بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدایی که در این نزدیکیست

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

اُمگا اتوماتا

استاد راهنما:

دکتر محمد مهدی زاهدی

مؤلف:

مجتبی قاسمی

مهرماه ۱۳۸٦

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مجتبی قاسمی

استاد راهنما : دکترمحمدمهدی زاهدی

داور ۱ : دکتر عباس حسنخانی

داور ۲ : دکتر فرامرزصادقی

۱۳۸۷/۹/۲۳

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به

صبر پدرم

و

دعای مادرم

بی‌دلی در همه احوال خدا با او بود   او نمی‌دیدش و از دور خدایا می‌کرد

الهی، ادای شکر تو را هیچ زبان نیست و دریای فضل تو را هیچ کران نیست و سر حقیقت تو بر هیچ کس عیان نیست، هدایت کن بر ما رهی که بهتر از آن نیست.

با تقدیم خالصانه‌ترین سپاس‌ها به:
استاد عزیزم، آقای دکتر زاهدی که دانش، تلاش و حسن خلق ایشان در طول دوره‌ی تحصیلم و مهمتر از همه احساس مسئولیت، وجدان کاری و تواضعشان در دو سال اخیر، مورد تحسین بوده است.
آقایان دکتر حسنخانی و صادقی که با لطف و صد البته دقت، داوری این رساله را بر عهده داشته‌اند.
اساتید بزرگوار آقایان دکتر اسلامی، رجبعلی‌پور، قزل‌اياق، گرامی، ماشین‌چی، محسنی و نظری که همگی مجمع خوبی و لطف‌اند و در عین حال مهر و وفا.

و در نهایت و بسیار بیش از همه، خانواده‌ام که به یمن صبر و مهر و لطفشان، سنگ لعل شود و خاک، زر.

خداوند توفیق جبران دهد.

چکیده

در این رساله به بررسی اتوماتای حالت متناهی بر روی کلمات نامتناهی (ω- اتوماتا) می پردازیم و چندین شرط پرکاربرد از شرایط پذیرش روی آن را معرفی می کنیم. سپس نشان می دهیم که در حالت غیر قطعی، تمام شرایط معرفی شده با یکدیگر معادلند. در ادامه مثالی ارایه می دهیم که عدم کارآیی ساختار مجموعه ی توانی را در مورد قطعی سازی اتوماتای بوچی آشکار می کند. در پی رفع این نقیصه به ارایه ساختار سفراکه یکی از کلیدی ترین مباحث در نظریه ی ω- اتوماتا است می پردازیم و به وسیله آن اتوماتای بوچی غیر قطعی را به اتوماتای قطعی مولر یا رابین معادل تبدیل می کنیم. در نهایت به صورت مختصر تعریفی از ω- اتوماتای فازی ارایه می دهیم.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱. ۱ اتوماتا

تعریف ۱. ۱. ۱ (اتوماتای حالت متناهی قطعی) [۳]: به ۵ تایی $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,\delta,A,q_0)$ یک اتوماتای حالت متناهی قطعی گوییم هرگاه:

Q مجموعه ای متناهی و ناتهی باشد که آن را مجموعه ی حالتها گوییم.

Σ مجموعه ای متناهی و ناتهی باشد که مجموعه ی ورودی ها (الفبای ورودی) نامیده می شود.

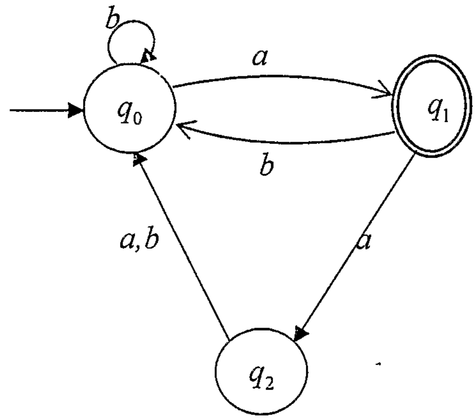
$\delta : Q\times\Sigma \to Q$ تابع انتقال حالت نامیده می شود (در واقع برای هر حالت و به ازای هر عضو ورودی، دقیقاً یک انتقال وجود دارد).

