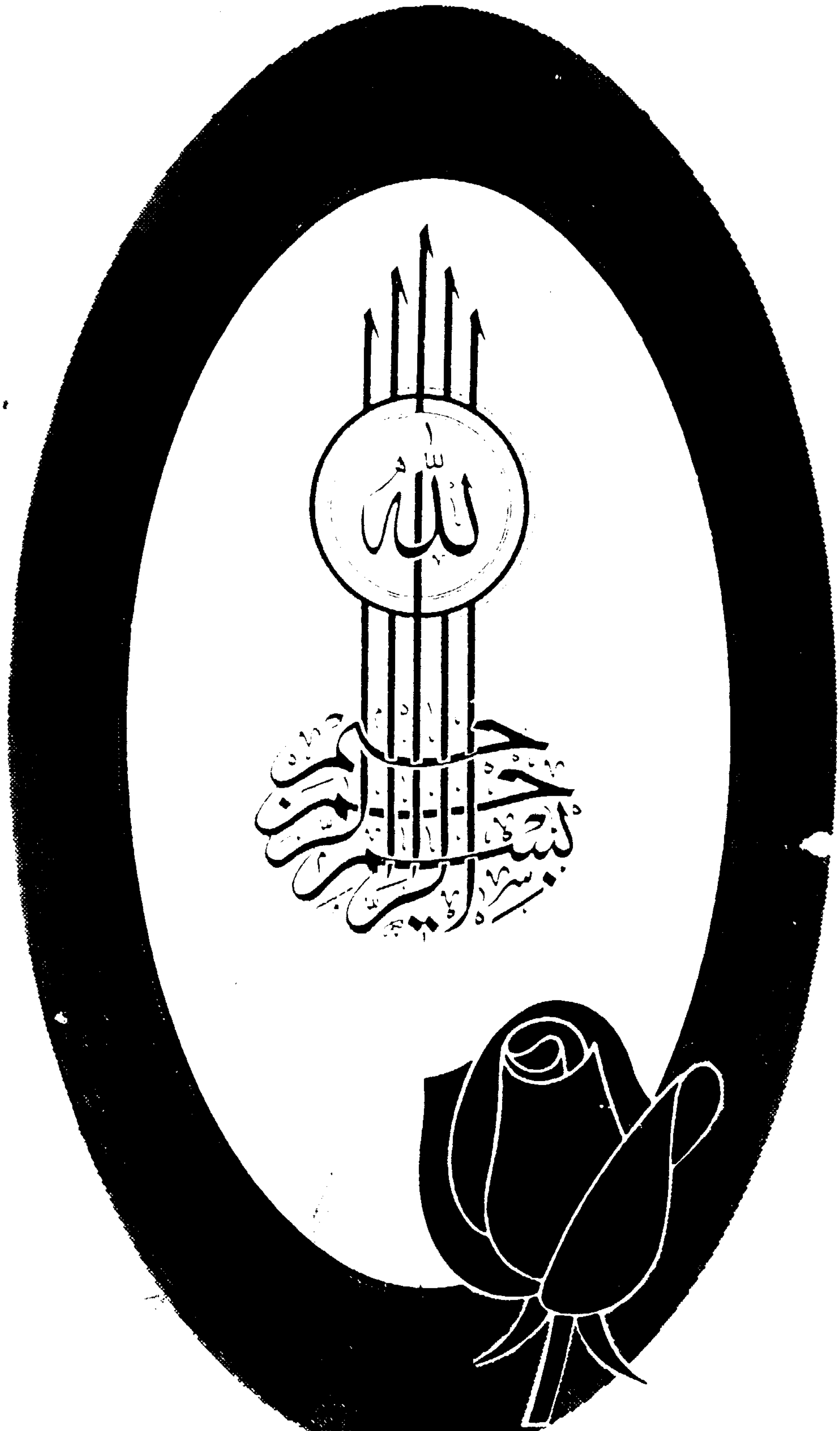
الله
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض ۲۰ /۴/ ۱۳۷۸

موضوع :

