بسم الله الرحمن الرحيم

٩٥٧٧٠٥

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

تابع چگالی احتمال فازی متغیرهای تصادفی فازی
و
برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی آن

استاد راهنما:

دکتر عین اله پاشا

تدوین:

مجتبی آقاجان پور پاشا

بهمن ۱۳۸۶

بسمه تعالی

دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

تابع چگالی احتمال فازی متغیرهای تصادفی فازی و برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی آن

استاد راهنما : آقای دکتر عین‌اله پاشا

داور داخلی : آقای دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده

داور خارجی : آقای دکتر غلامحسین یاری

دانشجو : **آقای مجتبی آقاجان‌پور پاشا**

زمان : ساعت ۴ بعدازظهر روز یکشنبه مورخ ۸۶/۱۱/۱۴

مکان : دانشگاه تربیت معلم، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

چکیده: در این پایان‌نامه، مفهوم تابع چگالی احتمال فازی متغیر تصادفی فازی، و برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی آن، پیشنهاد و بررسی شده است.

بر اساس «اتحاد تجزیه»، عدد فازی بسته را از یک خانواده از بازه‌های بسته خواهیم ساخت. با استفاده از همان تکنیک، $\tilde{f}$، تابع چگالی احتمال فازی متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ را از f، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X می‌سازیم. به طریق مشابه، امید ریاضی فازی و واریانس فازی $\tilde{X}$ نیز تعریف می‌شود.

ساختن برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی از برآوردگرهای معلوم نیز، با همان تکنیک انجام‌پذیر است. به‌علاوه، ثابت می‌کنیم برآوردگر فازی، یک متغیر تصادفی فازی است و می‌توانیم امید ریاضی و واریانس فازی آن را نیز تعریف و بررسی کنیم.

مسأله‌ی اصلی، یافتن درجه‌ی عضویت چگالی احتمال فازی مشاهده‌ی فازی از متغیر تصادفی فازی، همچنین مقداردهی درجه‌ی عضویت برآوردهای فازی است که آن را به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنیم. سپس روش محاسباتی ارائه و برای دو مثال، به کار برده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌های فازی، عدد حقیقی فازی، عدد حقیقی فازی کانونی، متغیر تصادفی فازی، تابع چگالی احتمال فازی، برآوردگر (بیزی) فازی، برنامه‌ریزی غیرخطی.

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....
واحد ....

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای مجتبی آقاجان‌پور پاشا دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ آمار تحت عنوان:

تابع چگالی احتمال فازی متغیرهای تصادفی فازی و برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی آن

در روز یکشنبه مورخ ۸۶/۱۱/۱۴ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۹/- نوزده تمام می‌باشد.

۱ـ عالی ☑
۲ـ بسیار خوب ☐
۳ـ خوب ☐
۴ـ قابل قبول ☐
۵ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما
دکتر عین‌اله پاشا

داور خارجی
دکتر غلامحسین یاری

داور داخلی
دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده

جواد لاآلی
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران: خیابان شهید مفتح شماره ۴۹ کدپستی ۱۵۶۱۴ تلفن ۸۱۰۲۱

تقدیم به ره‌پویان راه علم
و آنان که آن را گرامی می‌دارند.

تشکر و قدردانی

از دست و زبان که برآید　　　　کز عهده‌ی شکرش بدر آید

شکر و سپاس بیکران مخصوص خداوندگار، ایزد منّانی است که توفیق پرسه‌زدن در کوچه پس‌کوچه‌های علم و دانش را به بنده‌ی حقیرش عطا فرمود. امید دارم شکر این نعمت، نعمتم افزون کند و دریچه‌ی علم و راه بی‌پایان آن هیچگاه بر من مسدود نشود.

من لم یشکر المخلوق، لم یشکرالخالق

گواه بر آن است که قدردانی بی‌دریغ خود را به خانواده‌ی عزیزم، به خصوص پدر و مادرم، تقدیم کنم که زمینه‌ی شکوفایی استعدادهایم را فراهم کرده و هّم و غّم خویش را در تعالی فرزندانشان به کار بستند.

همچنین، از استادراهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر عین‌اله پاشا، به خاطر دقت‌نظر و راهنمایی‌های ارزشمندشان سپاسگزاری می‌کنم و از آقایان دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده ثانی و دکتر غلامحسین یاری، داوران محترم این پایان‌نامه متشکرم.

