بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۲۶
دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

مباحثی در پایداری معادلات تابعی

استادان راهنما

دکتر حمید واعظی و دکتر یداله نژاد دهقان

استاد مشاور

دکتر عباس نجاتی

پژوهشگر

فریدون مرادلو

تیر ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سَرِ فکرتِ ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، وبه رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که **محمّد**(ص) بنده‌ی او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت **علی** (ع)

تقدیم به:

پسر عزیزم طاها

بنام خدا

و مَنْ لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استادان راهنمای خود، جناب آقایان دکتر حمید واعظی و دکتر یداله نژاد دهقان ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

از جناب آقای دکتر عباس نجاتی که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند وبه نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقایان دکتر محمد صال مصلحیان ، دکتر علی عبادیان، دکتر محمدرضا جبارزاده که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

فریدون مرادلو
۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: مرادلو	نام: فریدون

عنوان: مباحثی در پایداری معادلات تابعی

استادان راهنما: دکتر حمید واعظی و دکتر یداله نژاد دهقان

استاد مشاور : دکتر عباس نجاتی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز دانشگاه تبریز

دانشکده‌ی علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۱۲۱

کلید واژه‌ها: پایداری هایرز - اولام - راسیاس، نگاشت جمعی از نوع n - آپولونیوس، همریختی‌ها و اشتقاقها روی جبرهای C^*، نگاشت جمعی از نوع اویلر - لاگرانژ تعمیم‌یافته، حلقه‌های C^* - سه تائی، همریختی‌ها و اشتقاقها روی حلقه‌های C^* - سه تائی .

چکیده

هدف این رساله، تحقیقی روی پایداری معادلات تابعی می باشد. مطالعه معادلات تابعی دارای سابقه طولانی می باشد و تاکنون معادلات تابعی کوشی (جمعی) ، مربعی ، مکعبی و چارین در حالتهای گوناگون و در فضاهای متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته اند. تلفیق این نوع معادلات با یکدیگر و در نظر گرفتن معادلاتی که کوشی و مربعی یا کوشی و مربعی و مکعبی باشند نیز از کارهایی است که اخیراً انجام می شود. همچنین در نظر گرفتن فضاهای مختلف نظیر حلقه‌های C^* - سه تائی برای بررسی پایداری معادلات تابعی ، همریختی ها و اشتقاق‌ها مورد توجه قرار گرفته است. در این رساله معادلات تابعی جدیدی معرفی کرده و به حل معادلات معرفی شده خواهیم پرداخت. علاوه بر آن مسأله‌ی پایداری معادلات تابعی معرفی شده را نیز مورد بررسی قرار خواهیم داد. سرانجام پایداری همریختی‌ها و اشتقاق‌ها روی حلقه‌های C^* - سه‌تائی مورد مطالعه و بررسی قرار خواهد گرفت.

فهرست مطالب

مقـدمـه ۲

۱ پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی ۶

۱.۱ مفاهیم مقدماتی برای پایداری معادلات تابعی ۷

۲.۱ معادله تابعی کوشی ۸

۳.۱ معادله تابعی مربعی ۱۵

۴.۱ معادله تابعی مکعبی ۲۱

۵.۱ معادله تابعی چارین ۲۳

۶.۱ روش های پایداری معادلات تابعی ۲۴
۱.۶.۱ روش مستقیم ۲۴
۲.۶.۱ روش ساندویچ ۲۶
۳.۶.۱ روش نقطه‌ی ثابت ۲۸
۴.۶.۱ روش میانگین پایا ۳۲

۲ پایداری یک معادله تلفیقی ۳۷

۱.۲ فضای شبه باناخ ۳۸

۲.۲ معرفی و حل معادله‌ی تلفیقی ۴۰

۳.۲ پایداری هایرز- اولام - راسیاس معادله‌ی تلفیقی ۴۵
۱.۳.۲ پایداری معادله‌ی مربعی ۴۶
۲.۳.۲ پایداری معادله‌ی تابعی جمعی ۵۱
۳.۳.۲ پایداری معادله‌ی تابعی مکعبی ۵۸
۴.۳.۲ پایداری معادله‌ی تلفیقی جمعی، مربعی و مکعبی ۶۳

۳ قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت و پایداری هایرز - اولام - راسیاس ۷۰

۱.۳ قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت و پایداری همریختی‌ها بین جبرهای C^* ۷۴

۲.۳ قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت و پایداری اشتقاق‌ها روی جبرهای C^* ۸۴