مقایسه کمپلکس مدول کسرهای تعمیم یافته و کمپلکس هیوز تعمیم یافته

استاد راهنما :

آقای دکتر محمود یاسی

استاد مشاور:

آقای دکتر محمد رضا رجب زاده مقدم

نگارش :

حسن خدادادی

بسمه تعالی

No: شماره:
Date: تاریخ:
پیوست:

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم - گروه ریاضی

Department of Mathematics
Ferdowsi University of Mashhad
P.O.Box 1159-91775,Mashhad
Islamic Republic of Iran

جلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ آقای حسن خدادادی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض /کاربردی درساعت ۹ صبح روز ۷۵/۱۱/۲۴ دراتاق شمارهٔ ۳۴ ساختمان خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضاْ کنندگان ذیل تشکیل گردید . پس از بررسی ونظر هیأت داوران ، پایان نامهٔ نامبرده بانمرهٔ ۱۸/۷۵ (هجده وهفتادو پنج صدم) مورد تأیید قرارگرفت .

عنوان رساله : " مقایسه کمپلکس مدول کسرهای تعمیم یافته و کمپلکس هیوز تعمیم‌یافته "

تعداد واحد : ۶ واحد

داور رساله : آقای دکتر رضا انشایی
استادیار گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

داور رساله : آقای دکتر محمدرضا رجب زاده مقدم
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما: آقای دکتر محمود یاسی
استادیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی : آقای دکتر محمدعلی پورعبداله نژاد
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

تقدیم به:

مادرم و همسرم

و

تمام عزیزانیکه در راه اشاعه علم ودانش همچنان میکوشند و

از خود مایه می گذارند.

«تقدیر وتشکر»

سپاس وستایش پروردگار یکتا را که چراغ توفیق فرا راه من داشت تا آزمون دیگری از زندگی علمی خویش را باسربلندی پشت سر گذاشته وموفق به دریافت دانشنامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض شوم .
با توجه به حدیث "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق "بر خود لازم می دانم که از همه مربیان واساتیدی که به نحوی حق تعلیم وتربیت بر گردن حقیر دارند تشکر وسپاسگزاری نمایم بخصوص ازاستاد گرامی وارجمند جناب آقای دکتر محمود یاسی که درتمام دوران تحصیل دانشگاه ازهیچ تلاش وکمکی دریغ نکردندوهمیشه الگوی فداکاری وایثارند ،تشکروقدردانی می کنم ازجناب آقای دکتر محمد رضا رجب زاده وجناب آقای دکتر رضانشایی که مشاوره وداوری پایان نامه را بر عهده داشتند واز کلیه کارکنان کتابخانه که از هیچ کمکی کوتاهی نکردند،سپاسگزاری می نمایم.

بهمن ماه ۷۵-خدادادی

فهرست

فصل صفر

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

مقدمه :

در سال ۱۹۹۰ میلادی آقای دکتر محمود یاسی طی مقاله ای ([6]) ، در حالتیکه R یک حلقه جابجایی یکدار و نوتری باشد ، نشان داد ند یک یکریختی بین کمپلکس‌های تعمیم یافته و کمپلکس هیوز تعمیم یافته وجود دارد . در این پایان نامه نشان میدهیم در حالتیکه R یک حلقه جابجایی و یکدار و لزوما نوتری نباشد ، یک همریختی بین کمپلکس هیوز تعمیم یافته و کمپلکس مدول کسرهای تعمیم یافته وجود دارد .

