



دانشگاه شیخ بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

مدل‌های ARCH و GARCH در اندازه‌گیری تلاطم

پژوهشگر

آمنه واعظ

استاد راهنما

دکتر علی زینل همدانی

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به :

مادر عزیزم

به پاس محبت‌های بی‌دریغش که هرگز فروکش نمی‌کند.

پدر گرامی‌ام

که در جاده زندگی سختی‌ها را هموار نمود.

## سپاسگزاری

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمایمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی‌حد پروردگار بر خود لازم می‌دانم سپاسگزار زحمات و مساعدت‌های استاد فرهیخته جناب آقای دکتر علی زینل همدانی باشم که سهمی به سزا در روند انتخاب موضوع و انجام پژوهش داشته‌اند.

برای ایشان آرزوی توفیق روزافزون و سربلندی در تمام مراحل زندگی را از خداوند متعال خواهانم.

## چکیده

این پایان‌نامه روش‌های مختلف اندازه‌گیری تلاطم متغیر را توضیح می‌دهد. تحلیل‌های مربوط به سری‌های زمانی اغلب با فرض ثابت بودن واریانس صورت گرفته‌اند، اما در عمل با ناهمگنی در واریانس مواجه می‌شویم. از اینرو می‌بایست از مدل‌هایی استفاده شود که مشروط به ناهمگنی واریانس باشند.

یک دسته از این مدل‌ها، مدل‌های اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس می‌باشند که نخستین بار توسط انگل در سال ۱۹۸۲ معرفی شده‌اند و پس از آن مدل‌های بیشمار دیگری از این مدل بدست آمده است. این مدل‌ها بسیاری از ویژگی‌های داده‌های سری زمانی مالی و اقتصادی از جمله تلاطم خوشه‌ای، اثر اهرمی و پایداری تلاطم را شامل می‌شوند.

در این پایان‌نامه ابتدا به تجزیه و تحلیل مهم‌ترین مدل‌های مالی و آماری اندازه‌گیری تلاطم پرداخته می‌شود سپس در بخش کاربردی با استفاده از مدل‌های بیان شده داده‌های ۵۰۰ شاخص *S&P* برای سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۰ مدل‌سازی می‌شوند. مدل‌سازی و پیش‌بینی داده‌ها توسط نرم‌افزار *Eviews6* صورت گرفته و پیش‌بینی انجام شده برای سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۰ یک پیش‌بینی بلند مدت است.

کلید واژه‌ها: تلاطم، مدل *ARCH*، مدل *GARCH*، تلاطم خوشه‌ای.

## فهرست مطالب

| عنوان   | صفحه |
|---|------|
| فصل اول: مفاهیم و کلیات                         |      |
| ۱-۱ تعاریف و مفاهیم آماری.....                  | ۳    |
| ۱-۱-۱ تعریف سری زمانی.....                      | ۳    |
| ۲-۱-۱ تابع میانگین و تابع کوواریانس.....        | ۳    |
| ۳-۱-۱ ایستایی.....                              | ۴    |
| ۴-۱-۱ ایستایی اکید.....                         | ۴    |
| ۵-۱-۱ ایستایی ضعیف.....                         | ۵    |
| ۶-۱-۱ تابع خودهمبستگی (ACF).....                | ۵    |
| ۷-۱-۱ اغتشاش خالص (نوفه سفید).....              | ۵    |
| ۸-۱-۱ مدل‌های استاندارد سری زمانی.....          | ۵    |
| ۹-۱-۱ مدل‌های اتورگرسیو کلی.....                | ۵    |
| ۱۰-۱-۱ مدل‌های میانگین متحرک کلی.....           | ۱۱   |
| ۱۱-۱-۱ مدل‌های میانگین متحرک اتورگرسیو کلی..... | ۱۳   |
| ۱۲-۱-۱ تعریف سازگاری.....                       | ۱۵   |
| ۱۳-۱-۱ مارتینگل.....                            | ۱۵   |
| ۲-۱ تعاریف و مفاهیم اولیه مالی.....             | ۱۶   |