۴ پایداری همریختی‌ها و اشتقاق‌ها روی حلقه‌های C^* - سه‌تایی ۸۷

۱.۴ پایداری هایرز - اولام - راسیاسِ معادله‌ی از نوع اویلر - لاگرانژ ۹۱

۲.۴ همریختی‌ها بین حلقه‌های C^* - سه‌تایی ۱۰۰

۳.۴ یکریختی‌ها بین حلقه‌های C^* - سه‌تایی یکانی ۱۰۳

۴.۴ اشتقاق‌ها روی حلقه‌های C^* - سه‌تایی ۱۰۸

منابع مورد استفاده ۱۱۲

واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۱۱۹

مقدمه

در سال ۱۹۴۰، اولام [۷۶] در یک سخنرانی در دانشگاه ویسکانسین در مورد تعدادی از مسایل مهم حل نشده بحث کرد که در بین آنها سؤال زیر در مورد پایداری همریختی ها به چشم می‌خورد:

فرض کنید G یک گروه و G' یک گروه متریک با متر $\rho(.,.)$ باشد و $\epsilon > 0$. آیا $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $f : G \to G'$ برای هر $x, y \in G$ در شرط $\rho(f(xy), f(x)f(y)) < \delta$ صدق کند آنگاه یک همریختی $h : G \to G'$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in G$ ، $\rho(f(x), h(x)) < \epsilon$ ؟

یک سال بعد هایرز [۲۰] در حالتی که G یک فضای نرمدار و G' یک فضای باناخ بود به سؤال اولام جواب داد. در سال ۱۹۵۰ آئوکی [۳] وجود عملگر جمعی منحصر بفرد را ثابت کرد و همچنین مدعی شد که وجود نگاشت خطی منحصر بفرد امکان‌پذیر نیست. مسأله اولام و جواب هایرز تا سال ۱۹۷۸ باقی ماند تا اینکه در این سال ت. م. راسیاس [۶۸] تعمیمی از قضیه هایرز بیان کرد که دراین تعمیم، تفاضل کوشی ، $f(x+y) - f(x) - f(y)$ ، بیکران بود. کرانی که ت. م. راسیاس برای تفاضل کوشی در نظر گرفت به صورت $\epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ بود که در آن

p عدد ثابتی است و $0 < p < 1$. در سال ۱۹۸۹ ج. راسیاس [۶۴] کران تفاضل کوشی را به صورت $c_2\|x_1\|^a\|x_2\|^b$ در نظر گرفت. در سال ۱۹۹۰ ت. م. راسیاس [۶۹] در بیست و هفتمین سمپوزیوم بین المللی معادلات تابعی سؤالی را به این صورت مطرح کرد که آیا می توان قضیه ت. م. راسیاس را برای $p \geq 1$ نیز ثابت کرد. یک سال بعد گاجدا [۱۷] جواب مثبتی به این سؤال در حالتی که $p > 1$ بود ، داد. همچنین به وسیله‌ی ت. م. راسیاس و شمرل [۷۲] و گاجدا [۱۷] ثابت شده است که قضیه از نوع راسیاس را برای حالت $p = 1$ نمی توان ثابت کرد.

در سال ۱۹۹۴، گاوروتا [۱۸] تعمیمی کلی تر از قضیه‌ی راسیاس را فراهم کرد که در آن کران تفاضل کوشی ، تابع‌کنترلی $\phi(x,y)$ بود. نوع کلی معادله‌ی کوشی معادله‌ی کوشی پکسیدر شده‌ی $f_1(x+y) = f_2(x) + f_3(y)$ است. در [۲۳، ۳۲] پایداری معادله‌ی پکسیدر شده (Pexider) مورد بررسی قرار گرفته است.

معادله‌ی تابعی $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ را معادله‌ی تابعی مربعی می‌نامند. هر جواب این معادله‌ی تابعی نگاشت مربعی نامیده می شود. بررسی پایداری هایرز – اولام – راسیاس برای معادله‌ی مربعی بوسیله اسکوف [۷۴] برای حالتی که f یک نگاشت مربعی از فضای نرمدار X بتوی فضای باناخ Y است انجام شده است. در [۵، ۱۰، ۱۲] تعمیم‌هایی از معادله‌ی مربعی و در [۲۶] معادله‌ی تابعی مربعی پکسیدر شده مورد بررسی قرار گرفته است.