فرض کنید

$$\mathcal{U} = (U_n)_{n\in N}$$

یک زنجیر از زیر مجموعه های مثلثی روی R باشد و فرض کنید M یک R- مدول باشد ، در این صورت کمپلکس $C(\mathcal{U},M)$ از مدول کسرهای تعمیم یافته به صورت

$$0 \to M \xrightarrow{f^{-1}} F^0 \xrightarrow{f^0} F^1 \to \cdots \to F^n \xrightarrow{f^n} F^{n+1} \to \cdots$$

است که در آن برای هر n در N

$$F^{-1} = M \;,\; F^n = U_{n-1}^{-n-1}M$$

و برای هر m متعلق به M

$$f^{n-1}\left(\frac{m}{(u_1,\ldots,u_n)}\right) = \frac{m}{(u_1,\ldots u_n,1)} \quad , \underset{\sim}{u} = (u_1,\ldots,u_n) \in U_n$$

فرض کنید

$$S(\mathcal{U}) = (\varphi(U_n))_{n\in N}$$

یک خانواده از سیتمهای ایده الهای R باشد که بوسیله $\mathcal{U}$ معین می شود ، در این صورت کمپلکس هیوز تعمیم یافته $\mathcal{H}(S(\mathcal{U}),M)$ برای M نسبت به $S(\mathcal{U})$ به صورت

$$0 \to M \xrightarrow{h^{-1}} K^0 \xrightarrow{h^0} K^1 \to \cdots \to K^n \xrightarrow{h^n} K^{n+1} \to \cdots$$

است که در آن

$$K^{-2} = 0 \;,\; K^{-1} = M \quad , h^{-2} : K^{n-2} \longrightarrow K^{-1}$$

همریختی صفر می باشد و برای هر n متعلق به N_0

$$K^n = D_{\varphi(U_{n+1})}(co\ker h^{n-2})$$

و

$$h^{n-1} : K^{n-1} \longrightarrow K^n$$

ترکیب برویختی طبیعی

$$K^{n-1} \longrightarrow co\ker h^{n-2}$$

$$\eta_{\varphi(U_{n-1})}(co\ker h^{n-2}): co\ker h^{n-2} \longrightarrow D_{\varphi(U_{n-1})}(co\ker h^{n-2}) = K^{n}$$

می باشد .

در این مقاله نشان میدهیم یک همریختی بصورت

$$\theta = (\theta^{n})_{n\geq -2}: \mathcal{H}(S(\mathcal{U}), M) \longrightarrow C(\mathcal{U}, M)$$

وجود دارد و در حالتیکه R ، N- حلقه باشد θ یکریختی بوده و معکوس یکریختی بیان شده در [6] میباشد . در پایان یک مثال نقض ارائه میدهیم که نشان میدهد θ همیشه یکریختی نیست .

﴿فصل صفر﴾

(۰-۱) مطالبی از جبر جابجایی

در این بخش A یک حلقه جابجایی و یکدار است. قضایا و نتایج بدون اثبات آورده شده است. برای اطلاعات بیشتر به [9] مراجعه شود.

(۰-۰-۱) تعریف : فرض کنیم $\underline{b}$, $\underline{c}$ ایده الهای A باشند خارج قسمت

$$(\underline{b}:\underline{c}) = \{x \in A : x\underline{c} \subseteq \underline{b}\}$$

یک ایده ال A است ، بویژه

$$(0:\underline{c}) = \{x \in A : x\underline{c} = 0\}$$

را پوچساز $\underline{c}$ می نامیم و آنرا با نماد $A_{nn}(c)$ یا $Ann_A(c)$ نشان می دهیم.

(۰-۱-۲) نماد گذاری :

فرض کنید M , N دو A- مدول باشند مجموعه تماه A - همریختی های از M به N را با نماد $Hom_A(M,N)$ نشان می دهیم. این مجموعه ساختار A- مدول دارد هر گاه برای هر

$$f , g \in Hom_A(M , N)$$

و هر a متعلق به A ، af , f+g را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad x \in M$$

$$af(x) = a(f(x))$$

فرض کنیم M یک A مدول و P , N زیر مدولهای M باشند ، در اینصورت

$$\left(N \underset{A}{:} P\right) = \{a \in A : aP \subseteq N\}$$

یک ایده ال A است بویژه

$$(0:P) = \{a \in A : aP = 0\}$$

را ایده ال پوچساز P گوییم و آنرا با نماد $A_{nn}(p)$ نشان میدهیم.

