بسم الله الرّحمن الرّحيم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی (جبر)

# مدول‌هایی که در فرمول رادیکال صدق می‌کنند


توسط:

مهدی شمسی




استاد راهنما:

دکترعبدالرسول عزیزی

شهریورماه ۱۳۸۷

به نام خدا

# مدول‌هایی که در فرمول رادیکال صدق می‌کنند

به وسیله‌ی:


**مهدی شمسی**


پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت تحصیلی
لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

**ریاضی-جبر**

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

**ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی**

دکتر عبدالرسول عزیزی، استادیار ریاضی(رئیس کمیته) ..............................

دکتر حبیب شریف، استاد ریاضی..............................................

دکتر مجید ارشاد، دانشیار ریاضی..............................................

شهریورماه ۱۳۸۷

تقدیم به یگانه منجی عالم بشریت،

مهدی آل محمد (عج).

## سپاسگزاری

خداوند را شاکرم که توفیق اتمام مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به من عطا فرمود. در اینجا بر خود فرض می‌دانم از استاد گرامی جناب آقای دکتر عبدالرسول عزیزی که با پیشنهادها و راهنمایی های ارزشمندشان پیمودن این راه دشوار را بر من آسان نمودند، صمیمانه تشکر و قدر دانی کنم و برای ایشان و خانواده محترمشان آرزوی سلامتی و کامیابی دارم.

در ضمن از اساتید محترم جناب آقای دکتر شریف و جناب آقای دکتر ارشاد به خاطر مشاوره و راهنماییِ این‌جانب در نوشتن این تحقیق قدردانی می‌نمایم.

همچنین از تمامی دوستان عزیزم به خصوص دوست فداکارم جناب آقای نقی پور که در طول مدت تحصیل از علم و اخلاق آن‌ها بهره بردم و تشویق‌ها و مهربانی‌های ایشان همواره به بنده انُرژی می‌بخشید، صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

در پایان از پدر و مادر مهربان و فداکارم که در طول زندگیم لحظه‌ای از محبّت به بنده دریغ نورزیده‌اند و همواره مشوق اصلی بنده در این مسیر بوده‌اند با همه‌ی وجودم سپاسگزارم و دست هر دو را خالصانه می‌بوسم.

مهدی شمسی ۱۳۸۷

# چکیده

## مدول‌هایی که در فرمول رادیکال صدق می کنند

به وسیله‌ی:

**مهدی شمسی**


در این پایان‌نامه همه‌ی حلقه‌ها جابجایی و یکدار و همه‌ی مدول‌ها یکانی هستند، مگر آن‌که خلاف آن بیان شود.

در مرجع [۱۳] اثبات می گردد که هر حلقه از بعد صفر در فرمول رادیکال صدق می کند. در این پایان نامه این مطلب به مدول‌های ویژه تعمیم داده می‌شود. علاوه بر این مدول‌های دیگری معرفی می‌شوند که در فرمول رادیکال صدق می‌کنند. همچنین در ادامه حلقه‌های نوتری که دارای ویژگی $s.p.a.r$ هستند مورد توجه قرار می‌گیرند.

فهرست مطالب

# فهرست علائم و نشانه‌ها

| | |
|---|---|
| زیرمدول، کوچکتر یا مساوی | $\leq$ |
| زیرمدولِ سره | $\lneq$ |
| متعلق است به | $\in$ |
| متعلق نیست به | $\notin$ |
| زیرمجموعه | $\subseteq$ |
| زیرمجموعه‌ی سره | $\subsetneq$ |
| زیرمجموعه نبودن | $\not\subseteq$ |
| دونقطه از زیرمدول $N$ در $M$ | $(N:M)$ |
| پوچساز $M$ در حلقه $R$ | $Ann_R\ M$ |
| پوش زیر مدول $N$ در $M$ | $E_M(N)$ |
| زیر مدول تولید شده به وسیله $E_M(N)$ | $RE_M(N)$ |
| رادیکال زیرمدول $N$ از مدول $M$ | $Rad_M(N)$ |
| رادیکال جیکوبسون مدول $M$ | $JRad\ M$ |
| رادیکال ایده‌آل $I$ | $\sqrt{I}$ |
| صفر مدول | $0$ |
| صفر حلقه | $\circ$ |
| پایان اثبات | $\blacksquare$ |

