بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکنری رشته ریاضی گرایش آنالیز

مشخص سازی انواع تحدب ها توسط زیردیفرانسیل های تعمیم یافته و کاربردهای آن در بهینه سازی

استاد راهنما:

دکنرجعفر زعفرانی

استاد مشاور:

دکتر مجید فخار

پژوهشگر:

مرتضی اویسی‌ها

اسفند ماه ۱۳۹۰

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض گرایش آنالیز (تابعی) آقای مرتضی اویسی ها

تحت عنوان:

مشخص سازی انواع تحدب ها توسط زیردیفرانسیل های تعمیم یافته و کاربردهای آن در بهینه سازی

در تاریخ ۹۰/۱۲/۱۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر محبوبه رضایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر حسین محبی	با مرتبه علمی استاد	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

سپاسگزاری

در ابتدا بر خود واجب می دانم از نکته سنجی های هوشمندانه و بذل توجه و راهنمایی های استاد بزرگوار آقای دکتر زعفرانی سپاسگزاری نمایم.

همچنین از عنایت و توجه جناب آقای دکتر فخار که مشاورت این پایان نامه را به عهده داشته اند و اساتید محترم گروه ریاضی قدردان و سپاسگزارم.

در پایان از همکاری های صمیمانه برادر و خواهرانم کمال تشکر و قدردانی را می نمایم.

تقدیم به

مادر و پدرم

چکیده

هدف از این پایان نامه بدست آوردن روابط بین نامساوی های شبه تغییراتی برداری و مسائل بهینه سازی برداری غیرهموار تحت شرایط تحدب های تعمیم یافته می باشد. از این رو در ابتدا به بررسی برخی تحدب های تعمیم یافته با استفاده از مفهوم زیردیفرانسیل حدی می پردازیم. در این پایان نامه به موارد زیر پرداخته شده است.

در ابتدا به بررسی توابع θ–پیش محدب پایای ضعیف، محدب پایا نما و شبه پیش محدب پایا و زیر دیفرانسیل های تعمیم یافته از این توابع در حالت های نیم پیوسته پایینی و موضعاً لیپشیتز می‌پردازیم. همچنین شرایطی معادل بر حسب زیردیفرانسیل متعامد از نگاشت های مجموعه مقدار K–پیش محدب پایا بدست می‌آوریم.

نامساوی های شبه تغییراتی برداری تعمیم یافته مینتی را بیان می کنیم و روابط بین جواب آنها و نامساوی های شبه تغییراتی برداری استمپاچیا را تحت یکنوایی های تعمیم یافته بدست می آوریم. بویژه منطبق بودن جواب های مسائل بهینه سازی برداری و نامساوی های شبه تغییراتی برداری مینتی را تحت محدب پایا نمایی توابع بدست می آوریم. همچنین نتیجه مشابهی برای نامساوی های شبه تغییراتی برداری تعمیم یافته مینتی تحت شرط α–محدب پایایی توابع بدست می آوریم.

در انتها شزایطی کافی برای وجود نقاط زیر مینیمم موضعی بدست می آوریم. همچنین مفهوم نقاط ψ–زیر مینیمم موضعی را بیان کرده و شرایطی لازم برای وجود آنها بدست می آوریم

کلمات کلیدی: توابع θ–پیش محدب پایای ضعیف، توابع محدب پایا نما، نگاشت K–پیش محدب پایا، نامساوی های شبه تغییراتی برداری، مسائل بهینه سازی برداری، مسائل بهینه سازی مجموعه مقدار، نقاط زیر مینیمم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

در این فصل به بیان تعاریف و نتایج مقدماتی که در این پایان نامه به آنها نیاز است، پرداخته می‌شود. در بخش اول تعاریفی از انواع زیردیفرانسیل‌ها آورده شده و ارتباط آنها با هم ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است که در این پایان نامه توجه ویژه‌ای به زیردیفرانسیل حدی به عنوان ابزاری برای بررسی مسائل می شود. همچنین مفهوم هممشتق و قضایای مورد نیاز برای آن آورده می‌شود. سپس با استفاده از آن تعریفی از زیردیفرانسیل متعامد برای نگاشت‌های مجموعه مقدار ارائه می‌گردد که به عنوان تعمیمی از زیردیفرانسیل حدی از توابع حقیقی مقدار است. بخش دوم به بیان صورتی از قضیه KKM اختصاص دارد که از آن در بیان و اثبات قضیه‌ای وجودی در نامساوی‌های شبه تغییراتی استفاده می‌شود. در ادامه تعاریفی از تحدب‌های تعمیم یافته برای توابع و همچنین یکنوایی‌های تعمیم یافته از نگاشت‌های مجموعه مقدار در بخش سوم آورده می‌شود.