در پایان از دوستان خوبم، آقایان اسداله یوسفی، مرتضی میردهقان، مهدی دهقانی، سید عابد علوی و دیگرانی که در مقاطع مختلف یار و همراه من بودند قدردانی می‌کنم. همچنین برخود لازم می‌دانم از خانم مهناز صمدیان ذکریا به خاطر حروفچینی و صفحه‌آرایی بسیار خوبشان سپاسگزاری کنم.

مجتبی آقاجان‌پور پاشا

۱۳۸۶/۱۱/۱۴

چکیده

در این پایان‌نامه، مفهوم تابع چگالی احتمال فازی متغیر تصادفی فازی، و برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی آن، پیشنهاد و بررسی شده است.

بر اساس «اتحاد تجزیه»، عدد فازی بسته را از یک خانواده از بازه‌های بسته خواهیم ساخت. با استفاده از همان روش، $\tilde{f}$، تابع چگالی احتمال فازی متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ را از f، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X می‌سازیم. به طریق مشابه، امید ریاضی فازی و واریانس فازی $\tilde{X}$ نیز تعریف می‌شود.

ساختن برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی از برآوردگرهای معلوم نیز، با همان روش انجام‌پذیر است. به‌علاوه، ثابت می‌کنیم برآوردگر فازی، یک متغیر تصادفی فازی است و می‌توانیم امید ریاضی و واریانس فازی برآوردگرهای فازی را نیز تعریف و بررسی کنیم.

مسأله‌ی اصلی، یافتن درجه‌ی عضویت چگالی احتمال فازی مشاهده‌ی فازی از متغیر تصادفی فازی، همچنین مقداردهی درجه‌ی عضویت برآوردهای فازی است که آن را به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنیم. سپس روش محاسباتی ارائه و برای دو مثال، به کار برده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌های فازی، عدد حقیقی فازی، عدد حقیقی فازی کانونی، متغیر تصادفی فازی، تابع چگالی احتمال فازی، برآوردگر (بیزی) فازی، برنامه‌ریزی غیرخطی.

پیش‌گفتار

به طور مشخص، ریاضیات فازی دیگر از هرگونه بحث و جدل پیرامون خود رها گشته، و راه خود را در پربارکردن ریاضیات و بالنتیجه در همه‌ی علوم، هموارکرده است. کتابها، مجلات و مقالات علمی فراوان نوشته شده در این زمینه، وکاربردهای روزافزون آنها، نشان بارز این ادعاست. همگام با این کوشش، این پایان‌نامه نیز به روشن کردن موضوعی در ریاضیات فازی پرداخته که در دو مقاله‌ی زیر بحث و بررسی شده‌اند:

1. Hsien-Chung Wu, Probability density functions of fuzzy random variables, Fuzzy Sets and Systems, 105(1999), 139-158.
2. Hsien-Chung Wu, The fuzzy estimators of fuzzy parameters based on fuzzy random variables, European Journal of Operational Research, 146(2003), 101-114.

برای درک مطالبی که در این پایان‌نامه آمده است، آشنایی پایه‌ای با موضوعات اساسی آنالیز ریاضی، آنالیز حقیقی، احتمال و آمار، تحقیق در عملیات و ریاضیات فازی مورد نیاز است، مع‌الوصف مقدماتی از این مباحث در فصل‌های اول و دوم آورده شده است که این نیاز را تا حدود زیادی مرتفع می‌سازد. در بخش پایانی فصل دوم، اعداد فازی بسته از طریق «اتحاد تجزیه» و از یک خانواده از بازه‌های بسته ساخته می‌شود که خط‌مشی کلی این پایان‌نامه را تبیین می‌سازد.

در فصل سوم، پس از تشکیل دستگاه اعداد حقیقی فازی، متغیر تصادفی فازی تعریف، و تابع چگالی احتمال فازی برای آن پیشنهاد و شرح داده می‌شود. مثال اول از فصل پنجم نیز به همین موضوع اختصاص داده شده است. بخش پایانی فصل سوم، به امید ریاضی فازی و واریانس فازی یک متغیر تصادفی فازی پرداخته است.