$A\subseteq Q$، که مجموعه ی حالتهای پذیرشی (نهایی) اتوماتا نامیده می شود.

$q_0\in Q$، که به آن حالت ابتدایی (اولیه) اتوماتا گوییم.

قرارداد: برای رسم یک اتوماتای حالت متناهی، هر حالتی را با یک دایره ی کوچک q نشان می دهیم. در این صورت اگر برای حالت q، ورودی a روی آن اثر کند و به حالت q' برود ، آن را با $q \xrightarrow{a} q'$ نشان می دهیم. همچنین تمام حالتهای پذیرشی را با دو دایره به صورت q نمایش می دهیم و نیز حالت ابتدایی را به صورت $\longrightarrow q_0$ نشان می دهیم.

مثال ۱. ۱. ۲: برای اتوماتای حالت متناهی قطعی زیر داریم:



$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{q_1\}$

$\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_0, b) = q_0$

$\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_1, b) = q_0$

$\delta(q_2, a) = q_0$, $\delta(q_2, b) = q_0$.

تعریف ۱. ۱. ۳ [10]: فرض کنید که Σ یک مجموعه ی غیر تهی و متناهی باشد. Σ^+ را مجموعه ی تمام رشته های متناهی روی Σ در نظر می گیریم. به عبارت دیگر:

$$\Sigma^+ = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \Sigma\ ,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

حال اگر عنصر تهی یعنی λ را به Σ^+ اضافه کنیم، داریم $\Sigma^* = \Sigma^+ \bigcup \{\lambda\}$. به هر عضو Σ^* یک کلمه (ی متناهی) و به λ کلمه ی تهی گوییم. همچنین طول یک کلمه مانند xعبارت است از تعداد حروفی که در کنار هم قرار می گیرند و x را می سازند که آن را با $|x|$ نشان می دهیم.

قرارداد: برای سهولت در نگارش، کلمه ی $a=(a_1,\dots,a_n)$ را به صورت $a=a_1\dots a_n$ نشان می دهیم. همچنین در برخی موارد به جای $\delta(q,a)$ از qa استفاده می کنیم.

تعریف ۱. ۱. ٤ [۳]: فرض کنید $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,\delta,A,q_0)$ یک اتوماتای حالت متناهی قطعی باشد و همچنین فرض کنید که $x=x_1\dots x_n$ یک کلمه روی Σ باشد. اگر حالتهای $q',q_1,\dots,q_n$ وجود داشته باشند به طوری که:

$i)\ q'=q_0\ ;$

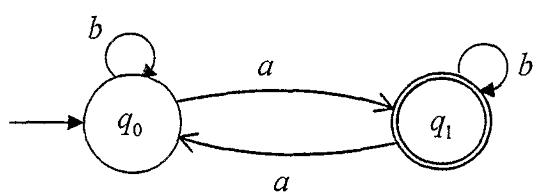
$ii)\ f(q_{i-1},x_i)=q_i \quad , \quad i=1,\dots,n\ ;$

$iii)\ q_n\in A$ (یعنی q_n یک حالت پذیرشی باشد.)

آنگاه گوییم کلمه ی x توسط اتوماتای $\mathbf{A}$ پذیرش شده است.

مثال ۱. ۱. ۵: در این مثال اتوماتایی ارائه می دهیم که در کلمات پذیرشی آن تعداد فردی a موجود باشد.

فرض کنید $\Sigma=\{a,b\}$. حال اتوماتای حالت متناهی قطعی زیر را در نظر بگیرید:



به وضوح برای هر $m,n\geq 0$ داریم $q_0b^nab^m=q_1$، که در آن $q_0x_1\dots x_n$ برای کلمه ی $x=x_1\dots x_n$ به معنای $(\dots(f(q_0,x_1),x_2),\dots,x_x)$ است.

با ادامه ی همین روند مشخص است که هر کلمه ی پذیرشی در اتوماتای بالا باید به صورت توانی از b، سپس a (در این مرحله q_1 را داریم)، باز هم توانی از b و یک a (در این مرحله q_0 را داریم) و باز هم توانی از b و برای برگشتن به حالت پذیرشی q_1، نیاز به ورود یک a داریم. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم چون q_1 حالت پذیرشی است، پس کلمات پذیرشی در این اتوماتا الزاماً باید تعداد فردی a را در خود داشته باشند.