- ۱-۲-۱ تلاطم ..... ۱۶
- ۲-۲-۱ تلاطم خوشه ای ..... ۱۶
- ۳-۲-۱ تلاطم تاریخی ..... ۱۷
- ۴-۲-۱ تلاطم ضمنی ..... ۱۸
- ۵-۲-۱ اثر اهرمی ..... ۱۸
- ۳-۱ تعاریف و مفاهیم اقتصادی ..... ۱۸
- ۱-۳-۱ تحلیل رگرسیونی ..... ۱۸
- ۲-۳-۱ متغیرهای درونزا و برونزا ..... ۱۹
- ۳-۳-۱ اجزای اخلاص ..... ۱۹

فصل دوم: مدل‌های مالی و آماری در اندازه گیری تلاطم

- ۱-۲ انحراف معیار به عنوان روشی متداول برای اندازه گیری تلاطم ..... ۲۳
- ۲-۲ بدست آوردن مربع تلاطم با استفاده از میانگین بازدهیها ..... ۲۵
- ۳-۲ مدل‌های مالی برای مدل‌سازی تلاطم ..... ۲۷
- ۱-۳-۲ مدل‌های اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس ( $ARCH$ ) ..... ۲۸
- ۲-۳-۲ مدل خطی اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس ( $ARCH(q)$ ) ..... ۳۰
- ۳-۳-۲ مدل اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس مرتبه اول ( $ARCH(1)$ ) ..... ۳۳
- ۴-۳-۲ چند خصوصیت ساده مدل‌های  $ARCH$  ..... ۳۴
- ۵-۳-۲ مدل رگرسیونی اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس ..... ۳۵
- ۶-۳-۲ ساختار مدل‌های اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس ..... ۳۶