معادله‌ی تابعی $f(2x+y) + f(2x-y) = 2f(x+y) + 2f(x-y) + 12f(x)$ را معادله‌ی تابعی مکعبی می نامند. در [۲۴] پایداری هایرز – اولام – راسیاس این معادله در سال ۲۰۰۲ و همچنین در [۵۱] معادله‌ی اویلر – لاگرانژ مکعبی بررسی شده است.

معادله‌ی تابعی دیگری که پایداری آن تاکنون بررسی شده است معادله‌ی تابعی چارین می‌باشد. معادله‌ی تابعی $f(2x+y) + f(2x-y) = 4f(x+y) + 4f(x-y) + 24f(x) - 6f(y)$ معادله‌ی تابعی چارین نامیده می‌شود. پایداری این معادله در سال ۲۰۰۵ در [۳۴] بررسی شده است.

اخیراً تلفیق این معادلات با یکدیگر و بررسی پایداری معادلاتی که کوشی و مربعی یا کوشی و مربعی و مکعبی باشند ، مورد توجه قرار گرفته است . در این زمینه به مراجع [۲۵، ۳۸، ۴۷] می‌توان اشاره نمود.

به طور کلی پایداری معادلات تابعی در فضاهای مختلف مورد توجه بوده است که در این زمینه می‌توان به عنوان نمونه به مراجع [۳۶، ۴۰، ۴۹، ۵۰، ۵۹] اشاره کرد. همچنین همریختی‌ها و مشتق‌ها و پایداری معادلات تابعی در فضاهائی که در علوم دیگر نظیر فیزیک ، کاربرد زیادی دارند نیز مورد توجه قرار گرفته است. یکی از این فضاها، جبرهای C^* – سه تایی می‌باشد. در [۵۲، ۵۶، ۶۰، ۶۲] مطالعاتی در زمینه‌ی پایداری معادلات تابعی در جبرهای C^* – سه تایی انجام شده است.

این رساله در چهار فصل تنظیم شده است؛ در فصل اوّل مفاهیم مقدماتی پایداری معادلات تابعی بیان می‌شود. در فصل دوّم پایداری یک معادله‌ی تابعی تلفیقی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوّم روش نقطه‌ی ثابت برای بررسی پایداری معادله‌ی تابعی جمعی از نوع n – آپولونیوس بکار گرفته شده است و در فصل چهارم با استفاده از یک معادله از نوع اویلر – لاگرانژ پایداری همریختی‌ها و اشتقاق‌ها را روی حلقه‌های C^* – سه تائی بررسی می کنیم.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

مقدمـــه

این فصل از رساله ، مروری بر منابع ذکر شده و بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصلهای آتی می‌باشد. بنابراین در ابتدا چهارچوب بحث را مشخص کرده و سپس مفاهیم مرتبط با بحث را تعریف می‌کنیم. مفاهیم و قضایای اولیه بدون اثبات بیان خواهند شد چرا که هدف یادآوری مفاهیمی است که بعداً به آنها نیاز خواهد شد.

بیشتر مطالب را به کتابهای [۱۳، ۲۱] ارجاع خواهیم داد. با وجود این مقدمه‌ای بر پایداری معادلات تابعی مفید خواهد بود.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی برای پایداری معادلات تابعی

در سالهای اخیر بررسی پایداری معادلات تابعی یکی از موضوعات به روز و مورد توجه بوده است و به دلیل کاربرد فراوان آن در بسیاری از علوم از جمله تئوری اطلاعات ، فیزیک ، تئوری اقتصاد و علوم اجتماعی و رفتاری ، بسیاری از ریاضیدانان به مطالعه و تحقیق در این زمینه گرایش پیدا کرده‌اند. همچنین در این زمینه چندین کتاب [۱۳، ۲۱] نوشته شده است که می تواند منبع مناسبی برای تحقیق و پژوهش باشند.