تعریف ۱. ۱. ٦ [۳]: به ٥ تایی $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,\delta,A,q_0)$ یک اتوماتای حالت متناهی غیر قطعی گوییم که در آن:

Q مجموعه ای متناهی و ناتهی از حالتها است.

Σ مجموعه ی متناهی و ناتهی ورودی هاست.

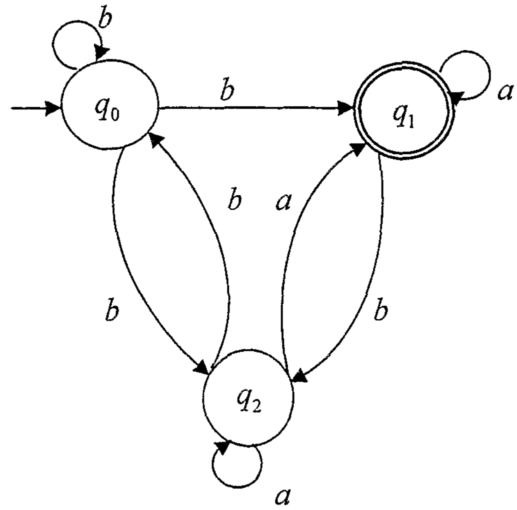
δ تابع انتقال حالت به صورت $\delta:Q\times\Sigma\to\mathbf{P}(Q)$ است.

A زیر مجموعه ای از Q است که مجموعه ی حالتهای پذیرشی نامیده می شود.

$q_0\in Q$ حالت ابتدایی است.

تذکر: درواقع تنها تفاوت بین اتوماتای حالت متناهی قطعی و غیر قطعی در تابع انتقال حالت آنهاست که در اتوماتای حالت متناهی غیر قطعی چون δ به زیر مجموعه ای از Q می رود، برای هر حالت و به ازای هر ورودی، ممکن است هیچ، یک چند انتقال وجود داشته باشد.

مثال ۱. ۱. ۷: نمودار اتوماتای حالت متناهی زیر را در نظر بگیرید.



داریم:

$$Q=\{q_0,q_1,q_2\} \quad , \quad \Sigma=\{a,b\} \quad , \quad A=\{q_1\}$$

$$\delta(q_0,a)=\phi \quad , \quad \delta(q_0,b)=\{q_0,q_1,q_2\}=Q$$

$$\delta(q_1,a)=\{q_1\} \quad , \quad \delta(q_1,b)=\{q_2\}$$

$$\delta(q_2,a)=\{q_1,q_2\} \quad , \quad \delta(q_2,b)=\{q_0\}.$$

همان طور که از تابع δ مشخص است، اتوماتای فوق غیر قطعی است.

تعریف ۱. ۱. ۸ [۳]: فرض کنیم که $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,\delta,A,q_0)$ یک اتوماتای حالت متناهی غیر قطعی باشد و $x=x_1\ldots x_n$ یک کلمه روی Σ باشد. اگر حالتهای $q',q_1,\ldots,q_n$ موجود باشند به طوری که:

$i)\ q'=q_0\ ;$

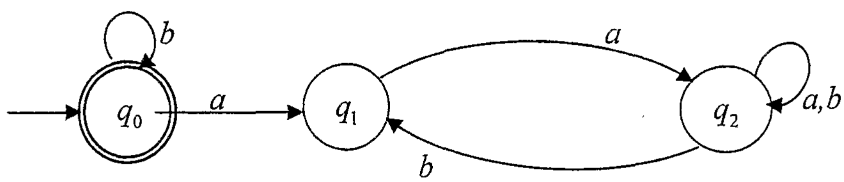
$ii)\ q_i\in\delta(q_{i-1},x_i) \quad , \quad i=1,\ldots,n\ ;$

$iii)\ q_n\in A$

آنگاه گوییم کلمه ی x توسط اتوماتای $\mathbf{A}$ پذیرش شده است.