۱.۱ زیر دیفرانسیل

در این بخش،تعریف‌هایی از مهمترین زیردیفرانسیل‌ها ارائه می‌گردد. مفهوم زیردیفرانسیل‌های تعمیم یافته نقشی اساسی در آنالیز تغییراتی پیشرفته ایفا می‌کند [۵۱، ۵۰، ۴۸، ۱۸]. موردوخویچ[۱] در سال ۱۹۷۶، زیردیفرانسیل جدیدی را معرفی کرد که بوسیله حد زیردیفرانسیل‌های دیگری تعریف شده و آن را زیردیفرانسیل حدی (زیردیفرانسیل مُردوخویچ) نامید. در مراجع [۵۱، ۵۰] به بررسی این زیردیفرانسیل و ارتباط آن با سایر زیردیفرانسیل‌ها و همچنین کاربردهایی از آن پرداخته شده است.

فرض کنید Ω زیر مجموعه‌ای غیر تهی از X و $f : \Omega \subset X \to \mathbb{R}$ تابعی حقیقی مقدار باشد. هنگامی که توابع مشتق‌پذیر نباشند، از مفهوم زیردیفرانسیل به عنوان تعمیمی از مشتق استفاده می‌کنیم که مهمترین آنها عبارتند از: زیردیفرانسیل فرشه [۲] ، زیردیفرانسیل حدی، زیردیفرانسیل کلارک [۳] و زیردیفرانسیل کلارک راکفلر [۴].

تعریف ۱.۱.۱. [۵۰] *X را فضایی باناخ درنظرگرفته و فرض کنید $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابعی نیم پیوسته پایینی و سره باشد. گوییم f تابعی فرشه زیردیفرانسیل‌پذیر است و x^* زیرمشتق فرشه تابع f در x می‌باشد ($x^* \in \widehat{\partial} f(x)$) اگر x در دامنه f بوده و*

$$\liminf_{||h|| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle}{||h||} \geq 0.$$

[۱] Mordukhovich

[۲] Fréchet subdifferential

[۳] Clarke's subdifferential

[۴] Clarke-Rockafellar subdifferential

تعریف ۲.۱.۱. [۵۰] Ω را زیرمجموعه‌ای غیر تهی از X بگیرید. فرض کنید $x \in \Omega$ و $\varepsilon \geq 0$.

در اینصورت مجموعه‌های ε- متعامد به Ω در x را به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$\widehat{N}_{\varepsilon}(x;\Omega) := \{x^* \in X^* | \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u-x\rangle}{||u-x||} \leq \varepsilon\},$$

$$N(\bar{x};\Omega) := \limsup_{x \to \bar{x}, \varepsilon \downarrow 0} \widehat{N}_{\varepsilon}(x;\Omega).$$

حال تابع $\varphi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ و $\bar{x} \in X$ با $|\varphi(\bar{x})| < \infty$ را در نظر بگیرید. مجموعه

$$\partial_M \varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* | (x^*, -1) \in N((\bar{x};\varphi(\bar{x})); \mathrm{epi}\varphi)\}$$

را زیردیفرانسیل حدی φ در نقطه $\bar{x}$ گویند.

تعریف ۳.۱.۱. [۱۸] زیردیفرانسیل تعمیم یافته کلارک برای تابع موضعاً لیپشیتز f نگاشت مجموعه مقدار $\partial_C f$ می‌باشد که در نقطه $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_C f(x) := \{x^* \in X^* | \langle x^*, h\rangle \leq f^o(x;h),\ \forall h \in X\},$$

که

$$f^o(x;h) := \limsup_{x' \to x \quad t \to 0^+} \frac{f(x'+th) - f(x')}{t}.$$

تعریف ۴.۱.۱. [۵۰] زیردیفرانسیل کلارک- راکفلر برای تابع نیم پیوسته پایینی f نگاشت مجموعه مقدار $\partial_{CR} f$ می‌باشد که در نقطه $x \in \mathrm{dom} f$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_{CR} f(x) := \{x^* \in X^* | \langle x^*, h\rangle \leq f^{\uparrow}(x;h), \forall h \in X\},$$