| | |
|---|---|
| بُعد حلقه $R$ | $\dim R$ |
| موضعی‌سازی مدول $M$ در ایده‌آل $m$ | $M_{\mathrm{m}}$ |
| زیرمدول یا ایده‌آل تولید شده بوسیله‌ی $x$ روی حلقه‌ی $R$ | $Rx$ یا $\langle x \rangle$ |
| مجموع مستقیم داخلی | $\oplus$ |
| مجموعه‌ی اعداد طبیعی | $\mathbb{N}$ |
| مجموعه‌ی اعداد صحیح | $\mathbb{Z}$ |
| مجموعه‌ی اعداد گویا | $\mathbb{Q}$ |
| دترمینان ماتریس $A$ | $\det A$ |
| اشتراک | $\bigcap$ |
| اجتماع | $\bigcup$ |
| مخالف است | $\neq$ |
| هسته $\varphi$ | $\ker \varphi$ |
| ایده آل صفر | $(\circ)$ |
| زیر مدول صفر | $(0)$ |
| یکریخت است با | $\cong$ |
| حاصل ضرب | $\prod$ |
| مجموع | $\sum$ |
| حلقه خارج قسمتی $R$ بر $S$ | $S^{-1}R$ |

# فصل اول

## تعاریف و قضایای مقدماتی

در ابتدای این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌شوند با این وصف که دانستن مفاهیم حلقه و مدول مفروض است. سپس در ادامه این فصل اهداف کلی پایان‌نامه آورده می‌شود. مطالب این پایان‌نامه بر گرفته از مراجع [۹] و [۱۵] است.

## ۱ـ۱ مقدمه

در این پایان‌نامه همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار و همه مدول‌ها یکانی هستند، مگر غیر از این بیان شده باشد.

**تعریف ۱.۱.** فرض کنید $M$ یک $R$-مدول باشد. زیر مدول محض $K$ از $M$ را اول می‌نامند هرگاه برای هر $r \in R$ و $m \in M$ ، چنانچه $rm \in K$، آنگاه $m \in K$ یا $rM \subseteq K$.

**تعریف ۱ .۲.** رادیکال زیر مدول $N$ از $R$- مدول $M$ با $Rad_M(N)$ نمایش داده می‌شود و اشتراک همه زیر مدول‌های اول $M$ که شامل $N$ هستند تعریف می‌شود، در صورتی که $M$ دارای زیر مدولی اول شامل $N$ باشد. در غیر این صورت $Rad_M(N) = M$ فرض می‌شود.

**تعریف ۱ .۳.** فرض کنید $N$ یک زیر مدول از $R$- مدول $M$ باشد. در این صورت پوش $N$ (در $M$) که با $E_M(N)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه: همه عناصر $x \in M$ چنانکه عناصر $r \in R$ و $m \in M$ موجودند به طوری که $x = rm$ و $r^n m \in N$، جائیکه $n$ یک عدد صحیح مثبت است. همچنین زیر مدول تولید شده به وسیله $E_M(N)$ با $RE_M(N)$ نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۱ .۴.** فرض کنید $M$ یک $R$- مدول باشد و $P$ و $N$ دو زیر مدول از $M$ باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم: $(N:P) = \{r \in R \mid rP \subseteq N\}$، به وضوح $(N:P)$ یک ایده‌آل از $R$ است. به خصوص $(0:M) = \{r \in R \mid rM = (0)\}$. این ایده‌آل از $R$ کشنده $M$ نامیده می‌شود و با $Ann_R(M)$ نمایش داده می‌شود. واضح است که $(N:M) = Ann_R\left(\frac{M}{N}\right)$.