قرارداد: مجموعه ی تمام کلمات پذیرش شده توسط اتوماتای حالت متناهی $\mathbf{A}$ را زبان اتوماتای $\mathbf{A}$ گوییم و با نماد $L(\mathbf{A})$ یا $AC(\mathbf{A})$ نشان می دهیم.

مثال ۱. ۱. ۹: اتوماتای حالت متناهی غیر قطعی زیر را در نظر بگیرید:

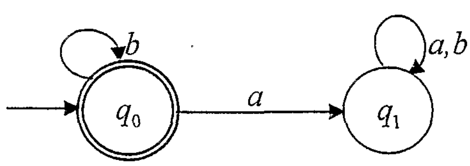


برای این اتوماتا داریم $AC(\mathbf{A})=\{b\}^*$ یا به عبارت دیگر $L(\mathbf{A})=\{b\}^*$.

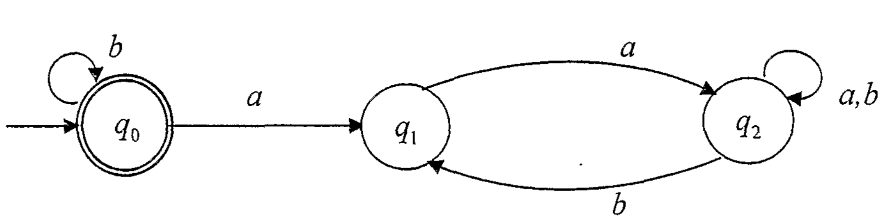
تعریف ۱. ۱. ۱۰: دو اتوماتای حالت متناهی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}'$ را معادل گوییم هرگاه:

$$AC(\mathbf{A})=AC(\mathbf{A}')\,.$$

مثال ۱. ۱. ۱۱: دو اتوماتای زیر معادل هستند.



$\mathbf{A}$



$\mathbf{A}'$

زیرا:

$$AC(\mathbf{A})=AC(\mathbf{A}')=\{b\}^*\,.$$

۱. ۲ ساختار مجموعه ی توانی

قضیه ی ۱. ۲. ۱ (ساختار مجموعه ی توانی): فرض کنید که $\mathbf{A}=(Q,\Sigma,\delta,A,s)$ یک اتوماتای حالت متناهی غیر قطعی باشد. همچنین فرض کنید که:

$i)\ Q'=\mathbf{P}(Q)\ ;$

$ii)\ \Sigma'=\Sigma\ ;$

$iii)\ s'=\{s\}\ ;$

$iv)\ A'=\{X\subseteq Q \mid X\cap A\neq Q\}\ ;$

$$v)\ \delta'(X,x)=\begin{cases}\phi & X=\phi\\ \bigcup\limits_{q\in X}\delta(q,x) & X\neq\phi\end{cases}.$$

آنگاه $\mathbf{A}'=(Q',\Sigma',\delta',A',s')$ یک اتوماتای حالت متناهی قطعی است که با اتوماتای $\mathbf{A}$ معادل است.

برهان: فرض کنید که $x\in AC(\mathbf{A})$، یعنی $x=x_1\dots x_n$ یک کلمه ی پذیرشی اتوماتای غیر قطعی $\mathbf{A}$ باشد. لذا حالتهای $q_0,q_1,\dots,q_n\in Q$ وجود دارند به طوری که $q_0=s$، $q_i\in\delta(q_{i-1},x_i)$ برای $i=1,\dots,n$ و $q_n\in A$.

ثابت می کنیم که حالتهای $q'_0,q'_1,\dots,q'_n\in Q'$ در اتوماتای حالت متناهی $\mathbf{A}'$ وجود دارند به طوری که $q'_0=\{s\}$، $\delta'(q'_{i-1},x_i)=q'_i$ برای $i=1,\dots,n$ و $q'_n\in A'$. برای این کار به روش بازگشتی q'_iها را برای $i=1,\dots,n$ می سازیم.

$$q'_1=\delta'(q'_0,x_1)=\delta'(\{s\},x_1)=\bigcup_{q\in\{s\}}\delta(q,x_1)=\delta(s,x_1)=\delta(q_0,x_1)$$

$$q_2' = \delta'(q_1', x_2) = \delta'\big(\delta(q_0, x_1), x_2\big) = \bigcup_{q \in \delta(q_0, x_1)} \delta(q, x_2)$$

با توجه به مطالب فوق می دانیم که:

$$q_1 \in \delta(q_0, x_1) = \delta(s, x_1) = q_1'$$

پس $q_1 \in q_1'$.