که

$$f^{\uparrow}(x;h) := \sup_{\lambda > 0} \limsup_{t \downarrow 0, x' \to_f x} \inf_{h' \in B(h,\lambda)} \frac{f(x'+th') - f(x')}{t}.$$

نکته ۱.۱.۱. [۵۰] با توجه به تعاریف بالا ، هنگامی که زیردیفرانسیل‌ها تعریف شده باشند رابطه زیر برقرار است.

$$\widehat{\partial} f(x) \subseteq \partial_M f(x) \subseteq \partial_C f(x) \subseteq \partial_{CR} f(x),$$

تعریف ۵.۱.۱. [۵۰] گوییم فضای باناخ X آسپلند است یا دارای خاصیت آسپلند است هرگاه هر تابع پیوسته و محدب $\varphi : U \to \mathbb{R}$ ، تعریف شده روی زیرمجموعه محدب و باز U از X، روی زیرمجموعه‌ای چگال از U فرشه مشتق‌پذیر باشد.

نکته ۲.۱.۱. [۵۰]. هر فضای باناخ انعکاسی و هر فضای باناخ با دوگان جدایی‌پذیر، از جمله فضاهای آسپلند می‌باشند.

قضیه ۱.۱.۱. [۵۰] X را فضایی آسپلند در نظر بگیرید و فرض کنید $\varphi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ تابعی سره و نیم پیوسته پایینی در $\bar{x} \in \mathrm{dom}\varphi$ باشد. سپس

$$\partial_M \varphi(\overline{x}) = \limsup_{x \xrightarrow{\varphi} \bar{x}} \widehat{\partial} \varphi(x).$$

نکته ۳.۱.۱. با توجه به قضیه بالا می‌توان زیردیفرانسیل حدی را برای توابع نیم پیوسته پایینی در فضاهای آسپلند محاسبه کرد. همچنین به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که برای تابع موضعاً لیپشیتز φ، نگاشت مجموعه مقدار $x \mapsto \partial_M \varphi(x)$ دارای نموداری بسته است.

قضیه ۲.۱.۱. [۵۰] X را فضایی آسپلند در نظر گرفته و فرض کنید $f_۱$ تابعی موضعاً لیپشیتز و $f_۲$ تابعی نیم پیوسته پایینی در نقطه $\bar{x}$ باشند. سپس زیردیفرانسیل حدی در رابطه جمعی زیر صدق می‌کند.

$$\partial_M (f_۱ + f_۲)(\bar{x}) \subset \partial_M f_۱(\bar{x}) + \partial_M f_۲(\bar{x}).$$

توجه کنید که رابطه فوق برای زیردیفرانسیل فرشه برقرار نیست ($f_۱(x) := |x|$، $f_۲(x) := -|x|$ و $\bar{x} = ۰$). در قضیه بعد رابطه‌ای مهم برای زیردیفرانسیل فرشه بیان می‌کنیم که برای توابع تعمیم یافته حقیقی مقدار روی فضاهای باناخ برقرار است و برای اولین بار در [۵۳] ارائه شد.

قضیه ۳.۱.۱. [۵۳] *X را فضایی باناخ در نظر گرفته و فرض کنید $f_۱, f_۲$ توابعی تعمیم یافته حقیقی مقدار باشند که در $\bar{x}$ متناهی اند و*

$$\widehat{\partial}^+ f_۲(\bar{x}) := -\widehat{\partial}(-f_۲)(\bar{x})$$

ناتهی است، سپس

$$\widehat{\partial}(f_۱ + f_۲)(\bar{x}) \subset \bigcap_{x^* \in \widehat{\partial}^+ f_۲(\bar{x})} [x^* + \widehat{\partial} f_۱(\bar{x})].$$

قضایای مقدار میانگین ابزارهای پرکاربرد و مهمی در نظریه آنالیز غیر هموار می‌باشند. در اینجا دو نمونه از این نتایج را برای زیردیفرانسیل‌های حدی و کلارک-راکفلر بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۱. [۵۰] *X را فضایی آسپلند در نظر گرفته و فرض کنید φ تابعی موضعاً لیپشیتز در مجموعه‌ای باز از X که شامل $[a, b]$ است، باشد. سپس داریم:*

$$\langle x^*, b - a \rangle \geq \varphi(b) - \varphi(a)$$

برای $x^* \in \partial_M \varphi(c)$ ی، که $c \in [a, b[$.