در فصل چهارم، برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی تعریف، و ثابت خواهد شد برآوردگر فازی یک متغیر تصادفی فازی است. این موضوع، زمینه را برای تعریف امید ریاضی فازی و واریانس فازی برآوردگرهای فازی مهیا می‌سازد. همچنین برآورد فازی یک پارامتر فازی، یک عدد حقیقی فازی است

وقتی که پارامتر فازی، یک عدد حقیقی فازی است. مثال دوم از فصل پنجم به موضوعات مطرح شده در این فصل اختصاص دارد.

قابل ذکر است تابع چگالی احتمال فازی (فصل سوم) و برآوردگرهای فازی پارامترهای فازی (فصل چهارم) در دو مقاله‌ی جداگانه، که روندی مشابه را طی می‌کنند، ارائه شده است. این دو موضوع همزمان در این پایان‌نامه، ولی در دو فصل جداگانه، مطرح شده است.

در فصل پنجم، مسأله‌ی تعیین درجه‌ی عضویت چگالی احتمال مشاهده‌ی فازی از متغیر تصادفی فازی، و تعیین درجه‌ی عضویت برآورد فازی پارامتر فازی، به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل، روش محاسباتی آن ارائه شده و همان طورکه در بالا نیز گفته شد، برای دو مثال به کار می‌رود. قابل توجه است، درک کامل دو مثال مذکور، درک کامل مطالب و استفاده‌ی کاربردی آن را به دست می‌دهد.

یک بخش پایانی، که ارتباط چندانی با موضوعات مطرح شده در این پایان‌نامه ندارد، به عنوان ضمیمه آورده شده است که به منطق و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی شهودی، به عنوان تعمیمی از منطق و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی می‌پردازد. توجه به این بخش کوتاه سودمند خواهد بود.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدماتی از آنالیز ریاضی و حقیقی، مختصری از تحقیق در عملیات

۱.۱ مقدمه

آوردن مقدماتی از آنالیز ریاضی، آنالیز حقیقی، و تحقیق در عملیات در فصل اول، به منظور خودکفا بودن پایان‌نامه صورت گرفته است. اگرچه به دلیل وسعت فراوان آنالیز ریاضی و حقیقی، این کار بسیار مشکل است، با این حال، تعاریف و قضایایی چند انتخاب و آورده شده‌اند. در باب برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی، به ساختار کلی مسائل برنامه‌ریزی پرداخته و از ورود به جزئیات صرفنظر شده است.

۲.۱ مقدماتی از آنالیز ریاضی

موضوعات بنیادی در نظریه‌ی مجموعه‌ها که در زیر به ذکر نامی از آنها اکتفا می‌کنیم، دانسته فرض می‌شود:

مجموعه‌ی مرجع (X)، مجموعه‌ی تهی (ϕ)، مفهوم عضویت ($\in$)، رابطه‌ی شمول ($\subset$)، عملگرهای اجتماع ($\cup$)، اشتراک ($\cap$)، تفاضل ($-$)، تفاضل متقارن (Δ) و متمم (^{c}).

فرض کنیم X مجموعه‌ی مرجع و $A \subset X$. در این صورت مجموعه‌ی توانی A چنین تعریف می‌شود:

۱.۲.۱ تعریف. مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A را مجموعه‌ی توانی A خوانده و آن را با $\mathcal{P}(A)$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، اگر $A = \{۱, ۲\}$، آن‌گاه $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{۱\}, \{۲\}, A\}$.

با تعریف تابع $f : A \longrightarrow B$ آشنا هستیم.

۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. اگر $E \subset A$ آن‌گاه $f(E) = \{f(a) \in B : a \in E\}$ را تصویر E تحت تابع f می‌نامیم. می‌دانیم $f(E) \subset B$. اگر $E \subset B$ آن‌گاه $f^{-۱}(E) = \{a \in A : f(a) \in E\}$ را تصویر معکوس E تحت تابع f می‌نامیم.

می‌دانیم $f^{-۱}(E) \subset A$. اغلب به جای $f^{-۱}(\{y\})$ می‌نویسیم $f^{-۱}(y)$.

۳.۲.۱ مثال. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = [x]$ باشد. در این صورت

$$E = [۱, ۲) \Longrightarrow f(E) = \{۱\}, \qquad f^{-۱}(E) = [۱, ۲) = f^{-۱}(۱).$$

$$E = [۱, ۲] \Longrightarrow f(E) = \{۱, ۲\}, \qquad f^{-۱}(E) = [۱, ۳) = f^{-۱}(\{۱, ۲\}).$$

۴.۲.۱ توجه. با آشنایی به تعریف و شرط وجود تابع معکوس، دقت می‌کنیم تصویر معکوس هر مجموعه تحت هر تابعی موجود است، ولی این به معنای وجود تابع معکوس نیست.

۵.۲.۱ تعریف. الف) تابع $f : A \longrightarrow B$ را پوششی یا بروگوییم هرگاه $B = f(A)$.

ب) تابع $f : A \longrightarrow B$ را یک‌به‌یک گوییم هرگاه از $f(a) = f(b)$ نتیجه شود $a = b$.

پ) تابع $f : A \longrightarrow B$ را تناظر یک‌به‌یک بین A و B گوییم هرگاه f پوششی و یک‌به‌یک باشد. در این صورت می‌گوییم مجموعه‌های A و B همعدد هستند.

ت) دو تابع $f : A \longrightarrow B$ و $g : C \longrightarrow D$ را برابر گوییم هرگاه $A = C$ و به‌ازای هر $a \in A$، داشته باشیم $f(a) = g(a)$.

۶.۲.۱ مثال. فرض کنیم f تابعی باشد که بر $[\circ, \text{۱}]$ دارای می‌نیمم و ماکسیمم باشد. همچنین فرض کنیم، $g(\alpha) = \min_{\alpha \le x \le \text{۱}} f(x)$ و $h(\alpha) = \max_{\alpha \le x \le \text{۱}} f(x)$ دو تابع بر $[\circ, \text{۱}]$ باشند. نشان می‌دهیم $-h(\alpha) = \min_{\alpha \le x \le \text{۱}} -f(x)$. از آن‌جا که به‌ازای هر $A \subset X$، $-\sup A = \inf -A$، لذا برای $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$ دلخواه،

$$
\begin{aligned}
-\max_{\alpha \le x \le \text{۱}} f(x) &= -\max\{f(x) : \alpha \le x \le \text{۱}\} \\
&= \min\{-f(x) : \alpha \le x \le \text{۱}\} = \min_{\alpha \le x \le \text{۱}} -f(x).
\end{aligned}
$$

۷.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و ناتهی، و $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که در اصول زیر صدق می‌کند:

الف) به‌ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \ge \circ$،

ب) $d(x,y) = \circ$ اگر و تنها اگر $x = y$،

پ) به‌ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$،

ت) به‌ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (نابرابری مثلث).

در این صورت زوج (X, d) را فضای متریک، تابع d را متر در X و $d(x,y)$ را فاصله‌ی x و y در این فضای متریک می‌نامیم.

۸.۲.۱ مثال. تابع $d(x,y) = |x - y|$ در $\mathbb{R}$ یک متر تعریف می‌کند. با این متر، $(\mathbb{R}, d)$ را فضای متریک معمولی $\mathbb{R}$ می‌نامیم.

با مفهوم همگرایی دنباله‌ها آشنا هستیم. حال تعریف زیر را می‌آوریم.

۹.۲.۱ تعریف. تابع $f : A \longrightarrow B$ را در نقطه‌ی $x_\circ \in A$ پیوسته گوییم در صورتی که به‌ازای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در A که به $x_\circ$ همگراست، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ در B به $f(x_\circ)$ همگرا باشد. اگر f در هر نقطه‌ی $S \subset A$ پیوسته باشد، آنگاه f را بر S پیوسته می‌گوییم.

تعریف ۹.۲.۱ با تعریفی که در زیر می‌آید معادل است.

۱۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (A, d) و (B, d') دو فضای متریک و $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. در این صورت f در نقطه‌ی $x_\circ \in A$ پیوسته است هرگاه

$$\forall \varepsilon > \circ \ \exists \delta > \circ; \ \forall x \ (d(x, x_\circ) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_\circ)) < \varepsilon).$$

توجه می‌کنیم دو تعریف اخیر از پیوستگی تابع، ایجاب می‌کند که متر در اختیار داشته باشیم. در حالت خاص اگر $A, B \subset \mathbb{R}$، آنگاه $f : A \longrightarrow B$ در $x_\circ \in A$ پیوسته است هرگاه

$$\forall \varepsilon > \circ \ \exists \delta > \circ; \ \forall x \ (|x - x_\circ| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon)$$

و در بیانی دیگر، $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$.

با مجموعه‌های باز و بسته در فضاهای متریک آشنا هستیم. قضیه‌ی زیر بسیار مفید است.

۱۱.۲.۱ قضیه. در فضای متریک (X, d) داریم:

الف) X و ϕ هم بازاند و هم بسته.

ب) اجتماع دلخواهی از مجموعه‌های باز، باز است.

پ) اشتراک دلخواهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

ت) اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

ث) اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

۱۲.۲.۱ قضیه. فرض کنیم (A, d) و (B, d') دو فضای متریک و $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوسته است اگر و فقط اگر تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز (بسته) در B، مجموعه‌ای باز (بسته) در A باشد.

با علم به تعریف فشردگی، قضایای مفید زیر را داریم.

۱۳.۲.۱ قضیه. هر زیرمجموعه‌ی بسته در فضای متریک فشرده، فشرده است.

۱۴.۲.۱ قضیه. مجموعه‌ی E در فضای $\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و فقط اگر E بسته و کراندار باشد.

توجه می‌کنیم در یک فضای متریک دلخواه، هر مجموعه‌ی فشرده، بسته و کراندار است ولی مجموعه‌ی بسته و کراندار لزوماً فشرده نیست. برای نمونه، بازه‌ی $(۰, ۱)$ نسبت به زیرفضای متریک معمولی $(۰, ۱)$ از $\mathbb{R}$، بسته است. از طرفی $(۰, ۱)$ کراندار است. اما چون پوشش باز $\{(\frac{۱}{n}, ۱) : n \in \mathbb{N}\}$ زیرپوشش متناهی ندارد، در این فضا مجموعه‌ی بسته و کراندار $(۰, ۱)$ فشرده نیست.

۱۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و ناتهی باشد. خانواده‌ی τ از زیرمجموعه‌های X را توپولوژی روی X می‌گوییم هرگاه:

الف) $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$،

ب) τ تحت اجتماع دلخواه از اعضای خود بسته باشد،

پ) τ تحت اشتراک متناهی از اعضای خود بسته باشد.

در این صورت اگر $A \in \tau$، می‌گوییم A مجموعه‌ای باز است. زوج (X, τ) را فضای توپولوژیک می‌گوییم.

۱۶.۲.۱ توجه. هر فضای متریک، یک فضای توپولوژیک است. مجموعه‌های باز این فضا، همان مجموعه‌های باز تعریف شده در فضای متریک است. $\mathbb{R}$ با مجموعه‌های باز، یک فضای توپولوژیک است که آن را توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ می‌نامیم.

۱۷.۲.۱ تعریف. فرض کنیم f تابعی حقیقی ـ مقدار بر یک فضای توپولوژیک باشد. f نیم‌پیوسته‌ی بالایی خوانده می‌شود اگر به‌ازای هر α، $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ بسته باشد. (یا به طور معادل،

$\{x : f(x) < \alpha\}$ برای هر α باز باشد.) f نیم‌پیوسته‌ی پایینی خوانده می‌شود اگر به‌ازای هر α، $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ بسته باشد. (یا به طور معادل، $\{x : f(x) > \alpha\}$ برای هر α باز باشد.)

به طور معادل، تعریف زیر را برای توابع نیم‌پیوسته‌ی بالایی و پایینی تعریف شده بر $\mathbb{R}$ داریم.

۱۸.۲.۱ تعریف. f در y نیم‌پیوسته‌ی بالایی است اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0; \ \forall x \ (|x-y| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(y) + \varepsilon)$$

و f در y نیم‌پیوسته‌ی پایینی است اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0; \ \forall x \ (|x-y| < \delta \Longrightarrow f(x) > f(y) - \varepsilon).$$

قضیه‌ی زیر، نتیجه‌ی مستقیم تعریف توابع نیم‌پیوسته‌ی بالایی و پایینی است.

۱۹.۲.۱ قضیه. الف) تابع حقیقی ـ مقدار f پیوسته است اگر و فقط اگر هم نیم‌پیوسته‌ی بالایی و هم نیم‌پیوسته‌ی پایینی باشد.

ب) تابع f نیم‌پیوسته‌ی بالایی (پایینی) است اگر و فقط اگر $-f$ تابعی نیم‌پیوسته‌ی پایینی (بالایی) باشد. (از اینجا نتیجه می‌شود اگر f پیوسته باشد، $-f$ نیز مانند f هم نیم‌پیوسته‌ی بالایی و هم نیم‌پیوسته‌ی پایینی است.)

پ) تابع نشانگر مجموعه‌ی باز، نیم‌پیوسته‌ی پایینی و تابع نشانگر مجموعه‌ی بسته، نیم‌پیوسته‌ی بالایی است.

ت) سوپریموم هر گردایه از توابع نیم‌پیوسته‌ی پایینی، نیم‌پیوسته‌ی پایینی و اینفیموم هر گردایه از توابع نیم‌پیوسته‌ی بالایی، نیم‌پیوسته‌ی بالایی است.

۲۰.۲.۱ قضیه. فرض کنیم فضای توپولوژیک X، فشرده باشد. اگر f تابعی نیم‌پیوسته‌ی بالایی بر X باشد، آن‌گاه f ماکسیمم خود را بر X می‌گیرد. یعنی $x_0 \in X$ای وجود دارد که برای هر $x \in X$، $f(x_0) \leq f(x)$. اگر f تابعی نیم‌پیوسته‌ی پایینی بر X باشد، آن‌گاه f می‌نیمم خود را بر X

می‌گیرد. یعنی $x_\circ$ای در X هست که برای هر $x \in X$، $f(x) \geq f(x_\circ)$. (چون یک تابع پیوسته هم نیم‌پیوسته‌ی بالایی و هم نیم‌پیوسته‌ی پایینی است، با توجه به این قضیه، ماکسیمم و می‌نیمم خود را بر مجموعه‌ی فشرده می‌گیرد.)

برهان. فرض کنیم f تابعی نیم‌پیوسته‌ی پایینی بر X باشد. به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم:

$$G_a = \{x \in X : f(x) > a\}$$

در این صورت G_a در X باز است و $X = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} G_a$. چون X فشرده است، خانواده‌ی متناهی $\{G_{a_1}, \ldots, G_{a_n}\}$ از $\{G_a : a \in \mathbb{R}\}$ موجود است به طوری که $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_i}$. قرار می‌دهیم $a_\circ = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، داریم $\forall x \in X \quad f(x) > a_\circ$. یعنی f از پایین کراندار است. لذا عدد حقیقی b وجود دارد که $b = \inf\{f(x) : x \in X\}$. باید نشان دهیم $\exists x_\circ \in S;\ f(x_\circ) = b$. فرض کنیم $\forall x \in X \quad f(x) > b$. لذا $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) > b + \frac{1}{n}\}$. چون X فشرده است، داریم

$$X = \bigcup_{i=1}^{m}\{x : f(x) > b + \frac{1}{n_i}\}.$$

قرار می‌دهیم: $b' = \min\{b + \frac{1}{n_1}, b + \frac{1}{n_2}, \ldots, b + \frac{1}{n_m}\}$. لذا

$$\forall x \in X, \qquad f(x) > b'$$

بنابراین

$$b = \inf\{f(x) : x \in X\} \geq b' > b$$

که تناقض است. پس $\exists x_\circ \in S;\ f(x_\circ) = b$. برهان برای تابع نیم‌پیوسته‌ی بالایی f، به طور مشابه انجام می‌شود.□

۳.۱ مقدماتی از آنالیز حقیقی

۱.۳.۱ تعریف. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ را σـ میدان گوییم هرگاه

الف) $\mathcal{A}$ تحت عمل متمم‌گیری بسته باشد. یعنی، اگر $A \in \mathcal{A}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{A}$.

ب) $\mathcal{A}$ تحت اجتماع شمارا بسته باشد. یعنی، اگر $A_i \in \mathcal{A}\ (i = ۱, ۲, \ldots)$، آن‌گاه $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$.
این اجتماع می‌تواند متناهی و یا نامتناهی باشد ولی باید شمارا باشد.

از تعریف بالا نتیجه می‌شود:

الف) اگر $A_i \in \mathcal{A}\ (i = ۱, ۲, \ldots)$، آن‌گاه $\cap_i A_i \in \mathcal{A}$.