**لم ۱ .۵.** هرگاه $P$ یک زیر مدول اول از $R$- مدول $M$ باشد، آنگاه $Ann_R\left(\frac{M}{P}\right)$ یک ایده‌آل اول $R$ است.

**اثبات.** بدیهی است. ■

**گزاره ۱.۶.** فرض کنید $M$ یک $R$-مدول و $N$ یک زیر مدول از $M$ باشد. در این صورت

$N \subseteq RE_M(N) \subseteq Rad_M(N)$.

**اثبات.** به ازای هر $x \in N$، $1_R x = x \in N$. لذا $x \in E_M(N) \subseteq RE_M(N)$. بنابراین، $N \subseteq RE_M(N)$. حال فرض کنید $x \in E_M(N)$ دلخواه باشد. در این صورت عدد صحیح مثبت $k$ و عناصر $s \in R$ و $m \in M$ موجودند به طوری که $x = sm$ و $s^n m \in N$. چنانچه $P$ یک زیر مدول اول دلخواه از $M$ باشد به طوری که $N \subseteq P$، آنگاه $s^n m \in P$. اگر $m \in P$، آنگاه $x = sm \in P$ و اگر $m \notin P$، آنگاه $s^n M \subseteq P$. از این رو،

$$s^n \in (P:M) = Ann_R\left(\frac{M}{P}\right)$$

و چون طبق لم ۱.۵، $Ann_R\left(\frac{M}{P}\right)$ یک ایده‌آل اول $R$ است، لذا

$$s \in Ann_R\left(\frac{M}{P}\right) = (P:M).$$

پس $sM \subseteq P$. از این رو، $x = sm \in sM \subseteq P$. بنابراین،

$$x \in \bigcap_{N \subseteq P \underset{\text{اول}}{\leq} M} P = Rad_M(N).$$

یعنی، $E_M(N) \subseteq Rad_M(N)$. در نتیجه، $RE_M(N) = \langle E_M(N) \rangle \subseteq Rad_M(N)$. ■

**تعریف ۱.۷.** فرض کنید $M$ یک $R$-مدول باشد. در این صورت گوییم زیر مدول $N$ از $M$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند، هرگاه $Rad_M(N) = RE_M(N)$. گفته می‌شود که

$M$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند، هرگاه هر زیر مدول آن در فرمول رادیکال صدق کند.

گفته می‌شود که حلقه $R$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند، هرگاه هر $R$-مدول در فرمول رادیکال صدق کند.

**لم ۱ .۸.** فرض کنید $A',A$ دو $R$-مدول باشند و $\varphi : A \to A'$ یک برو ریختی $R$-مدولی باشد و $B \leq A$ به طوری که $\ker\varphi = K \subseteq B$. در این صورت یک تناظر یک به یک بین زیر مدول‌های محض $A$ که شامل $B$ هستند و زیر مدول‌های محض $A'$ که شامل $\varphi(B)$ هستند وجود دارد. علاوه بر این برای هر زیر مدول $B'$ از $A'$ یک زیر مدول $C$ از $A$ موجود است به طوری که $K \subseteq C$ و $\varphi(C) = B'$.

**اثبات.** (۱ .۱) از [۱۰]. ■

**لم ۱ .۹.** مفروضات لم ۱ .۸، را در نظر بگیرند. در این صورت

$$\varphi\left(Rad_A\left(B\right)\right) = Rad_{A'}\left(\varphi\left(B\right)\right).$$

**اثبات.** (۱ .۳) از [۱۰]. ■

**گزاره ۱ .۱۰.** هرگاه یک $R$-مدول $M$ در فرمول رادیکال صدق کند، آنگاه هر تصویر همریخت $M$ نیز در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

**اثبات.** باتوجه به لم ۱ .۸ و ۱ .۹، بدیهی است. ■

**گزاره ۱ .۱۱.** هر حلقه $R$، به عنوان یک $R$-مدول در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

**اثبات.** با توجه به تعریف ۳.۱، بدیهی است. ■

**نتیجه۱ .۱۲.** هر $R$-مدول دوری در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

**اثبات.** با توجه به گزاره ۱۰.۱ و گزاره ۱۱.۱، بدیهی است. ■

**قضیه ۱ .۱۳.** فرض کنید $R$ یک دامنه نوتری باشد به طوری که $R\oplus R$ به عنوان یک $R$-مدول در فرمول رادیکال صدق کند. در این صورت $R$ یک دامنه ددکیند است.

**اثبات.** (۲ .۳) از [۷]. ■

**قضیه ۱ .۱۴.** فرض کنید $R$ یک حلقه نوتری باشد. در این صورت $R$ (به عنوان یک حلقه) در فرمول رادیکال صدق می‌کند اگر و فقط اگر $R\oplus R$ به عنوان یک $R$-مدول در فرمول رادیکال صدق کند.

**اثبات.** (۲.۵) از [۷]. ■

**تعریف ۱ .۱۵.** $R$-مدول ناصفر $M$ را ساده می‌نامند، هرگاه هیچ زیر مدول غیر سره نداشته باشد.

**تعریف ۱.۱۶.** فرض کنید $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک خانواده از زیر مدول‌های ساده $R$- مدول $M$ باشد. در این صورت اگر $M$ مجموع مستقیم این خانواده باشد، آنگاه $M=\bigoplus_{\alpha\in I} T_\alpha$ یک تجزیه نیم ساده از $M$ نامیده می‌شود. $R$- مدول $M$ نیم ساده نامیده می‌شود در صورتی که دارای یک تجزیه نیم ساده باشد.

**تعریف ۱.۱۷.** حلقه $R$ را نیم ساده می‌نامند، هرگاه $R$ به عنوان $R$- مدول نیم ساده باشد.

**قضیه ۱.۱۸.** فرض کنید $R$ یک حلقه نوتری جابجایی باشد و $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ همه ایده‌آل های اول مینیمال $R$ باشند. دراین صورت $R$ به عنوان یک حلقه در فرمول رادیکال صدق می‌کند، هرگاه $R$ ( به عنوان یک حلقه) آرتینی باشد یا شرایط زیر برقرار باشند:

یک) $\dim R=1$ و به ازای هر $i=1,2,\ldots,n$، $\frac{R}{\beta_i}$ یک دامنه ددکیند است و $\beta_i$ تنها ایده‌آل $\beta_i$- اولیه است.

دو) هرگاه $n\geq 2$، آنگاه به ازای هر $k=1,2,\ldots,n-1$، $\left(\bigcap_{i=1}^{k}\beta_i\right)+\beta_{k+1}=\bigcap_{i=1}^{k}(\beta_i+\beta_{k+1})$.

سه) هرگاه $n\geq 2$، آنگاه به ازای هر $1\leq i<j\leq n$، $R=\beta_i+\beta_j$ یا $\frac{R}{\beta_i+\beta_j}$ آرتینی نیم ساده است.

**اثبات.**(۱.۱) از [۷]. ■

**قضیه ۱ .۱۹.** هر دامنه ددکیند به عنوان یک حلقه در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

**اثبات.** قضیه ۹، از [۶]. ■

**قضیه ۱ .۲۰.** هرگاه $R$ یک حلقه آرتینی باشد، آنگاه هر $R$- مدول در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

**اثبات.** (۵.۳) از [۷]. ■

**نتیجه ۱ .۲۱.** فرض کنید $R$ یک حلقه باشد. در این صورت اگر هر ایده‌آل اول $R$ ماکسیمال باشد، آنگاه هر $R$- مدول در فرمول رادیکال صدق می‌کند.

**اثبات.**(۸.۲) از [۱۳]. ■

**تعریف ۱ .۲۲.** فرض کنید $m$ یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه مفروض $R$ باشد. در این صورت یک $R$- مدول $M$، $m$- ویژه نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in m$ و $x \in M$، عدد صحیح مثبت $n$ و عنصر $c \in R \setminus m$ موجود باشند به طوری که $ca^n x = 0$. علاوه بر این $R$- مدول $M$، ویژه نامیده می‌شود، هرگاه $M$ به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال $m$ از $R$، $m$- ویژه باشد.

**تعریف ۱.۲۳.** فرض کنید $R$ یک دامنه صحیح باشد. یک $R$-مدول $M$ بخش‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر عنصر $0 \neq c \in R$، $M = cM$.

**گزاره ۱ .۲۴.** فرض کنید $R$ یک حلقه باشد و $R$-مدول $M = M' \oplus M''$ مجموع مستقیمی از زیر مدول‌های $M'$ و $M''$ باشد. در این صورت هرگاه $M$ در فرمول رادیکال صدق کند، آنگاه $M'$ و $M''$ در فرمول رادیکال صدق می‌کنند.

**اثبات.** به وضوح نگاشت $\varphi : M' \oplus M'' \to M'$ که هر $(x,y) \in M' \oplus M''$ را به $x$ می‌نگارد یک بروریختی $R$-مدولی است. چون $M = M' \oplus M''$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند، لذا طبق لم ۱.۱۰، $M'$ نیز در فرمول رادیکال صدق می‌کند. به طور مشابه $M''$ نیز در فرمول رادیکال صدق می‌کند. ■

**تعریف ۱ .۲۵.** حلقه $R$ را تحویل یافته می‌نامند، هرگاه $N(R) = (0)$. یعنی، $R$ هیچ عنصر پوچ توان غیر صفر نداشته باشد.

**گزاره ۱.۲۶.** فرض کنید $I_1,\dots,I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه $R$ باشند و $P$ یک ایده‌آل اول $R$ باشد. در این صورت هرگاه $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$، آنگاه عدد صحیح $1 \leq i \leq n$ موجود است به طوری که $I_i \subseteq P$.

**اثبات.** (۱. ۱۱) از [۲]. ■

## ۱ـ۲ اهداف کلی پایان‌نامه.

قسمتی از هدف این پایان‌نامه این است که نتیجه ۱ .۲۱، را که در منبع [۱۳] ثابت شده است، را تعمیم بدهد. در فصل دوم برخی خواص مدول‌های بخش‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این بخش ثابت می‌کنیم که هرگاه $R$ یک حلقه باشد و $M'$ یک $R$- مدول باشد که در فرمول رادیکال صدق می‌کند و $M''$ یک $R$- مدول بخش‌پذیر باشد، آنگاه $R$- مدول $M' \oplus M''$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند. در فصل سوم برخی از خواص و مثال‌های مدول‌های ویژه ارائه می‌شود. در فصل چهارم که عنوان آن مدول‌های ویژه و فرمول رادیکال نامیده شده است، نتایجی اساسی از این پایان‌نامه آمده است. اساس کار این بخش این است که ثابت شود که اگر $X$ یک $R$- مدول باشد که در فرمول رادیکال صدق می‌کند و $Y$ یک $R$- مدول ویژه باشد، آنگاه $X \oplus Y$ در فرمول رادیکال صدق می‌کند. یک زیر مدول $N$ از $R$- مدول $M$ یک زیر مدول نیم اول از $M$ نامیده می‌شود، اگر $N \neq M$ و هرگاه عناصر $r \in R$، $m \in M$ و عدد صحیح مثبت $k$ موجود باشند به طوری که $r^k m \in N$، آنگاه $rm \in N$. به وضوح اشتراک هر تعداد از زیر مدول‌های اول از $R$- مدول $M$ یک زیر مدول نیم اول از $M$ است. گفته می‌شود که $R$- مدول $M$ دارای ویژگی $s.p.a.r$ است، هرگاه هر زیر مدول نیم اول آن اشتراکی از زیر مدول‌های اول $M$ باشد. در فصل پنجم برخی نتایج اساسی را درباره