قضیه ۵.۱.۱. [۲۶] (*قضیه مقدار میانگین سه نقطه‌ای*) *فرض کنید $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابعی نیم پیوسته پایینی باشد و $x, y \in \operatorname{dom} f$ به طوریکه $x \neq y$. فرض کنید $z \in]x, y[$ و $r \in \mathbb{R}$ طوری باشد که $r \leq f(z)$. سپس وجود دارد $\bar{x} \in [x, z[, \bar{y} \in]z, y]$ و دنباله‌های $(x_n, x_n^*)_n \subset \partial_{CR} f$ با $x_n \xrightarrow{f} \bar{x}$ و $(y_n, y_n^*)_n \subset \partial_{CR} f$ با $y_n \xrightarrow{f} \bar{y}$ به طوریکه*

$$\liminf_n \langle x_n^* - y_n^*, \frac{y_n - x_n}{||y_n - x_n||} \rangle \geq \frac{r - f(x)}{||z - x||} + \frac{r - f(y)}{||z - y||}.$$

نکته ۱.۱.۴. [۲۶] *قضیه ۱.۱.۵ برای زیردیفرانسیل کلارک- راکفلر در هر فضای باناخ برقرار است؛ همچنین برای زیردیفرانسیل‌هادامارد در هر فضای باناخ جدایی‌پذیر و برای زیردیفرانسیل فرشه در هر فضای آسپلند.*

نگاشت مجموعه مقدار $F : X \rightrightarrows Y$ را در نظر بگیرید. فرض کنید K مخروطی محدب و بسته در Y باشد. رابطه ترتیب روی Y را با " $\leq$ " نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_1 \leq y_2 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad y_2 - y_1 \in K.$$

دامنه، نمودار و برون نمودار F را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{dom}F := \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\},$$

$$\mathrm{gr}F := \{(x,y) \in X \times Y | x \in \mathrm{dom}F, y \in F(x)\}$$

و

$$\mathrm{epi}F := \{(x,y) \in X \times Y | y \in F(x) + K\}.$$

حال چند تعریف و نتیجه کاربردی درباره هممشتق نگاشت‌های مجموعه مقدار بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۶. [۵۰] *$F : X \rightrightarrows Y$ را نگاشتی مجموعه مقدار در نظر گرفته و فرض کنید $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{gr}F$. **هممشتق فرشه** F **در نقطه** $(\bar{x},\bar{y})$ **نگاشت مجموعه مقدار** $\widehat{D}^*F(\bar{x},\bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\widehat{D}^*F(\bar{x},\bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* | (x^*, -y^*) \in \widehat{N}((\bar{x},\bar{y}); \mathrm{gr}F)\},$$

*و **هممشتق متعامد** F **در** $(\bar{x},\bar{y})$ **نگاشت مجموعه مقدار** $D_N^*F(\bar{x},\bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$D_N^*F(\bar{x},\bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* | (x^*, -y^*) \in N((\bar{x},\bar{y}); \mathrm{gr}F)\}.$$

مفهوم هممشتق متعامد به طور مستقل از مخروط متعامد در [۴۹] تعریف شده است. اگر $F = f : X \to Y$ نگاشتی تک مقداری باشد، هممشتق فرشه و متعامد آن را در $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ به ترتیب با $\widehat{D}^*f(\bar{x})$ و $D^*_N f(\bar{x})$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از مفهوم هممشتق، باؤ[۵] و مُردوخویچ [۷] توسیع مناسبی از مفهوم زیردیفرانسیل توابع حقیقی مقدار به توابع برداری و نگاشت‌های مجموعه مقدار که مقادیرشان در فضای به طور جزئی مرتب شده است، ارائه دادند. همچنین کاربردهایی از آنها را در مسائل بهینه سازی چندمقداری در [۸، ۹] بدست آوردند.

تعریف ۱.۱.۷. [۷] *$F : X \rightrightarrows Y$ را نگاشتی مجموعه مقدار در نظر بگیرید. نگاشت برون نمودار $\mathcal{E}_F : X \rightrightarrows Y$ به صورت زیر در نظر بگیرید:*

$$\mathcal{E}_F(x) := \{y \in Y | y \in F(x) + K\}.$$

زیردیفرانسیل فرشه و زیردیفرانسیل متعامد F در نقطه $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{epi}F$ و در جهت $y^* \in Y^*$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{\partial}F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \widehat{D}^*\mathcal{E}_F(\bar{x}, \bar{y})(y^*),$$

$$\partial F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := D^*_N\mathcal{E}_F(\bar{x}, \bar{y})(y^*).$$

همچنین زیردیفرانسیل فرشه و زیردیفرانسیل متعامد F در $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{epi}F$ به ترتیب به صورت زیر داده می‌شود:

$$\widehat{\partial}F(\bar{x}, \bar{y}) := \{x^* \in X^* | x^* \in \widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*), -y^* \in \widehat{N}(x; K), ||y^*|| = ۱\},$$

$$\partial F(\bar{x}, \bar{y}) := \{x^* \in X^* | x^* \in D^*_N F(\bar{x}, \bar{y})(y^*), -y^* \in N(x; K), ||y^*|| = ۱\}.$$

[۵] Bao

نکته ۵.۱.۱. [۷] اگر $F = f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ و $K = \mathbb{R}_+$، سپس زیردیفرانسیل فرشه و متعامد برای نگاشت‌های مجموعه مقدار تعریف شده در بالا به ترتیب به زیردیفرانسیل فرشه و زیر دیفرانسیل حدی در تعریف‌های ۱.۱.۱ و ۲.۱.۱ تبدیل می‌شوند.

تعریف ۸.۱.۱. [۵۰] فرض کنید $F : \Omega \subset X \rightrightarrows Y$ و $\mathrm{dom}F \neq \emptyset$.

۱. گوییم F در $\bar{x} \in \mathrm{dom}F$، موضعاً لیپشیتز است، اگر همسایگی U از $\bar{x}$ و $\ell \geq 0$ به قسمی موجود باشد که برای هر $x \in \Omega \cap U$ داشته باشیم

$$F(x) \subset F(u) + \ell||x - u||B_Y.$$

۲. گوییم F موضعاً برون لیپشیتز در $\bar{x} \in \mathrm{dom}F$ است اگر $\mathcal{E}_F$ در این نقطه موضعاً لیپشیتز باشد.

۳. گوییم F در $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gr}F$ موضعاً لیپشیتز مانند است (در خاصیت آبین صدق می‌کند) اگر همسایگی‌های U از $\bar{x}$ و V از $\bar{y}$ و عدد $\ell \geq 0$ به قسمی موجود باشند که برای هر $x, u \in \Omega \cap U$ داشته باشیم

$$F(x) \cap V \subset F(u) + \ell||x - u||B_Y.$$

۴. گوییم F در $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{epi}F$ موضعاً برون لیپشیتز مانند است، اگر $\mathcal{E}_F$ در این نقطه موضعاً لیپشیتز مانند باشد.

A را زیرمجموعه‌ای از X در نظر بگیرید. نگاشت $i(\cdot; A) : X \rightrightarrows Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$i(x;A) := \begin{cases} \circ \in Y & x \in A, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

این بخش را بیان قاعده جمعی برای نگاشت‌های مجموعه مقدار F و $i(\cdot;A)$ به پایان می‌رسانیم.

گزاره ۶.۱.۱. [۵۰] *X و Y را فضاهایی آسپلند در نظر گرفته و فرض کنید $A \subset X$ مجموعه‌ای بسته باشد و نگاشت مجموعه مقدار $F : X \rightrightarrows Y$ در نقطه $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{gr}F$ موضعاً بسته باشد. فرض کنید F در $(\bar{x},\bar{y})$ موضعاً لیپشیتز مانند باشد. سپس برای هر $y^* \in Y^*$ شمول زیر برقرار است:*

$$D_N^*(F+i(\cdot;A))(\bar{x},\bar{y})(y^*) \subset D_N^*F(\bar{x},\bar{y})(y^*) + N(\bar{x};A).$$

۲.۱ قضیه KKM

X را مجموعه‌ای غیر تهی در نظر بگیرید. خانواده همه زیرمجموعه‌های غیرتهی و متناهی از X را با $\mathcal{F}(X)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید Y یک مجموعه غیرتهی، X یک فضای توپولوژیکی و $F : Y \rightrightarrows X$ نگاشتی مجموعه مقدار باشد. گوییم F یک انتقال بسته مقدار است اگر و تنها اگر برای هر $(y,x) \in Y \times X$ با $x \notin F(y)$, وجود داشته باشد $y' \in Y$ به طوریکه $x \notin \mathrm{cl}F(y')$.
واضح است که این تعریف معادل است با اینکه

$$\bigcap_{y\in Y} F(y) = \bigcap_{y\in Y} \mathrm{cl}F(y).$$

اگر $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ گوییم $F : B \rightrightarrows A$ یک انتقال بسته مقدار است اگر وتنها اگر نگاشت چندمقداری $y \mapsto F(y) \cap A$ یک انتقال بسته مقدار باشد. هنگامی که $X = Y$ و $A = B$، F را یک انتقال بسته مقدار روی A گوییم.