۳۷..... $ARCH$  ضعیف مدل‌های  $ARCH$  ۷-۳-۲

۳۸..... $(GARCH)$  مدل‌های اتورگرسیو تعمیم‌یافته مشروط به ناهمگنی واریانس ۸-۳-۲

۳۸..... $GARCH(1,1)$  و  $ARCH(q)$  مدل‌های ۹-۳-۲

۴۰..... $GARCH$  ایستایی مدل ۱۰-۳-۲

۴۰..... $GARCH(1,1)$  وجود فرآیند ۱۱-۳-۲

۴۲..... $GARCH(1,1)$  ایستایی فرآیند ۱۲-۳-۲

۴۳..... $GARCH$  مدل رگرسیونی ۱۳-۳-۲

۴۳..... $GARCH$  و  $ARCH$  مثالی از برازش مدل ۴-۲

فصل سوم: معرفی تعدادی از مدل‌های گرفته شده از مدل‌های  $ARCH$  و  $GARCH$

۴۹..... $(EGARCH)$  مدل ناهمسانی واریانس شرطی نمایی ۱-۳

۵۰..... $(TARCH)$  مدل ناهمسانی واریانس شرطی آستانه‌ای ۲-۳

۵۱..... $(APGARCH)$  مدل ناهمسان واریانس شرطی نامتقارن با جزء پرتوان ۳-۳

۵۳..... $(GARCH-M)$  مدل اثر ناهمسانی واریانس شرطی در معادله میانگین ۴-۳

۵۳..... $IGARCH$  مدل اثر ناهمسانی واریانس شرطی انباشته یا ۵-۳

فصل چهارم: روش‌های برآورد پارامترهای مدل و پیش‌بینی

۵۶..... $GARCH$  از برخی روش‌های برآورد پارامتر خانواده ۱-۴

۵۶..... $(ML)$  روش درست‌نمایی ماکزیمم ۱-۱-۴

۵۷..... $(QML)$  روش شبه درست‌نمایی ماکزیمم ۲-۱-۴

۵۷..... $GMM$  روش ۳-۱-۴

|  |       |  |
|--|-------|--|
| ۵۸   | ۲-۴   | معیارهای شناخت مرتبه الگو.....               |
| ۵۹   | ۳-۴   | آزمون نرمال بودن Jarque – Bera.....          |
| ۵۹   | ۴-۴   | آزمون کفایت مدل $GARCH$ .....                |
| ۶۰   | ۱-۴-۴ | آزمون فرض صفر عدم وجود مدل $ARCH$ .....      |
| ۶۲   | ۲-۴-۴ | آزمون پورت مانتو و مقایسه آن.....            |
| ۶۳   | ۵-۴   | پیش بینی تلاطم.....                          |
| ۶۴   | ۱-۵-۴ | ضریب کشیدگی فرآیندهای $GARCH$ .....          |
| ۶۸   | ۲-۵-۴ | خطاهای پیش بینی.....                         |
| فصل پنجم: تحلیل رفتار ۵۰۰ شاخص قیمت سهام استاندارد اند پور |       |  |
| ۷۱   | ۱-۵   | مشخصات مدل های مورد بررسی.....               |
| ۷۲   | ۱-۱-۵ | مدل $ARCH(q)$ .....                          |
| ۷۲   | ۲-۱-۵ | مدل $GARCH(p, q)$ .....                      |
| ۷۲   | ۲-۵   | توصیف داده های مورد استفاده در مدل سازی..... |
| ۷۵   | ۱-۲-۵ | آزمون دیکی فولر تعمیم یافته.....             |
| ۷۶   | ۳-۵   | آمار توصیفی داده های بازدهی قیمت ها.....     |
| ۷۶   | ۱-۳-۵ | آزمون نرمال بودن توزیع بازدهی قیمت ها.....   |
| ۷۷   | ۲-۳-۵ | آزمون $ARCH\_LM$ .....                       |
| ۷۸   | ۴-۵   | مدل سازی داده های بازدهی قیمت ها.....        |
| ۷۹   | ۱-۴-۵ | یافتن بهترین مدل اتو رگرسیو.....             |
| ۸۵   | ۲-۴-۵ | برازش مدل $ARCH(3)$ .....                    |



۳-۴-۵ برآزش مدل  $ARCH(5)$  ..... ۸۴

۴-۴-۵ برآزش مدل  $GARCH(1,1)$  ..... ۸۶

۵-۴-۵ برآزش مدل  $GARCH(3,2)$  با وجود  $R$  و  $R(-4)$  در معادله واریانس ..... ۸۸

۶-۴-۵ برآزش مدل  $GARCH-M(2,2)$  با وجود  $R$  و  $R(-4)$  در معادله واریانس ..... ۹۱

فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهاد

۱-۶ پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی ..... ۹۹

منابع ..... ۱۰۰

## فصل اول

## فصل اول: مفاهیم و کلیات

تلاطم<sup>۱</sup> از اهمیت بالایی برای کسانی که در بازارهای مالی شرکت می‌کنند برخوردار است. در علم مالی تلاطم یا نوسان یک اندازه‌ی آماری برای بازدهی دارایی است. این اندازه‌ی آماری در طول زمان تغییر می‌کند و به صورت یک سری زمانی بیان می‌شود.

برای پیش‌بینی تلاطم بازده، روش‌های متعددی توسط محققان ارائه و در عمل بکار رفته است. این روش‌ها دامنه‌ی وسیعی از مدل‌های آسان با مفروضات ساده (فرایند گشتاور تصادفی) تا مدل‌های پیچیده‌تر از قبیل مدل‌های گروه ARCH را شامل می‌شوند. در مورد اینکه کدام یک از این مدل‌ها منجر به پیش‌بینی بهتری از تلاطم بازده می‌شوند نظر قاطعی وجود ندارد.

تلاطم اساساً یک مفهوم مهم در علم مالی است. اینکه چرا تلاطم برای خود یک مسئله‌ی مهم است دلایل متعددی دارد. در بیست سال اخیر مدل‌های تلاطم و پیش‌بینی آنها مورد توجه محققین دانشگاهی و فعالان بازار قرار گرفته است. این توجه به خاطر این است که از تلاطم به عنوان معیاری برای محاسبه‌ی ریسک استفاده شده است. برای شرکت‌های خصوصی، تلاطم می‌تواند یک عامل مهم در بررسی احتمال ورشکستگی به حساب آید، هر چقدر که تلاطم در یک شرکت بزرگ بیشتر باشد، احتمال پرداخت نکردن بدهی بیشتر است.

تلاطم در قیمت‌گذاری بسیاری از دارایی‌ها از جمله بیمه نقش بسزایی دارد. وقتی قیمت دارایی‌ها با تغییر زمان به شدت دچار تلاطم می‌شوند، مدل‌سازی تلاطم و پیش‌بینی آن از بی‌اعتمادی سرمایه‌گذاران نسبت به بازار سرمایه جلوگیری می‌کند.