در این فصل به اختصار مطالبی را راجع به معادلات تابعی بیان می‌کنیم و سیر تحولات را در این زمینه مورد بررسی قرارمی دهیم . همچنین به بیان قضایای مهم و پایه ای مطرح شده در زمینه معادلات تابعی می پردازیم. همچنین روشهای پایداری معادلات تابعی را که تا کنون مورد استفاده قرار گرفته‌اند بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم S یک نیم گروه ، B یک فضای باناخ و $f : S \to B$ تابع باشد گوییم

معادله

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{۱.۱}$$

برای زوج (S,B) پایدار است هرگاه خاصیت زیر برقرار باشد:
برای هر $\epsilon > 0$، $\delta \geq 0$ ای وجود داشته باشد به طوری که اگر برای هر $x,y \in S$

$$\|f(x+y)-f(x)-f(x)\| \leq \delta, \qquad (x,y \in G)$$

آنگاه جواب ϕ از معادله‌ی (۱.۱) موجود باشد که برای هر $x \in S$ داشته باشیم:

$$\|f(x)-\phi(x)\| \leq \epsilon$$

تنها خاصیت B که مورد استفاده قرار می گیرد خاصیت کامل بودن آن است. به طور دقیق‌تر اگر B_1 و B_2 فضاهای باناخ باشند معادله‌ی (۱.۱) برای (S,B_1) پایدار است اگر وتنها اگربرای (S,B_2) پایدار باشد. بنابراین به طور خلاصه معادله‌ی (۱.۱) برای هر نیم گروه S پایدار می‌باشد.

۲.۱ معادله تابعی کوشی

تعریف ۲.۱ معادله

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{۲.۱}$$

را معادله‌ی کوشی یا جمعی می‌نامیم که یکی از مشهورترین معادلات تابعی است. هر جواب این معادله، نگاشت جمعی نامیده می‌شود. واضح است که تابع حقیقی $f(x)=cx$ که c عدد حقیقی ثابتی است ، یک جواب این معادله می‌باشد.

مثال ۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A-مدول باناخ و $x_0 \in X$ ثابت باشد، آنگاه نگاشت $f: A \to X$ با ضابطه $f(a)=ax_0-x_0a$ جمعی است.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم $\epsilon > 0$ و E_1 و E_2 فضاهای برداری باشند، نگاشت $f : E_1 \to E_2$ را ϵ- خطی می‌نامیم اگر در نامساوی زیرین صدق کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \epsilon, \qquad (x, y \in E_1)$$

تعریف ۴.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. نگاشت $f : X \to \mathbb{R}$ را همگن می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

در سال ۱۹۴۰، اولام [۷۶] در یک سخنرانی در دانشگاه ویسکانسین در مورد تعدادی از مسایل مهم حل نشده بحث کرد که در بین آنها سؤال زیر در مورد پایداری همریختی‌ها به چشم می‌خورد:

فرض کنید G یک گروه و G' یک گروه متریک با متر $\rho(.,.)$ باشد و $\epsilon > 0$. آیا $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $f : G \to G'$ برای هر $x, y \in G$ در شرط $\rho(f(xy), f(x)f(y)) < \delta$ صدق کند آنگاه یک همریختی $h : G \to G'$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in G$، $\rho(f(x), h(x)) < \epsilon$ ؟ به عبارت دیگر می‌توان سؤال اولام را به این صورت بیان کرد :«چه موقع همریختی‌ها پایدار هستند.» به این معنی که اگر یک نگاشت به شکل تقریبی همریختی باشد، چه موقع یک همریختی نزدیک آن وجود دارد.

پس از مطرح شدن سؤال اولام، در سال ۱۹۴۱، هایرز [۲۰] جوابی به صورت زیر را برای آن ارایه داد:

قضیه ۵.۱ فرض کنیم E_1 یک فضای برداری نرمدار، E_2 یک فضای باناخ باشد و فرض کنیم نگاشت $f : E_1 \to E_2$ برای هر $x, y \in E_1$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \epsilon$$

که $\epsilon > ۰$ ثابت است. آنگاه نگاشت g که برای هر x در $E_۱$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$$

تنها تابع جمعی است که برای هر $x \in E_۱$ در نامساوی زیر صدق می کند

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon. \qquad (۳.۱)$$

همچنین، اگر تابع $t \mapsto f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به $E_۲$ برای هر x ثابت پیوسته باشد، آنگاه g خطی است و اگر f در یک نقطه از $E_۱$ پیوسته باشد، آنگاه g بر $E_۱$ پیوسته است . به علاوه نامساوی (۳.۱) اکید است.