K را یک زیرمجموعه محدب از فضای برداری X در نظر بگیرید. نگاشت $F : K \rightrightarrows X$ را یک نگاشت KKM گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه متناهی و غیرتهی A از K داشته باشیم $\mathrm{conv(A)} \subseteq F(A),$ که منظور از $\mathrm{conv}(A)$، غلاف محدب A و $F(A) = \bigcup\{F(x)|x \in A\}$.

لم ۱.۲.۰۱ [۳۱] *K را زیرمجموعه‌ای محدب و ناتهی از فضای برداری توپولوژیکی‌هاسدورف X در نظر گرفته و فرض کنید $\Gamma, \widehat{\Gamma} : K \rightrightarrows K$ دو نگاشت مجموعه مقداری هستند که در شرایط زیرصدق می‌کنند:*

A۱ *برای هر $x \in K$، $\widehat{\Gamma}(x) \subseteq \Gamma(x)$.*

A۲ *$\widehat{\Gamma}$ نگاشتی KKM است.*

A۳ *برای هر $A \in \mathcal{F}(K)$، Γ یک انتقال بسته مقدار است روی $\mathrm{conv}(A)$.*

A۴ *برای هر $A \in \mathcal{F}(K)$ داشته باشیم*

$$\mathrm{cl}_K(\bigcap_{x\in\mathrm{conv}(A)} \Gamma(x)) \cap \mathrm{conv}(A) = (\bigcap_{x\in\mathrm{conv}(A)} \Gamma(x)) \cap \mathrm{conv}(A).$$

A۵ *مجموعه ناتهی محدب و فشرده $B \subseteq K$ به قسمی موجود است که $\mathrm{cl}_K(\bigcap_{x\in B}\Gamma(x))$ مجموعه‌ای فشرده است.*

سپس $\bigcap_{x\in K}\Gamma(x) \neq \emptyset$.

نکته ۱.۲.۰۱ *اگر Γ نگاشتی بسته مقدار باشد سپس شرایط A۴ و A۵ همیشه برقرار می‌باشند.*

۳.۱ تحدب‌های تعمیم یافته

در این بخش به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه‌ای از تحدب‌های تعمیم یافته برای توابع حقیقی مقدار و یکنوایی‌های تعمیم یافته برای نگاشت‌های مجموعه مقدار می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. [۶۲] *فرض کنید $\eta : X \times X \to X$. گوییم زیرمجموعه Ω از X مجموعه‌ای محدب پایا نسبت η می‌باشد هرگاه برای هر $x, y \in \Omega$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $y + \lambda\eta(x, y) \in \Omega$.*

تعریف ۲.۳.۱. [۴۴] *Ω را مجموعه‌ای محدب پایا نسبت به η در نظر گرفته و فرض کنید $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

۱. *گوییم f نسبت به η روی مجموعه Ω محدب پایا نما است اگر برای هر $x, y \in \Omega$ و $\xi \in \partial_L f(x)$ داشته باشیم*

$$\langle \xi, \eta(y, x)\rangle \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x);$$

۲. *گوییم f نسبت به η روی مجموعه Ω شبه پیش محدب پایا است اگر برای هر $x, y \in \Omega$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم*

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \max\{f(x), f(y)\};$$

۳. *گوییم f نسبت به η روی مجموعه Ω نیم اکید شبه پیش محدب پایا است اگر برای هر $x, y \in \Omega$ با $f(x) \neq f(y)$ و $0 < \Lambda < 1$ داشته باشیم*

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) < \max\{f(x), f(y)\}.$$

حال تعریفی از یک تابع α- پیش محدب پایا را بیان می‌کنیم که تعمیمی طبیعی از تحدب قوی از پولیاک [۵۴] می‌باشد.