از آنجا که $\bigcup_{q \in \delta(q_0, x_1)} \delta(q, x_2) = q_2'$ و $q_1 \in \delta(q_0, x_1)$، پس $\delta(q_1, x_2) \subseteq q_2'$. همچنین چون $q_2 \in \delta(q_1, x_2)$، در نتیجه $q_2 \in q_2'$. به همین ترتیب:

$$q_3' = \delta'(q_2', x_3) \quad , \quad q_3 \in q_3'$$

$$\vdots$$

$$q_n' = \delta'(q_{n-1}', x_n) \quad , \quad q_n \in q_n'.$$

چون $q_n \in A$ و $q_n \in q_n'$، لذا $q_n' \cap A \neq \phi$ و در نتیجه $q_n' \in A'$. یعنی q_n' یک حالت پذیرشی اتوماتای $\mathbf{A}'$ است. بنابراین کلمه ی $x = x_1 \ldots x_n$ در $\mathbf{A}'$ پذیرش می شود.یعنی $x \in AC(\mathbf{A}')$، پس $AC(\mathbf{A}) \subseteq AC(\mathbf{A}')$.

حال به عکس فرض کنید $x = x_1 \ldots x_n$ یک کلمه ی پذیرشی در $\mathbf{A}'$ باشد. پس حالتهای $q_0', q_1', \ldots, q_n' \in Q'$ وجود دارند به طوری که $q_0' = \{s\}$، $\delta'(q_{i-1}', x_i) = q_i'$ برای $i = 1, \ldots, n$ و $q_n' \in A'$.

ثابت می کنیم که حالتهای $q_0, q_1, \ldots, q_n \in Q$ موجودند به طوی که $q_0 = s$، $q_i \in \delta(q_{i-1}, x_i)$ برای $i = 1, \ldots, n$ و $q_n \in A$.

چون $q'_n \in A'$ یک حالت پذیرشی $\mathbf{A}'$ است، بنا به تعریف یک حالت پذیرشی در یک اتوماتای حالت متناهی حاصل از یک اتوماتای غیر قطعی وجود دارد $q_n \in A$ که $q_n \in q'_n$. از طرفی می دانیم که $\bigcup_{q \in q'_{n-1}} \delta(q, x_n) = \delta'(q'_{n-1}, x_n) = q'_n$، در نتیجه $q_n \in \bigcup_{q \in q'_{n-1}} \delta(q, x_n)$. بنابراین وجود دارد $q_{n-1} \in Q$ به طوری که $q_{n-1} \in q'_{n-1}$ و $q_n \in \delta(q_{n-1}, x_n)$.

همچنین می دانیم که $\bigcup_{q \in q'_{n-2}} \delta(q, x_{n-1}) = \delta'(q'_{n-2}, x_{n-1}) = q'_{n-1}$ و چون $q_{n-1} \in q'_{n-1}$ پس وجود دارد $q_{n-2} \in Q$ به طوری که $q_{n-2} \in q'_{n-2}$ و $q_{n-1} \in \delta(q_{n-2}, x_{n-1})$. به همین ترتیب می توان $q_{n-3}, \ldots, q_1 \in Q$ یافت به طوری که:

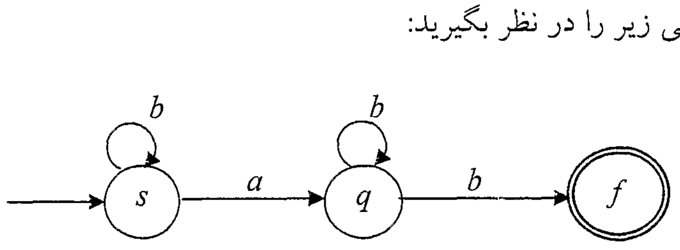
$$q_{n-3} \in q'_{n-3} \qquad , \qquad q_{n-2} \in \delta(q_{n-3}, x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$q_1 \in q'_1 \qquad , \qquad q_1 \in \delta(q_0, x_1) \ , \quad q_0 = s$$

لذا $x = x_1 \ldots x_n$ یک کلمه ی پذیرشی برای اتوماتای غیر قطعی A است و $x \in AC(\mathbf{A})$. پس $AC(\mathbf{A}') \subseteq AC(\mathbf{A})$ و در نتیجه $AC(\mathbf{A}) = AC(\mathbf{A}')$ و لذا دو اتوماتای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}'$ معادل یکدیگرند.