اثبات. رجوع کنید به قضیه ۱.۱ از مرجع [۲۱]. ■

پس از ارائه‌ی جواب هایرز، مفهوم پایداری هایرز - اولام برای پایداری معادلات تابعی به وجود آمد. در سال ۱۹۵۰ آئوکی [۳] وجود عملگر جمعی منحصر بفرد را ثابت کرد و همچنین مدعی شد که وجود نگاشت خطی منحصر بفرد امکان‌پذیر نیست. تعمیمی از قضیه‌ی هایرز به وسیله ت. م. راسیاس [۶۸] در سال ۱۹۷۸ داده شد که اجازه می‌داد تفاضل کوشی بیکران باشد، این کار تأثیر شگرفی در نظریه‌ی پایداری معادلات تابعی داشت و سبب تعریف مفهوم جدیدی به نام پایداری هایرز - اولام - راسیاس شد. قضیه‌ی ت. م. راسیاس به صورت زیر می‌باشد:

قضیه ۶.۱ فرض کنیم $f : E_۱ \to E_۲$ یک نگاشت از فضای برداری نرمدار $E_۱$ بتوی فضای باناخ $E_۲$ باشد که در نامساوی زیرین صدق می کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \qquad (x, y \in E_۱) \qquad (۴.۱)$$

که $\epsilon > ۰$ و $p < ۱$ ثابت هستند.آنگاه حد

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$$

برای هر $x \in E_1$ وجود دارد و g نگاشت جمعی منحصر بفردی است که

$$\|f(x) - g(x)\| \leq K\epsilon\|x\|^p \qquad (۵.۱)$$

که $K = \frac{2}{2 - 2^p}$. اگر $p < 0$ آنگاه نامساوی (۴.۱) برای $x, y \neq 0$ و نامساوی (۵.۱) برای $x \neq 0$ برقرار هستند.

اثبات. رجوع کنید به قضیه ۲.۱ از مرجع [۲۱]. ■

ت. م. راسیاس [۶۹] در سال ۱۹۹۰ در بیست وهفتمین سمپوزیوم بین‌المللی معادلات تابعی سؤالی را مطرح کرد مبنی بر اینکه آیا می توان قضیه‌ی فوق را برای حالتی که $p \geq 1$ است ثابت کرد. گاجدا [۱۷] در سال ۱۹۹۱ با استفاده از روش راسیاس جواب مثبتی به این سوال در حالتی که $p > 1$ باشد به صورت زیر داد:

قضیه ۷.۱ فرض کنیم f نگاشتی از فضای برداری نرمدار E_1 بتوی فضای باناخ E_2 باشد بطوریکه

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \qquad (x, y \in E_1)$$

که $\epsilon > 0$ و $p > 1$ ثابت هستند.آنگاه حد

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n f(\frac{x}{2^n})$$

برای هر $x \in E_1$ وجود دارد و g نگاشت جمعی منحصر بفردی است که

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{2\epsilon}{2^p - 2}\|x\|^p.$$

اثبات. رجوع کنید به مرجع [۱۷]. ■

نتیجه ۱ درحالتی که $p \neq 1$ و f در یک نقطهٔ $y \neq 0$ از E_1 پیوسته باشد آنگاه g در هر نقطه پیوسته است. همچنین وقتی که $p \neq 1$ و نگاشت $t \mapsto f(tx)$ برای یک ثابت x در E_1 و برای هر t حقیقی پیوسته باشد آنگاه g خطی است.

اثبات. رجوع کنید به مرجع [۲۱]. ■

همچنان که دیدیم بر خلاف ادعای آئوکی با اضافه کردن شرط پیوستگی وجود عملگر خطی قابل اثبات است. در سال ۱۹۸۹ ج. راسیاس [۶۴] کران تفاضل کوشی را به صورت $c_2\|x_1\|^a\|x_2\|^b$ در نظر گرفت. گاجدا در [۱۷] و ت. م. راسیاس و پ. شمرل در [۷۲] با ارائه‌ی مثالهای جداگانه نشان دادند سؤال ت. ام. راسیاس برای حالت $p = 1$ دارای جواب منفی است. مثال ارائه شده توسط گاجدا به صورت زیر است:

مثال ۲ فرض کنیم $\epsilon > 0$ و $\mu = \frac{\epsilon}{6}$ باشند. تابع $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\phi(x) = \begin{cases} -\mu, & x \leq -1 \\ \mu x, & -1 < x < 1 \\ \mu, & x \geq 1 \end{cases}$$

حال فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(2^n x)}{2^n}$$

در این صورت تابع f در شرط

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \epsilon(|x| + |y|) \tag{6.1}$$

صدق می کند ولی عددی مانند $\delta > 0$ و تابع جمعی مانند $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یافت نمی شود به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$|f(x) - g(x)| \leq \delta|x|$$

اثبات. اگر $x = y = 0$ باشد نامساوی (۶.۱) بدیهی است. فرض کنیم $0 < |x| + |y| < 1$ باشد در این صورت عدد طبیعی مانند N چنان وجود دارد که $2^{-N} \leq |x| + |y| < 2^{-N+1}$ بنابراین $|2^{N-1}x| < 1$، $|2^{N-1}y| < 1$ و $|2^{N-1}(x+y)| < 1$. در نتیجه به ازای هر n که $0 \leq n \leq N-1$ اعداد $2^n x$، $2^n y$ و $2^n(x+y)$ در بازه $(-1, 1)$ قرار می گیرند. چون ϕ در این بازه خطی است.

