متقابلاً همبسته با فرآیندهای تصادفی گاوسی مانا برای تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های ساختاری، لازم است که با حالت‌های حد چندگانه در تنظیمات سری مشخص شده باشد.

لِیرا[۱] (در سال‌های۱۹۹٤ و ۲۰۰۳)، توزیع مقدار کرانگین چند متغیره را برای یک بردار گاوسی/غیرگاوسی، فرآیندهای تصادفی، با استفاده از یک روش هندسی بر اساس کرانگین‌های سویی بسط داد. نظریه‌های تک متغیره یک ناحیه به خوبی مستند شده است، در حالی که نظریه کرانگین دو متغیره/ چند متغیره، تا همین اواخر، مورد توجه کمتری قرار گرفته است. در مورد چند متغیره، هیچ خانواده پارامتریک نرمال برای ساختار وابستگی وجود ندارد، پس این باید در چند روش مدل‌سازی شود. در تجزیه و تحلیل داده‌های کرانگین زیست محیطی، نیاز به مدل‌های وابستگی بین کران‌های منابع مختلف وجود دارد.

در این پایان‌نامه توزیع کرانگین دو متغیره را در نظر می‌گیریم. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که توزیع حاشیه‌ای نمایی با میانگین واحد داریم. کلاس توزیع نمایی دو متغیره که علاقه‌مندیم در رابطه پایای قوی صدق کند. متغیرهای نمایی (X,Y) رابطه پایایی را برآورده می‌کند اگر و تنها اگر $W = \min(aX, bY)$ نیز توزیع نمایی برای همه مقادیر $a,b > 0$ داشته باشد (پیکاندز[۲]در سال ۱۹۸۱).

بنابر این مدل‌ها، کاربرد خاص در قابلیت اطمینان و تحلیل بقا را در نظر خواهیم گرفت. یک روش مدل‌سازی ساختار وابستگی از طریق مدل‌های پارامتریک است. این به یک خانواده انعطاف‌پذیر از مدل‌هایی که در محدودیت‌های خاص صدق می‌کند، نیاز دارد. مدل‌ها دو نوع

[1] Leira
[2] Pickands,

هستند: مشتق‌پذیر و مشتق‌ناپذیر. تمام مدل‌های مشتق‌ناپذیر توزیع‌های تکین با احتمال غیرصفر را می‌دهد، احتمال در یک زیرفضای خاص متمرکز می‌شود. مدل‌های مشتق‌پذیر چگالی‌هایی دارند، اما مدل‌های موجود متقارن هستند که منجر به متغیرهای تغییرپذیر می‌شود. در اینجا، دو مدل جدید مشتق‌پذیر نامتقارن معرفی می‌کنیم که انعطاف‌پذیری را افزایش داده‌اند. خواص مدل‌های مشتق‌پذیر بررسی می‌شوند.

برآورد مدل‌های پارامتریک قبلاً توسط روش‌های فاقد عمومیت بوده است، زیرا این یک مسأله برآورد نامنظم است که حاشیه‌ها مستقل هستند. از آنجا که بسیاری از مدل‌ها برای بیان وابستگی ارائه شده، روش‌های مختلف برای کمک به تصمیم‌گیری بین آنها داده می‌شود. به خوبی از این واقعیت آگاه هستیم که در ابعاد بالاتر از دو، تابع وابسته معادل مختصر ندارد. با این حال، روشن است که مدل کرانگین دو متغیره به عنوان حاشیه‌ای دو متغیره برای مدل‌های بالاتربعد رخ می‌دهد. از این رو، هر گونه تعمیم به ابعاد بالاتر باید تعمیم یک مدل دو متغیره باشد.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است: در فصل اول، که مطالب آن برگرفته از مقالات توزیع های کرانگین چند متغیره برای کاربرد ارتعاشات تصادفی(سایان گوپتا و سی اس منوهار[1] در سال ۲۰۰۵)، و نظریه مقدار کرانگین دو متغیره: مدلها و برآورد (جاناتان ای.توان[2] در سال ۱۹۸۸) است به نتایجی که برای توزیع کرانگین در خانواده‌ی توزیع پوآسن می‌پردازد. در فصل دوم، به مرور سیستماتیک نظریه مقدار کرانگین دو متغیره با استفاده از تابع وابستگی به عنوان یک مدل پارامتری برای رفتار کرانگین می پردازیم. توصیف کاملی برای توابع وابستگی چند جمله ای داده شده است. توزیع‌های مقدارکرانگین دو متغیره[3]، مدل همزمان مقادیر کرانگین که از دو متغیر استفاده می‌شود. (برای مثال کرانگین‌های همزمان از بارش و سرعت باد یا کرانگین همزمان از بارش باران و برف). در بسیاری از مدل‌ها برای توزیع مقدار کرانگین دو متغیره تعمیم یافته‌اند. فصل سوم شامل قضایایی مربوط به چندجمله ای های بل وعدد استرلینگ نوع اول، تابع بتا و تابع گاما، تابع کامر، pdf و cdf وگشتاور $R = X + Y$ ، pdf و cdf وگشتاور$W = X/(X+Y)$ است. این

[1] Sayan Gupta and C. S. Manohar
[2] Jonathan A. Tawn
[3] Bivariate extreme value distributions

قضایا بسط‌هایی برای توزیع های مقادیر کرانگین دو متغیره ارائه می‌دهند. در فصل چهارم توسط شبیه سازی کارآیی عددی دو فرمول بسط گشتاور ضربی مقایسه شده است.

فصل اول:

توزیع‌های مقادیر کرانگین

۱–۱ مقدمه

در این فصل، مسأله تعیین توزیع احتمال توأم مقادیر کرانگین همراه با یک بردار مانا از فرآیندهای تصادفی گاوسی در نظر گرفته شده است. یک راه حل برای این مسأله با تقریب فرآیندهای شمارش چند متغیره در ارتباط با تعدادی از تقاطع‌های سطح به عنوان یک فرآیند تصادفی پواسون چند متغیره بسط یافته است. این به نوبه خود، منجر به تقریب توزیع احتمال چند متغیره برای زمان نخستین گذر و مقادیر کرانگین بیش از یک مدت زمان داده شده است.

نشان داده می‌شود که مقدار کرانگین چند متغیره، توزیع گامبل[1] حاشیه‌ای و زمان نخستین گذر، توزیع نمایی حاشیه‌ای دارد و پذیرش راه حل‌های بسط یافته با انجام مطالعات شبیه‌سازی فرآیندهای تصادفی گاوسی دو متغیره مورد بررسی قرار گرفته است.

۲–۱ شرح مسئله

$\{X_i(t)\}_{i=1}^{k}$ را یک بردار میانگین صفر، مانا، فرآیندهای تصادفی گاوسی با چگالی طیفی توانی[2] (PSD) ماتریس $S(\omega)$ و ماتریس کواریانس $R(\tau)$ در نظر بگیرید. در ارتباط با هر یک از $X_i(t)$ ، توزیع $N_i(\alpha_i, 0, T)$ را تعدادی از زمان‌های گذر یک سطح α_i در بازه ۰ تا T تعریف می‌کنیم، $T_{f_i}(\alpha_i)$ زمان مورد نیاز برای $X_i(t)$ گذر سطح α_i برای نخستین بار می‌باشد و $X_{m_i} = \max_{0\leq t\leq T} X_i(t)$ ماکسیمم $X_i(t)$ در بازه زمانی ۰ تا T می‌باشد. واضح است، برای داده i ، $N_i(\alpha_i, 0, T)$، $T_{f_i}(\alpha_i)$، و X_{m_i}، همه متغیرهای تصادفی هستند. با چنین شناختی، یک کلاس از تقریب قابل قبول برای $N_i(\alpha_i, 0, T)$ ، $T_{f_i}(\alpha_i)$ و X_{m_i} فرض می‌شود: برای داده i ، $N_i(\alpha_i, 0, T)$ یک متغیر تصادفی پواسون است، $T_{f_i}(\alpha_i)$ یک متغیر تصادفی نمایی است و X_{m_i} یک متغیر تصادفی گامبل است (لین۱۹۶۷ ؛ نایگم۱۹۸۳، لوتز و سرکانی۱۹۹۷).

[1] Gumbel
[2] power spectral density (PSD)