در این رساله ابتدا تلاطم و مفاهیم وابسته به آن را تعریف می‌کنیم و به تجزیه و تحلیل دو مدل اصلی ARCH و GARCH که در تشخیص تغییرات تلاطم بکار می‌روند می‌پردازیم، سپس مدل‌های مختلفی که از این دو مدل اصلی گرفته شده‌اند را معرفی می‌کنیم و در پایان تلاطم داده‌های S&P500 را با استفاده از این دو مدل، مدل‌سازی و پیش‌بینی می‌کنیم.

---

<sup>۱</sup>Volatility

از آنجایی که بررسی تلاطم و مدل‌سازی آن نیاز به برخی از روش‌ها و مفاهیم آماری و اقتصادی دارد، ابتدا به تعریف مفاهیم پای‌های مرتبط می‌پردازیم. تعاریف و مفاهیم این قسمت با استفاده از کتاب مقدمه‌ای بر تحلیل سری‌های زمانی، نوشته‌ی سی-چتفیلد<sup>۱</sup>، آمده است [۲۷].

## ۱-۱ تعاریف و مفاهیم آماری

با توجه به اینکه در علم مالی از مفاهیم و مدل‌های آماری استفاده زیادی می‌شود، لذا ابتدا به تعریف برخی از مفاهیم آماری مورد نیاز در این پژوهش می‌پردازیم.

### ۱-۱-۱ تعریف سری زمانی

هر سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات  $X_t$  است. هر عضو این مجموعه مشاهده‌ای است که در زمان مشخص  $t \in T$  به ثبت رسیده است. اگر  $T$  مجموعه‌ای گسسته باشد، سری زمانی را گسسته و در غیر این صورت پیوسته می‌نامند. مثال‌های سری‌های زمانی، بسیار فراوان و متنوع هستند. تعدادی از این مثال‌ها عبارتند از:

- ۱- نتایج برد و باخت یک نوع بازی برای تیمی مشهور در طول یک دوره
- ۲- تعداد تصادفات منجر به مرگ در یک کشور در طول یک دوره
- ۳- جمعیت یک کشور در طول سال‌های مختلف
- ۴- ارزش سهام در طول یک دوره
- ۵- تعداد فروش کالایی مشهور مربوط به یک کشور، مثلاً برنج آمل، در طول یک دوره
- ۶- میزان بازدهی یک سرمایه‌گذاری در طول یک دوره

### ۲-۱-۱ تابع میانگین و تابع کوواریانس

اگر  $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  سری زمانی باشد که برای آن  $E(X_t^2) < \infty$  تابع،

$\mu_x$  با تعریف

<sup>۱</sup> Chris Chatfield

$$\mu_x(t) = E(X_t) \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

را تابع میانگین  $\{X_t\}$  و تابع  $\gamma_x$  با تعریف

$$\gamma_x(r, s) = \text{cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - \mu_x(r))(X_s - \mu_x(s))] \quad r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

را تابع کوواریانس  $\{X_t\}$  می نامند.

### ۳-۱-۱ ایستایی<sup>۱</sup>

سری زمانی  $\{X_t: t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  را ایستا می نامند، هرگاه خواص آماری آن برای هر عدد صحیح  $k$

مشابه با خواص آماری سری  $\{X_{t+k}: t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  باشد.

### ۴-۱-۱ ایستایی اکید<sup>۲</sup>

فرآیندی اکیداً ایستا است که توزیع توأم  $X_1, \dots, X_k$  همان توزیع توأم  $X_{t+1}, \dots, X_{t+k}$  بر روی مجموعه

نقاط  $x_1, \dots, x_k$  باشد یعنی:

$$F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{X_{t+1}, \dots, X_{t+k}}(x_1, \dots, x_k) \quad \forall k, t$$

### ۵-۱-۱ ایستایی ضعیف<sup>۳</sup>

فرآیندی ایستای ضعیف است که

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_t) = M \\ \text{var}(X_t) = \sigma^2 \end{array} \right. \quad \forall k, t$$

مستقل از  $t$  باشند و

<sup>1</sup> Stationary

<sup>2</sup> Strict stationary

<sup>3</sup> Weak stationary

$$\text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \text{cov}(X_{t+1}, X_{t+k+1}) = \text{cov}(X_{t+2}, X_{t+k+2}) = y_k$$

یعنی به اختلاف زمانی  $t$  بستگی ندارد.