(۰-۱-۳) تعریف : حلقه A را نوتری گوییم هر گاه در یکی از سه شرط زیر صدق کند :

i) هر مجموعه غیر تهی از ایده الهای A یک عنصر بشین نسبت به رابطه جزئیت داشته باشد .

ii) هر رشته صعودی از ایده الهای A سرانجام پایان پذیرد .

iii) هر ایده ال A ، متناهیا تولید شده باشد .

(۰-۱-٤) حلقه و مدول کسرها : S زیر مجموعه A را یک زیر مجموعه ضربی بسته گوییم هر گاه :

$$1 \in S \quad , \quad \forall s_1, s_2 \in S : s_1 . s_2 \in S$$

اکنون در A×S رابطه ~ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(a, s) \sim (a', s')$$

اگر و فقط اگر عنصر t متعلق به S وجود داشته باشد بطوریکه :

$$t(s'a - sa') = 0$$

~ یک رابطه هم ارزی است . برای هر

$$(a, s) \in A \times S$$

رده هم ارزی (a,s) را با نماد a/s نشان میدهیم در این صورت مجموعه

$$\left\{ a/s : a \in A, s \in S \right\}$$

را با نماد $S^{-1}A$ نشان میدهیم این مجموعه ساختار حلقه می پذیرد هر گاه در آن جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف کنیم : برای هر

$$a, a' \in A \quad , \quad s, s' \in A$$

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'} \quad , \quad \frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

حلقه $S^{-1}A$ را حلقه کسرهای A نسبت به زیر مجموعه ضربی بسته S می نامند .

قضیه : نگاشت طبیعی

$$\varphi: A \to S^{-1}A$$

با ضابطه

$$\varphi(a) = \frac{a}{1}$$

دارای خواص زیر است :

i) s متعلق به S اگر وفقط اگر $s/1$ در $S^{-1}A$ یکه باشد .

ii) برای هر a متعلق به A ، $\varphi(u) = 0$ اگـر و فقـط اگر s متعلـق به S موجود باشـد . بطوریکه
$su = 0$

iii) هر عنصر

$$\frac{a}{s} \in S^{-1}A$$

را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{s} = \frac{\varphi(A)}{\varphi(S)}$$

- فرض کنید M یک A به مدول و S یک زیر مجموعه ضربی بسته A باشد رابطه ~ را در M×S بـه صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\forall m, m' \in M \quad , \quad \forall s, s' \in S \qquad (m, s) \sim (m', s')$$

اگر وفقط اگر عنصر t متعلق به S موجود باشد بطوریکه :

$$t(s'm - sm') = 0$$

~ یک رابطه هم ارزی در M×S است . رده هم ارزی (m,s) را با $m/_s$ نشان میدهیم .

مجموعه همه رده های هم ارزی را با $S^{-1}M$ نشان میدهیم ، $S^{-1}M$ داده ای ساختار $S^{-1}A$- مدول است ، هر گاه جمع داخلی و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$\forall m, m' \in M \quad , \quad \forall s, s' \in S \quad , \quad a \in A$$
$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} \quad , \quad \frac{a}{s} . \frac{m'}{s'} = \frac{am'}{ss'}$$

اگر p متعلق به spec A و S=A-P آنگاه $S^{-1}A$ را با A_p و $S^{-1}M$ را با M_p نشان میدهیم .

<u>قضیه</u> : اگر S یک زیر مجموعه ضربی بسته از A و

$$f : M \to N$$

یک A- همریختی از A- مدولها باشد آنگاه

$$S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$$

یک $S^{-1}A$ همریختی است که در آن برای هر

$$\frac{m}{s} \in S^{-1}M \quad , \quad S^{-1}f\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s}$$

(۰-۱-۵)تعریف : فرض کنید M یک A- مدول باشد . در این صورت عنصر a متعلق به A را یک مقسوم علیه صفر M گوییم اگر عنصر

$$0 \neq x \in M$$

وجود داشته باشد بطوریکه $ax = 0$. مجموعه تمام مقسوم علیه های صفر A- مدول M را با نماد Z(M) نشان می دهیم .

(۰-۱-٦) تعریف : فرض کنید

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in A \qquad (n \in N)$$

رشته $x_1, x_2, \ldots x_n$ را یک M- رشته ضعیف گوییم اگر برای هر $i = 1, \ldots, n$

$$\left((x_1 M + \cdots + x_{i-1} M) \underset{M}{:} x_i\right) = x_1 M + \cdots + x_{i-1} M$$

برای $i = 1$ مدول $x_1M+\cdots+x_{i-1}M$ را برابر صفر تفسیر می کنیم ، یعنی :

$$\left(0 \underset{M}{:} x_1\right) = 0$$

یعنی x_1 یک مقسوم علیه غیر صفر روی M است .

رشته فوق را یک M- رشته گوییم در صورتیکه :

$$x_1 M + \cdots + x_n M \neq M$$

(۰-۱-۷) تعریف : فرض کنید M یک A- مدول متناهیا تولید شده باشد . ایده ال $\underline{b}$ از حلقه A را یک ایده ال M- محض گوییم هر گاه :

$$\underline{b} M \neq M$$

(۰-۱-۸) تعریف : فرض کنید $x_1, x_2, \ldots x_n$ یک M- رشته از عناصر ایده ال M- محض $\underline{b}$ باشد ، گوییم $x_1, x_2, \ldots x_n$ یک M- رشته بیشین در $\underline{b}$ است هرگاه عنصر x_{n+1} متعلق به b وجود نداشته باشد بطوریکه $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$ یک M- رشته در $\underline{b}$ باشد و یا بطور معادل

$$\underline{b} \subseteq Z\left(\frac{M}{x_1 M + \cdots + x_n M}\right)$$

(۰-۱-۹) قضیه : اگر M نوتری باشد آنگاه هر M- رشته در $\underline{b}$ قابل گسترش به یک M- رشته بیشین است و هردو M- رشته بیشین در $\underline{b}$ دارای یک طول می باشند .

(۰–۱–۱۰) **تعریف :** فرض کنید M یک A– مدول متناهیا تولید شده و $\underline{b}$ یک ایده ال محض A باشد. آنگاه طول مشترک تمام M– رشته های بیشین در $\underline{b}$ را درجه $\underline{b}$ نامیده و با grade $\underline{b}$ نشان میدهیم .

(۰–۱–۱۱) **قضیه :** فرض کنید M یک A– مدول نوتری و $\underline{b}$ ، $\underline{a}$ دو ایده ال M– محض A باشند ، در اینصورت :

$$grade\left(\underline{a}.\underline{b}\right) = grade\left(\underline{a} \cap \underline{b}\right) = \min\left\{grade\ \underline{a}, grade\ \underline{b}\right\}$$

(۰–۱–۱۲) **تعریف :** حلقه A ، N– حلقه نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر ایده ال $\underline{a}$ از A یک حلقه نوتری جابجایی توسیع از A مانند T موجود باشد (با عنصر همانی یکسان)،بطوریکه

$$\underline{a} = \underline{a}T \cap A$$

(یک حلقه N –حلقه ، لزوما خودش نوتری نیست)

(۰–۱–۱۳) **قضیه :** حلقه A ، N حلقه است اگر و فقط اگر برای هر ایده ال b از A ، مجموعه $\{\underline{c}$ یک ایده ال A است :($\underline{b}$, $\underline{c}$)$\}$ (جزاء مرتب با رابطه جزئیت) در شرط بیشین یا معادله آن شرط زنجیر صعودی صدق کند . (اثبات : قضیه ۲۰۳–[۳–۶]) .

(۰–۲)مطالبی از جبر همو لوژی :

در این بخش A یک حلقه با عنصر غیر صفر است .

(۰–۲–۱) **تعریف :** فرض کنید

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

یک رشته از A– مدولها و A– همریختی ها باشد ، این رشته را صفر رشته گوییم در صورتیکه Img (f) زیر مجموعه ker (g) . و این رشته را یک و این رشته را یک رشته دقیق گوییم در صورتیکه Img(f) = ker(g) رشته دقیق را با علامت (E) نشان میدهیم .