مثال ۱. ۲. ۲: اتوماتای غیر قطعی زیر را در نظر بگیرید:



در این اتوماتا $Q=\{s,q,f\}$، $\Sigma=\{a,b\}$، $A=\{f\}$ و s حالت ابتدایی است. حال با استفاده از ساختار مجموعه ی توانی اتوماتای حالت متناهی قطعی $\mathbf{A}'=(Q',\Sigma',\delta',A',s')$ را که با اتوماتای غیر قطعی فوق معادل است را بدست می آوریم.

$Q'=\mathbf{P}(Q)=\{\phi,\{s\},\{q\},\{f\},\{s,q\},\{s,f\},\{q,f\},\{s,q,f\}\}$

$\Sigma'=\Sigma=\{a,b\}$

$A'=\{X\subseteq Q|\ X\cap A\neq\phi\}=\{X\subseteq Q|X\cap\{f\}\neq\phi\}=\{\{f\},\{s,f\},\{f,q\},\{s,f,q\}\}$

$s'=\{s\}$.

$\delta'(\phi,a)=\phi \quad , \quad \delta'(\phi,b)=\phi$

$\delta'(\{s\},a)=\{q\} \quad , \quad \delta'(\{s\},b)=\{s\}$

$\delta'(\{q\},a)=\phi \quad , \quad \delta'(\{q\},b)=\{q,f\}$

$\delta'(\{f\},a)=\phi \quad , \quad \delta'(\{f\},b)=\phi$

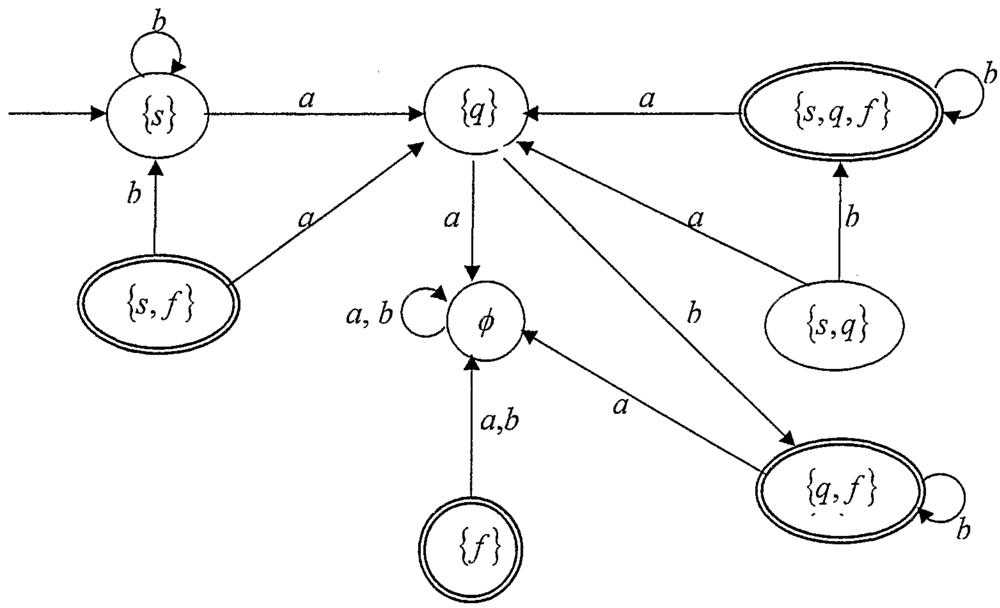
$\delta'(\{s,q\},a)=\{q\} \quad , \quad \delta'(\{s,q\},b)=\{s,q,f\}$