### ۶-۱-۱ تابع خودهمبستگی (ACF)<sup>۱</sup>

در سری‌های زمانی یک ویژگی مهم این است که معمولاً مشاهدات متوالی مستقل نیستند و دقیقاً این وابستگی هدف مدل‌سازی سری‌های زمانی است که برای بررسی این وابستگی از تابع خود همبستگی استفاده می‌شود. تعریف خود همبستگی با تاخیر  $k$ ، عبارت است از همبستگی بین مشاهداتی که  $k$  واحد زمانی با یکدیگر فاصله دارند. تابع خود همبستگی را با  $\rho_k$  نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t+k})}{\text{var}(X_t)}$$

### ۷-۱-۱ اغتشاش خالص (نوفه سفید)<sup>۲</sup>

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی  $\{X_t\}$  که دو بدو مستقل و هم‌توزیع هستند، یک فرایند اغتشاش خالص نامیده می‌شود هرگاه میانگین آن صفر و واریانس آن مقدار ثابت  $\sigma^2$  باشد.

### ۸-۱-۱ مدل‌های استاندارد سری زمانی

به طور کلی، سه مدل اساسی سری زمانی برای توصیف داده‌ها بکار می‌روند: مدل‌های اتورگرسیو، میانگین متحرک، میانگین متحرک اتورگرسیو.

### ۹-۱-۱ مدل‌های اتورگرسیو کلی<sup>۳</sup>

در مدل سری زمانی اتورگرسیو ( $AR$ ) مشاهده  $X_t$  مستقیماً به  $P$  مشاهده گذشته به صورت زیر بستگی

دارد:

<sup>1</sup> Autocorrelation function

<sup>2</sup> White noise

<sup>3</sup> General Autoregressive Models

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1-1)$$

که آن را سری اتورگرسیو مرتبه  $p$  نامیده و به صورت  $AR(p)$  نشان داده می‌شود. در این مدل،  $\varepsilon_t$  خطای مدل است، و آنرا نوفه سفید می‌نامند. مدل (1-1) به صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$\phi_p(B)X_t = \varepsilon_t$$

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad \text{که در آن}$$

و  $B$  عملگر پسرو می‌باشد. به‌طور مثال،

$$BX_t = X_{t-1}, \quad B^2 X_t = X_{t-2}, \quad \dots, \quad B^q X_t = X_{t-q}$$

برای اینکه فرآیند  $AR(p)$  (1-1) ایستا باشد ریشه‌های معادله  $\phi(B) = 0$  باید خارج دایره واحد باشند. برای توضیح بیشتر، فرآیند  $AR(1)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2-1)$$

با جایگذاری رابطه (2-1) داریم:

$$(1 - \phi_1 B)X_t = \varepsilon_t$$

بنابراین،  $(1 - \phi_1 B) = 0$  که نتیجه می‌شود:

$$B = \frac{1}{\phi_1}$$

اگر  $|\phi_1| < 1$  آنگاه ریشه معادله  $\phi_1(B) = 0$  بزرگتر از یک است یا خارج از دایره واحد می‌باشد. بنابراین فرآیند  $AR(1)$  از رابطه (2-1) ایستاست. توجه کنید که از (2-1)، بطور بازگشتی از مشاهدات قبلی تعریف می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
X_t &= \varepsilon_t + \phi_1 X_{t-1} \\
&= \varepsilon_t + \phi_1 (\varepsilon_{t-1} + \phi_1 X_{t-2}) \\
&= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 (\varepsilon_{t-2} + \phi_1 X_{t-3}) \\
&= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 X_{t-3} \\
&= \sum_{j=0}^k \phi_1^j \varepsilon_{t-j} + \phi_1^{k+1} X_{t-k-1}
\end{aligned}$$

که در آن  $|\phi_1| < 1$  و اگر  $k$  به سمت بی‌نهایت میل کند، داریم:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

می‌توان نشان داد که اگر فرآیند  $\{X_t\}$  از طریق این فرمول بیان شود آنگاه  $X_t$  در رابطه (۳-۱) صدق می‌کند،

مشروط بر اینکه  $|\phi_1| < 1$  که در این صورت،  $\{X_t\}$  ایستاست. واریانس  $X_t$  را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
V(X_t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} V(\varepsilon_{t-j}) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned}$$

که متناهی و مثبت است اگر  $|\phi_1| < 1$ .