در نتیجه به ازای هر n که $\circ \leq n \leq N-۱$ داریم

$$\phi(۲^n(x+y)) - \phi(۲^n(x)) - \phi(۲^n(y)) = \circ$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\frac{|f(x+y)-f(x)-f(y)|}{|x|+|y|} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\phi(۲^n(x+y)) - \phi(۲^n(x)) - \phi(۲^n(y))|}{۲^n(|x|+|y|)}$$

$$\leq \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{۳\mu}{۲^{k+N}(|x|+|y|)} \leq \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{۳\mu}{۲^k} = \epsilon$$

اگر $|x|+|y| \geq ۱$ با توجه به اینکه $|f(x)| \leq \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{\mu}{۲^k} = ۲\mu$ خواهیم داشت :

$$\frac{|f(x+y)-f(x)-f(y)|}{|x|+|y|} \leq ٦\mu = \epsilon$$

حال فرض کنیم که عددی مانند $\delta > \circ$ و تابع جمعی مانند $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$|f(x) - g(x)| \leq \delta |x|$$

چون f کراندار است در نتیجه g در یک همسایگی صفر کراندار است بنابراین عددی مانند c موجود است به طوری که $g(x) = cx$. به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ می توان نوشت :

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leq \delta + |c|$$

حال عدد طبیعی N را چنان انتخاب می کنیم که $N\mu > \delta + |c|$. اگر $x \in (\circ, ۲^{-N+۱})$ آنگاه به ازای هر n که $\circ \leq n \leq N-۱$ داریم: $۲^n x \in (\circ, ۱)$. به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ می توان نوشت :

$$\frac{f(x)}{x} \geq \sum_{n=\circ}^{N-۱} \frac{\phi(۲^n x)}{۲^n x} = \sum_{n=\circ}^{N-۱} \frac{\mu ۲^n x}{۲^n x} = N\mu > \delta + |c|$$

و این یک تناقض است. ■

مثال ت. م. راسیاس و پ. شمرل نیز به صورت زیر بود:

مثال ۳ : تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x)=\begin{cases} xlog_۲(x+۱), & ۰\le x\\ xlog_۲|x-۱|, & x<۰\end{cases}$$

این تابع در رابطه

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\le|x|+|y| \tag{۷.۱}$$

صدق می کند و $\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)-cx|}{|x|}=\infty$.

اثبات. واضح است که تابع f پیوسته، فرد و در بازه $(۰,+\infty)$ محدب است. فرض کنید x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند. چون f محدب است می توان نوشت :

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\le f(c)-۲f(\frac{c}{۲})$$

که در آن $c=x+y$. در نتیجه رابطه (۷.۱) را خواهیم داشت. چون f تابعی فرد است رابطه (۷.۱) برای $x,y<۰$ نیز برقرار است. فرض کنید $x>۰$ و $y<۰$. بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد که $|x|<|y|$. چون f محدب و فرد است می توان نوشت :

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|=-f(x+y)+f(x)+f(y)=f(x)-f(x+y)-f(-y).$$

حال با توجه به مثبت بودن $-y$ و $x+y$ نامساوی (۷.۱) را می توان نتیجه گرفت. ■

در سال ۱۹۹۴ گاوروتا کران تفاضل کوشی را به صورت تابع کنترلی $\phi(x,y)$ در نظر گرفت [۱۸] که سبب تعریف مفهوم پایداری هایرز - اولام - راسیاس تعمیم یافته و تعمیم نتایج بدست آمده توسط ت. م. راسیاس و ج. راسیاس گشت. قضیه‌ی گاوروتا به صورت زیر است:

قضیه ۸.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی و E یک فضای باناخ باشد و $\varphi:G\times G:\longrightarrow[۰,\infty)$ تابعی باشد به طوری که برای هر $x,y\in G$

$$\Phi(x,y):=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{۲^{n+۱}}\varphi(۲^nx,۲^ny)<\infty$$