$\delta'(\{s,f\},a)=\{q\} \quad , \quad \delta'(\{s,f\},b)=\{s\}$

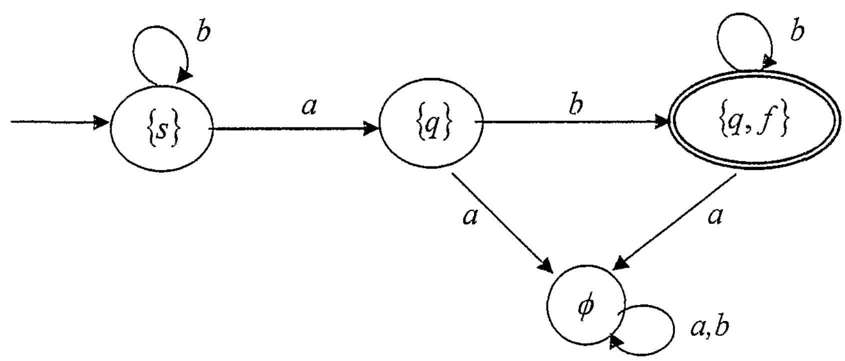
$\delta'(\{q,f\},a)=\phi \quad , \quad \delta'(\{q,f\},b)=\{q,f\}$

$\delta'(\{s,q,f\},a)=\{q\} \quad , \quad \delta'(\{s,q,f\},b)=\{s,q,f\}$

بنابراین برای اتوماتای $\mathbf{A}'$ نمودار زیر را داریم:



همان گونه که از نمودار پیدا است ما به حالتهای $\{s,q,f\}$، $\{s,q\}$، $\{s,f\}$ و $\{f\}$ توسط هیچ یالی دسترسی پیدا نمی کنیم. بنابراین کلمات پذیرشی اتوماتای فوق با کلمات پذیرشی اتوماتای زیر که از حذف حالتهای مذکور ایجاد می شود، یکی می باشد. پس در نهایت به اتوماتای حالت متناهی قطعی زیر می رسیم.



۱. ۳ اتوماتای فازی

تعریف ۱. ۳. ۱ [19]: یک زیر مجموعه ی فازی μ از X یک تابع به صورت $\mu : X \to [0,1]$ است.

قرارداد: اگر μ یک زیر مجموعه ی فازی از X باشد آنگاه برای هر $x \in X$، $\mu(x)$ به عنوان درجه ی عضویت x در μ در نظر گرفته می شود.

تعریف ۱. ۳. ۲ [19]: فرض کنید $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو زیر مجموعه ی فازی از X و $\{\widetilde{A}_i \mid i \in I\}$ خانواده ای از زیر مجموعه های فازی از X باشند. آنگاه برای هر $x \in X$ تعریف می کنیم:

$$i)\ (\widetilde{A} \cap \widetilde{B})(x) = \min\left(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(x)\right);$$

$$\bigcap_{i\in I} \widetilde{A}_i(x) = \inf_{i\in I} \widetilde{A}_i(x).$$

$$ii)\ (\widetilde{A} \cup \widetilde{B})(x) = \max\left(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(x)\right);$$

$$\bigcup_{i\in I} \widetilde{A}_i(x) = \sup_{i\in I} \widetilde{A}_i(x).$$

لم ۱. ۳. ۳ [۲]: فرض کنید برای هر $i \in I$، $\widetilde{A}_i$ و $\widetilde{B}_i$ زیر مجموعه های فازی از X باشند و $c \in [0,1]$. آنگاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$i)\ \inf_{i\in I} \min\left(\widetilde{A}_i(x), \widetilde{B}_i(x)\right) = \min\left(\inf_{i\in I} \widetilde{A}_i(x), \inf_{i\in I} \widetilde{B}_i(x)\right).$$

$$ii)\ \sup_{i\in I} \min\left(\widetilde{A}_i(x), c\right) = \min\left(\sup_{i\in I} \widetilde{A}_i(x), c\right).$$

تعریف ۱. ۳. ٤ [۱]: یک اتوماتای فازی **A** به صورت یک ۵ تایی $(Q, \Sigma, \mu, A, \delta)$ است که در شرایط زیر صدق می کند: