دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

وجود جواب سیستم‌های معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری

استاد راهنما

دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور

دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام

پژوهشگر

واحد نیرومند

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف در نیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدرم، مادرم

و

برادرانم

بنام خدا

و مَن لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که علم و معرفت را از آن انسان قرار داد و او را شایسته تفکر و اندیشیدن در بین موجودات جهان انتخاب نمود و سپاس خداوند یکتایی را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش عطا فرمود.

امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم. بی تردید بدون الطاف بی شائبه خداوند متعال قادر به اتمام این پایان‌نامه نبودم. همچنین شایسته است از تمام کسانی که در تدوین و جمع‌آوری این پایان‌نامه مرا یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر نمایم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای ارجمندم، خانم دکتر**فریبا بهرامی**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که زحمت راهنمایی و تدوین پایان‌نامه را متحمل شده و همواره مرا قوت قلب و اعتماد به نفس بخشیدند که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر**علی‌اصغر جدیری اکبرفام** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر **صداقت شهمراد** که همواره مدیون راهنمایی‌های علمی ایشان بوده و خواهم بود، بخاطر زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه کمال تشکر و امتنان را دارم.

در پایان از خانواده عزیزم که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

واحد نیرومند
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: نیرومند نام: واحد

عنوان: وجود جواب سیستم‌های معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری

استاد راهنما : دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور : دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۶

کلید واژه‌ها: انتگرال کسری، مشتق کسری، معادلات دیفرانسل جزئی کسری

چکیده

در این پایان‌نامه وجود و یکتایی جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی از مرتبه کسری را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا مسئله خطی را در نظر گرفته و نمایشی برای جواب به دست آورده و در نهایت این نمایش را برای دستگاه غیرخطی اعمال کرده و با استفاده از روش تکرار، وجود و یکتایی جواب را در فضای مناسب اثبات می‌کنیم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

مقدمه

محاسبات کسری، کار با کسرها نمی‌باشد بلکه محاسبات کسری به انتگرال و دیفرانسیل از مرتبه دلخواه اطلاق می‌شود. در واقع محاسبات کسری تعمیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه صحیح به یک مرتبه دلخواه است. نخست، ریاضیدان‌ها در گسترش محاسبات کسری تلاش می‌کردند. بعدها وقتی مشتقات و انتگرال‌های مرتبه دلخواه را به دست آوردند، واژه حساب دیفرانسیل و انتگرال از یک مرتبه دلخواه را به جای محاسبات کسری جایگزین کردند. محاسبات کسری با اینکه از لحاظ پایه‌ای یک موضوع قدیمی بوده و پیشینه آن به حدود سیصد سال قبل برمی‌گردد (۱۶۹۵)، اما تا چند دهه اخیر به دلیل عدم برقراری ارتباط با فیزیک، یا به بیان دیگر نبود مفاهیم فیزیکی و مسائل کاربردی رشد چندانی نکرده، و تنها از لحاظ تئوری توسعه داده شده و فقط قابل توجه ریاضیدانان بود. اما در چند دهه اخیر این موضوع رشد چشمگیری داشته است. مشتق کسری یک ابزار قدرتمند برای شناسایی خواص و ذرات مواد می‌باشد. مزیت مشتق کسری در مدل‌بندی مکانیکی و الکتریکی مواد آشکار می‌شود. بسیاری از پدیدهای طبیعی مانند رشد جمعیت و ترافیک با استفاده از محاسبات کسری مدل‌بندی شده است. همچنین کاربرد مهم و اساسی مشتق و انتگرال کسری را می‌توان در نظریه کنترل سیستم‌های دینامیکی مشاهده نمود، در صورتی که سیستم کنترل شده و کنترل کننده با یک معادله دیفرانسیل کسری شرح داده شود. حتی امروزه می‌توان کاربرد این موضوع را در علوم پزشکی نیز مشاهده نمود.
محاسبات کسری شاخه‌ای کهن با قدمتی بیش از سه قرن، از حساب دیفرانسیل و انتگرال است که ایده اولیه آن را منتسب به هوپیتال[1] می‌دانند. با توجه به جذابیت این شاخه از ریاضیات و کاربردهای آن در فیزیک و علوم مهندسی، موضوع محاسبات کسری بطور مستقیم و غیرمستقیم، مورد توجه ریاضیدانان

[1] L'Hopital

بزرگی مانند اویلر[۲]، لاپلاس[۳]، فوریه[۴]، لاکروا[۵]، آبل[۶]، ریمان[۷] و لیوویل[۸] گردید و در این مدت، توسیع‌های متفاوتی برای $\frac{d^n}{dx^n}$ در حالت $n \notin \mathbb{N}$، ارائه گردید که در بین آنها تعاریف ریمان-لیوویل و کاپوتو مورد توجه بیشتری واقع شدند. برای اطلاعات بیشتر در ارتباط با محاسبات کسری و کاربردهای آن می‌توانید منابع [۱۹، ۶، ۱۶، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵] را مشاهده فرمایید.

مدل‌بندی ریاضی بسیاری از مسائل فیزیکی به صورتی کاملاً دقیق منجر به معادلات دیفرانسیل کسری جزئی یا معمولی می‌شود. بنابراین اثبات قضایای مربوط به وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل کسری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این زمینه نیز کارهای ارزشمند زیادی صورت گرفته است. البسام[۹] در [۳] به اثبات وجود و یکتایی جواب مسئله مقدار اولیه کسری

$$(D_a^\alpha y)(x) = f[x, y(x)], \quad (\alpha > 0,\ x > a,\ m = [\alpha] + 1), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a^+} (D_a^{\alpha-k} y)(x) = b_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1), \quad \lim_{x\to a^+} (I_a^{m-\alpha} y)(x) = b_m \tag{2}$$

پرداخته است. رودینو[۱۰] و دلبسکو[۱۱] در [۱۷] به ارائه قضایای وجود و یکتایی مسئله (۲)-(۱) با استفاده از قضیه نقطه ثابت باناخ پرداختند. نویسندگان دایتهِلم[۱۲] و فورد[۱۳] در [۵] نیز با دیدی متفاوت به همین مسئله، با استفاده از قضیه نقطه ثابت ویسنگر[۱۴] قضایای وجود و یکتایی جواب را برای مسئله مورد نظر چنان بیان می‌کنند که علاوه بر اثبات وجود و یکتایی جواب، ساختاری کلی از جواب مسئله را نیز بتوانند ارائه دهند. روش جواب‌های بالایی و پایینی نیز یک روش ساختاری جواب برای اثبات وجود و یکتایی

[۲] Euler

[۳] Laplace

[۴] Fourier

[۵] Lacroix

[۶] Abel

[۷] Riemann

[۸] Liouville

[۹] Al-Bassam

[۱۰] Rodino

[۱۱] Delbosco

[۱۲] Diethelm

[۱۳] Ford

[۱۴] Weissinger

مسئله (۲)-(۱) است که در [۲۴] توسط ژانگ[۱۵] بیان شده است. جرباشیان[۱۶] و نرسسیان[۱۷] در [۷] به مطالعه معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه کسری پرداخته‌اند. همچنین [۲] منبع مناسبی برای معرفی نتایج به دست آمده در دهه‌های اخیر برای وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار مرزی کسری می‌باشد که توسط آگاروال[۱۸] و همکاران به چاپ رسیده است.

معادلات دیفرانسیل جزئی کسری نیز به دلیل کاربرد آنها در مدل‌بندی مسائل فیزیکی از اهمیت ویژه‌ای برخودار هستند. روش‌های تحلیلی زیادی برای اثبات وجود و یکتایی جواب برای این نوع مسائل ارائه نشده است. اکثر پژوهشگران روش‌های ساختاری را برای اثبات وجود جواب این دسته از معادلات با استفاده از تبدیلات لاپلاس، فوریه و یا ترکیبی از این عملگرها ارائه داده‌اند. آتاناکوویچ[۱۹] و استانکوویچ[۲۰] در [۴] و نیز استانکوویچ در [۲۱] با بهره‌گیری از تبدیل لاپلاس به حل سیستم معادلات دیفرانسیل کسری جزئی پرداخته‌اند. فورد و همکاران [۸] با استفاده از قضیه لکس-میلگرام یک روش تحلیلی برای اثبات وجود و یکتایی جواب برای معادله دیفرانسیل جزئی کسری ارائه داده‌اند. رودریقس[۲۱] در [۱۸] به مطالعه و بررسی جواب معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی کسری با استفاده از روش آنالیز گروه لی پرداخته است. اما با این حال، پژوهشگران به مطالعه زیادی برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل کسری جزئی نپرداخته‌اند. همچنین اثبات وجود و یکتایی جواب سیستم معادلات دیفرانسیل کسری جزئی توسط پژوهشگران زیادی مطالعه نشده است. حتی می‌توان گفت تا به حال، محاسبات کسری جزئی توابع بیش از یک متغیر، توسط پژوهشگران و نویسندگان خیلی زیاد کار نشده است.

این پایان‌نامه که براساس مقاله‌های [۲۳] و [۲۵] تنظیم شده است، به بررسی وجود و یکتایی جواب سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی کسری می‌پردازد و شامل سه فصل است. در فصل اول محاسبات کسری توابع یک متغیره و روابط بین آنها به طور دقیق معرفی می‌شود و در فصل دوم، مشتقات و انتگرال‌های جزئی و مرکبِ کسری توابع دو متغیره معرفی شده و روابط بین آنها دقیقاً بررسی می‌شود و در فصل آخر نیز با به کار بردن این روابط وجود و منحصر به فردی سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی کسری را بررسی می‌نمائیم.

[۱۵] Zhang

[۱۶] Dzhrbashyan

[۱۷] Dzhrbashyan

[۱۸] Agarwal

[۱۹] Atanachovic

[۲۰] Stankovic

[۲۱] Rodrigues

فصل ۱

محاسبات کسری توابع یک متغیره

مقدمه

در این فصل ابتدا مختصری از تاریخچه پیدایش محاسبات کسری بیان شده و تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز آورده شده است. سپس محاسبات کسری توابع یک متغیره و روابط بین آنها به طور دقیق معرفی شده است.

۱.۱ تاریخچه

تاریخ محاسبات کسری علی رغم ابهام جزئی‌اش، به سال‌های اولیه (۱۶۹۵) محاسبات برمی‌گردد. اکثر ریاضیدان‌ها با نماد ابداع شده توسط لایبنیتز[۱] که مشتق مرتبه nام یعنی $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ را بیان می‌کرد، آشنا هستند که در آن n یک عدد صحیح است. یک احتمال این بود که اگر n یک عدد کسری باشد آیا مشتق معنی دارد؟ در حقیقت هوپیتال همانند لایبنیتز به این فرضیه پی برده بود.

در سال ۱۶۹۵، هوپیتال از لایبنیتز این سوال را کرد که آیا ممکن است $n = \dfrac{1}{2}$ باشد؟ از این سوال محاسبات کسری متولد شد.

مهمترین پیشرفت‌ها در زمینه محاسبات کسری در سال ۱۸۳۲ به دست آمد، زمانی‌که لیوویل مطالعه محاسبات کسری را به طور جدی شروع کرد. او برای به دست آوردن تعریف خویش با یک انتگرال نامتناهی آغاز کرد:

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du, \qquad a > 0, \quad x > 0,$$

که با تغییر متغیر $xu = t$ رابطه

$$I = x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a),$$

یا

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I,$$

[۱] Liebnitz

را به دست آورد، سپس عملگر D^{v} را بر هر دو طرف رابطه بالا اثر داد و رابطه

$$D^{v}x^{-a}=\frac{(-1)^{v}}{\Gamma(a)}\int_{0}^{\infty}u^{a+v-1}e^{-xu}du,\qquad v>0,$$

را به دست آورد. در پایان لیوویل با انتگرال‌گیری، تعریف خویش را از مشتق کسری

$$D^{v}x^{-a}=\frac{(-1)^{v}\Gamma(a+v)}{\Gamma(a)}x^{-a-v},\qquad a>0,$$

به دست آورد، این تعریف برای توابعی به شکل $f(x)=x^{-a}$ به ازای $a>0$ محدود شده است. احتمالاً بیشترین پیشرفت‌ها در زمینه محاسبات کسری از نوشته‌های ریمان[۲] در طول دوران تحصیلش به دست آمد که در سال ۱۸۹۲ پس از مرگش به چاپ رسید. با بررسی تعمیم یک سری تیلور، وی رابطه

$$D^{-v}f(x)=\frac{1}{\Gamma(v)}\int_{a}^{x}(x-t)^{v-1}f(t)dt+\Psi(x),\tag{۱.۱}$$

را به دست آورد. به منظور رفع ابهام در حد پایین انتگرال‌گیری یعنی a، ریمان مناسب دید تا تابع متمم $\Psi(x)$ را به این تعریف اضافه کند. در حقیقت، امروزه تعریف انتگرال کسری همان فرمول (۱.۱)، بدون کاربرد تابع متمم است.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز

این بخش را به بیان و یادآوری مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد نیاز اختصاص داده‌ایم. هدف از این قسمت مقدماتی، بیان برخی نمادها، اصطلاحات و قضایایی است که در بخش‌های بعدی این فصل پایان‌نامه، مورد استفاده قرارخواهد گرفت.

فرض می‌کنیم که خواننده با توابع اندازه‌پذیر لبگ و انتگرال لبگ آشنا است. قبل از اینکه کار اصلی را شروع کنیم، ما باید برخی از فضاهای تابع را معرفی کنیم که با آن‌ها به بحث در مورد مسائل می‌پردازیم. از آنجا که این‌ها فضاهای کلاسیک هستند، اینجا ترجیحاً به اختصار آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

[۲] Riemann

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و $k \in \mathbb{N}$.

$$C([a,b]) := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \text{روی } [a,b] \text{ پیوسته است } f \Big\}$$
$$C^k([a,b]) := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \text{دارای مشتق } k \text{ام پیوسته است } f \Big\}$$
$$L^p([a,b]) := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \text{ و } \text{روی } [a,b] \text{ اندازه‌پذیر است } f \Big\}.$$

به عبارت دیگر، $L^p([a,b])$ فضای لبگ و هر عضو آن تابع لبگ انتگرال‌پذیر است.

قضیه ۲.۲.۱. *[۶] (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه صحیح)*
فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و نیز فرض کنید که $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابع تعریف شده به صورت زیر باشد

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt,$$

آنگاه، F مشتق پذیر است و

$$F'(x) = f(x).$$

حال نشان می‌دهیم که توابع بطور مطلق پیوسته دقیقاً آن دسته از توابع هستند که برای آنها قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال معتبر است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید J یک بازه روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. گوییم تابع $f : J \to \mathbb{R}$ بطور مطلق پیوسته بر روی J است اگر برای هر عدد مثبت ε، یک عدد مثبت δ وجود داشته باشد به طوری که هرگاه برای یک دنباله متناهی از زیر بازه‌های دو به دو مجزای J مانند (x_k, y_k) داشته باشیم:

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta$$

آنگاه

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

مجموعه فضای تمام توابع بطور مطلق پیوسته روی J را با نماد $AC(J)$ نشان می‌دهند.

گزاره ۴.۲.۱. $AC([a,b]) \subset C([a,b])$.

برهان. $C([a,b])$ فضای توابع پیوسته در $[a,b]$ است. از تعریف واضح است که توابع بطور مطلق پیوسته، پیوسته هستند. $\square$

تعاریف معادل با تعریف توابع بطور مطلق پیوسته

شرایط زیر برای یک تابع حقیقی مقدار f روی بازه فشرده $[a,b]$ باهم معادل هستند:

(۱) تابع f بطور مطلق پیوسته است. یعنی، $f \in AC([a,b])$.

(۲) تابع f تقریباً همه جا مشتق‌پذیر است و مشتق آن لبگ انتگرال‌پذیر است. یعنی، $f' \in L^1([a,b])$ و به ازای هر $x \in [a,b]$ داریم

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

(۳) تابع لبگ انتگرال‌پذیر g روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که برای تمام x در $[a,b]$ داریم

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

هم‌ارزی بین (۱) و (۳) به عنوان قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال لبگ شناخته شده است.

خواص توابع بطور مطلق پیوسته

- مجموع و تفاضل دو تابع بطور مطلق پیوسته، بطور مطلق پیوسته است. اگر این دو تابع روی یک بازه بسته کراندار تعریف شده باشند، آنگاه حاصل‌ضرب آنها نیز بطور مطلق پیوسته است.
- اگر یک تابع بطور مطلق پیوسته روی یک بازه بسته کراندار تعریف شده باشد و هیچ جا برابر صفر نباشد، انگاه معکوس آن بطور مطلق پیوسته است.

چند نکته

- هر تابع بطور مطلق پیوسته، بطور یکنواخت پیوسته وبنابراین پیوسته است.
- هر تابع پیوسته-لیپشیتز، بطور مطلق پیوسته است.
- اگر یک تابع در هر نقطه دارای مشتق کراندار باشد، بطور مطلق پیوسته است.

مثال‌ها

سه تابع زیر همه جا پیوسته هستند اما بطور مطلق پیوسته نیستند:

- تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} x^2 cos(\frac{1}{x^2}), & x\in(0,1] \text{ اگر } \\ 0, & x=0 \text{ اگر } \end{cases}$$

- تابع

$$f(x)=\begin{cases} x\,sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \text{ اگر } \\ 0, & x=0 \text{ اگر } \end{cases}$$

روی یک بازه متناهی شامل مبداء؛

- تابع $f(x)=x^2$ روی یک بازه بیکران.

در حالی که توابع زیر بطور مطلق پیوسته هستند:

- تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی بازه $[0,1]$ بطور مطلق پیوسته است.
- تابع $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sin(\frac{1}{x^2}), & x\neq 0 \text{ اگر } \\ 0, & x=0 \text{ اگر } \end{cases}$$

بطور مطلق پیوسته است.

- اگر $0<\alpha<1$، تابع $f(x)=(x-a)^\alpha$ روی هر بازه متناهی بطور مطلق پیوسته است.

تعریف ۵.۲.۱. مجموعه فضای تمام توابع حقیقی مقدار $f(x)$ که دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه $n-1$ روی J با $f^{(n-1)}(x)\in AC(J)$ هستند را با نماد $AC^n(J)$ نمایش می‌دهند که در آن $n=1,2,\ldots$ و J یک بازه روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ است. یعنی، تابع $g\in L^1([a,b])$ وجود دارد به طوری که

$$f^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(a)+\int_a^x g(t)dt.$$

در این حالت می‌گوییم g مشتق nام f است و می‌نویسیم $g = f^{(n)}$.
به عبارت دیگر

$$AC^n(J) = \{f : J \to \mathbb{R} \mid f^{(n-1)}(x) \in AC(J)\}.$$

روشن است که $AC^1(J) = AC(J)$ و لذا داریم

$$f(x) \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \qquad \int_a^b |\varphi(t)| < \infty. \tag{۲.۱}$$

بطور مشابه با (۲.۱) لم زیر را داریم

لم ۶.۲.۱. *[۱۹] فضای $AC^n([a,b])$ شامل آن دسته و تنها آن دسته از توابع $f(x)$ است که به صورت زیر قابل نمایش هستند:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-a)^{n-1}\varphi(t)dt, \tag{۳.۱}$$

که در آن $\varphi(t) \in L^1([a,b])$ و c_kها ثابت اختیاری اند.

توجه داشته باشید که در (۳.۱) داریم

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

۳.۱ توابع خاص در محاسبات کسری

دراین قسمت به‌طور خلاصه به معرفی برخی از توابع ویژه مانند توابع گاما، بتا، میتاگ–لفلر و تابع رایت، که در قسمت های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌پردازیم. برای مشاهده جزئیات بیشتر به [۱۶، ۱۳، ۱۵] مراجعه فرمایید.

۱.۳.۱ تابع گاما

بدون تردید یکی از توابع اساسی که در محاسبات کسری نقش مهمی دارد، تابع گامای اویلر یعنی $\Gamma(z)$ است، که به طور عام به آن $z-$فاکتوریل گویند. این تابع در واقع تابع فاکتوریل را تعمیم می‌دهد، به

طوری که در $z!$، z می‌تواند مقادیر غیرصحیح و حتی مقادیر مختلط را شامل شود. تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

رابطه انتگرالی فوق برای همه اعداد مختلط z، $Re(z) > 0$ همگراست.
همچنین تابع گاما را می‌توان به صورت حدی زیر نیز تعریف کرد:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \qquad Re(z) > 0.$$

برخی از خواص تابع گاما:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \Gamma(1) = 1\\
&2) \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\\
&3) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0\\
&4) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

همانطور که بیان شد، می‌توان از نمادگذاری زیر نیز برای نمایش تابع گاما استفاده کرد:

$$z! = \Gamma(z+1)$$

که در آن z لزوماً عدد صحیح مثبت نمی‌باشد.

۲.۳.۱ تابع بتا

تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

مثال ۱.۳.۱. اگر

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0$$