ب) اگر $A, B \in \mathcal{A}$، آن‌گاه $A - B \in \mathcal{A}$.

۲.۳.۱ تعریف. اگر X مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{A}$، σـ میدانی از زیرمجموعه‌های X باشد، زوج $(X, \mathcal{A})$ را فضای اندازه‌پذیر می‌گوییم. اگر $A \in \mathcal{A}$، می‌گوییم A نسبت به $\mathcal{A}$ اندازه‌پذیر است.

۳.۳.۱ توجه. ϕ و X نسبت به هر σـ میدانی (به جز σـ میدان ϕ) اندازه‌پذیراند. همچنین اجتماع شمارا و اشتراک شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است. متمم هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است.

۴.۳.۱ تعریف. σـ میدان تولید شده به وسیله‌ی مجموعه‌های باز، یعنی کوچکترین σـ میدان شامل همه‌ی مجموعه‌های باز را σـ میدان بورل[1] می‌نامیم و آن را با $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم. هر عضو این مجموعه را مجموعه‌ی بورل می‌گوییم.

به عنوان مثال، مجموعه‌های باز و بسته در هر فضای توپولوژیک، مجموعه‌های بورل هستند.

۵.۳.۱ تعریف. هر تابعی که روی مجموعه‌ها تعریف شود، تابع مجموعه‌ای می‌گوییم. یعنی f به گونه‌ای باشد که $D_f \subset \mathcal{P}(X)$. ($D_f$ حوزه تعریف f است.)

۶.۳.۱ تعریف. هر تابعی که مقادیر آن مجموعه‌ها باشند، تابع مجموعه ـ مقدار می‌گوییم. یعنی f به گونه‌ای باشد که $R_f \subset \mathcal{P}(X)$. ($R_f$ حوزه مقادیر f است.)

1) Borel

۷.۳.۱ تعریف. فرض کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. در این صورت $m : \mathcal{A} \longrightarrow [\circ, \infty]$ را یک اندازه روی $\mathcal{A}$ نامیم هرگاه به‌ازای هر دنباله (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های اندازه‌پذیر و دوبه‌دو جدا از هم مانند $A_۱$، $A_۲$، ... داشته باشیم $m(\cup_i A_i) = \sum_i m(A_i)$. (به این ویژگی، ویژگی جمعی می‌گوییم.)

۸.۳.۱ توجه. اندازه $m : \mathcal{A} \longrightarrow [\circ, \infty]$، تابعی مجموعه‌ای با ویژگی جمعی است. می‌دانیم، اندازه احتمال P، اندازه‌ای است که $P(X) = ۱$.

۹.۳.۱ تعریف. اگر m اندازه‌ای روی $\mathcal{A}$ از σ- میدانهای X باشد، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, m)$ را فضای اندازه می‌گوییم. به ویژه، $(X, \mathcal{A}, P)$ فضای احتمال نامیده می‌شود.

۱۰.۳.۱ تعریف. تابع مجموعه‌ای $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [\circ, \infty]$ با ضابطه‌ی

$$m^*(A) = \inf_{A \subset UI_n} \sum l(I_n), \qquad A \subset \mathbb{R}$$

را اندازه خارجی A می‌نامیم. در این رابطه، I_nها بازه‌هایی هستند که اجتماع آنها A را می‌پوشاند. $l(I_n)$ طول بازه‌ی I_n است. از آن‌جا که $\mathbb{R}$ به صورت بازه است و $A \subset \mathbb{R}$، $\inf$ بالا موجود است.

اندازه خارجی m^* دارای ویژگیهای زیر است:

الف) به‌ازای هر $A \subset \mathbb{R}$، $m^*(A) \geq \circ$،

ب) $m^*(\phi) = \circ$،

پ) اگر $A \subset B$، آن‌گاه $m^*(A) \leq m^*(B)$،

ت) m^* تحت انتقال پایاست، یعنی به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $m^*(A + x) = m^*(A)$،

ث) اگر A مجموعه‌ای شمارا باشد، $m^*(A) = \circ$،

ج) به‌ازای هر بازه‌ی I، $m^*(I) = l(I)$،

چ) m^* ویژگی زیرجمعی دارد: $m^*(\cup_i A_i) \leq \sum_i m^*(A_i)$. همچنین m^* ویژگی جمعی ندارد. یعنی m^* اندازه نیست.