(۰–۲–۲) **تعریف :** فرض کنید $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ دو کنگوری و F ضابطه ای باشد که هر شیء A متعلق به $\mathscr{C}$ یک شیء F(A) از $\mathscr{D}$ و به هر مرفیسم f متعلق به $\mathscr{C}$ یک مرفیسم F(f) متعلق به $\mathscr{D}$ را نسبت دهد،

الف) F را یک فانکتور کواریانت (هموردِ) نامیم هر گاه شرایط زیرین برقرارباشد :

i) در $\mathscr{C}$ اگر

$$f : A \to B$$

آنگاه در $\mathscr{D}$.

$$F(f) : F(A) \to F(B)$$

$F(i_A) = i_{F(A)}$ (ii

$$i_A : A \to A \quad \text{(مرفیسم همانی)}$$

iii) اگر در $\mathscr{C}$

$$g : B \to C \quad , \quad f : A \to B$$

آنگاه در $\mathscr{D}$ ، $F(gf) = F(g).F(f)$.

ب) F را یک فانکتوکونتر اورایانت (غیر هموردِ) نامیم هر گاه شرایط زیرین برقرار باشد :

i) اگر در $\mathscr{C}$

$$f : A \to B$$

آنگاه در $\mathscr{D}$

$$F(f) : F(B) \to F(A)$$

$F(i_A) = i_{F(A)}$ (ii .

$$\forall f, g : f : A \to B , g : B \to C \quad (iii$$

در $\mathscr{C}$ آنگاه در $\mathscr{D}$ داشته باشیم : $F(gf) = F(f)oF(g)$. (قانون ترکیب)

اگر F یک فانکتور از $\mathscr{C}$ به $\mathscr{D}$ باشد این مفهوم را با نماد

$$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$$

نشان میدهیم .

(۰-۲-۳) تعریف : فرض کنید

$$F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$$

یک فانکتور و g,f دو مرفیسم از $\mathscr{C}$ باشند . ($\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ جمعی هستند) . F را یک فانکتور جمعی گوییم هر گاه $F(f+g) = F(f) + F(g)$ و F را یک فانکتور A- خطی گوییم در صورتیکه برای هر a متعلق به A ، $F(af) = aF(f)$.

(۰-۲-٤) تعریف : فرض کنید

$$F , U : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$$

دو فانکتور باشند و فرض کنید برای هر A متعلق به $\mathscr{C}$

$$\mu_A : F(A) \to U(A)$$

یک مرفیسم در $\mathscr{D}$ باشد و فرض کنید

$$\mu = \{\mu_A\}_{A \in C}$$

آنگاه μ را یک انتقال طبیعی از F به U نامیده و آنرا با نماد

$$\mu : F \to U$$

میدهیم هر گاه شرط زیر برقرار باشد : برای هر دو شیء A,B متعلق به $\mathscr{C}$ و هر

$$f : A \to B$$

نمودارهای ذیل بر حسب اینکه U و F هر دو کواریانت یا کونتر اواریانت باشند ، جابجایی باشد .

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\mu_A} & U(A) \\ F(f)\downarrow & & \downarrow U(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\mu_B} & U(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(B) & \xrightarrow{\mu_B} & U(B) \\ F(f)\downarrow & & \downarrow U(f) \\ F(A) & \xrightarrow{\mu_A} & U(A) \end{array}$$

اگر

$$\gamma : U \to F \quad , \quad \mu : F \to U$$

دو انتقال طبیعی باشد بطوریکه $\gamma\mu = Id_F$ و $\gamma\mu = Id_U$ (Id فانکتور همانی است) آنگاه μ را یک هم ارزی طبیعی نامند و نیز F را هم ارز طبیعی U نامیده می شود . و این مفهوم را با نماد

$$F \approx U$$

نمایش میدهیم . و در حالت خاص که برای هر A متعلق به $\mathscr{C}$

$$\mu_A : F(A) \to U(A)$$

یکریختی باشد ، آنگاه F هم ارز طبیعی U است .