حال بررسی می‌کنیم که چطور پارامترهای  $\phi_1$  و  $\sigma_\varepsilon^2$  برای مدل  $AR(1)$  برآورد می‌شوند. تابع چگالی توأم

مشاهدات  $X_1, \dots, X_T$  را می‌توان به صورت حاصلضرب چگالی‌های شرطی آنها نوشت:

$$\begin{aligned}
f_{X_1, \dots, X_T}(x_1, \dots, x_T) &= f_{X_T | X_1, \dots, X_{T-1}}(x_T | x_1, \dots, x_{T-1}) \times f_{X_{T-1} | X_1, \dots, X_{T-2}}(x_{T-1} | x_1, \dots, x_{T-2}) \\
&\quad \times \dots \times f_{X_2 | X_1}(x_2 | x_1) \times f_{X_1}(x_1)
\end{aligned}$$

برای هر  $k = 2, \dots, T$  چگالی شرطی،  $X_k$  به شرط  $X_1, \dots, X_{k-1}$ ، به صورت زیر می‌باشد:

$$f_{X_k | X_1, \dots, X_{k-1}}(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left(\frac{-(x_k - \phi_1 x_{k-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$



و چگالی حاشیه‌ای  $X_1$  به صورت زیر است:

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon / \sqrt{1-\phi_1^2}} \exp\left(\frac{-x_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2 / (1-\phi_1^2)}\right)$$

برای سادگی چگالی حاشیه‌ای، از تابع درستنمایی کنار گذاشته می‌شود. زیرا زمانی که تعداد مشاهدات زیاد باشد، اثر آن بر روی تابع درستنمایی قابل چشم‌پوشی است.

$$f_{X_2|X_1(x_2|x_1)} = \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

$$f(x_1, x_2) = f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) \times f_{X_1}(x_1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{\frac{-(x_2 - \phi_1 x_1)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon / \sqrt{1-\phi_1^2}} \exp\left\{\frac{-x_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2 / (1-\phi_1^2)}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{1-\phi_1^2}}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 + x_2^2 - 2\phi_1 x_1 x_2)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1-\phi_1^2}}} \exp\left[\frac{-1}{2} \left\{ \left(\frac{x_1 - \circ}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \circ}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 - 2\frac{\phi_1 x_1 x_2}{\sigma_\varepsilon^2} \right\}\right] \end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \sim N(\circ, \circ, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\varepsilon^2, \rho)$$

$$(X_1, X_2) \sim N_2\left(\begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix}\right), \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 \\ \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma = \text{var} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) \\ \text{cov}(X_1, X_2) & \text{var}(X_2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 \\ \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix} \\ \rho = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} &\Rightarrow \text{cov}(X_1, X_2) = \rho \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \right\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{X_3|X_1, X_2} \times f_{X_2|X_1} \times f_{X_1}(x_1)$$

$$f_{X_3|X_2, X_1}(x_3 | x_2, x_1) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \times f_{X_1}(x_1)}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{(x_3 - \phi_1 x_2)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{(x_2 - \phi_1 x_1)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{1-\phi_1^2}} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2(1-\phi_1^2)}\right\} \\ &\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{1-\phi_1^2}}} \exp\left\{-\frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \phi_1^2 x_1^2 + \phi_1^2 x_2^2 - 2\phi_1 x_2 x_3 - 2\phi_1 x_1 x_2)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \\ &\Rightarrow f_{X_k|X_1, \dots, X_{k-1}}(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{(x_k - \phi_1 x_{k-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \end{aligned}$$

تابع درست‌نمایی شرطی با شرط روی  $X_1$  بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} L(\phi_1, \sigma_\varepsilon^2) &= \prod_{j=2}^T f_{X_j|X_1, \dots, X_{j-1}}(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}) \\ &= \prod_{j=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left(-\frac{(x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \end{aligned}$$

و لگاریتم تابع درست‌نمایی بدون در نظر گرفتن جمله ثابت به صورت زیر است:

$$l(\phi_1, \sigma_\varepsilon^2) = -(T-1) \log \sigma_\varepsilon - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{j=2}^T (x_j - \phi_1 x_{j-1})^2$$

می‌توان این لگاریتم تابع درست‌نمایی ماکزیمم را برای محاسبه برآوردهای  $\hat{\phi}_1$  و  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  با حل معادلات زیر بکار برد:

$$\frac{\partial l}{\partial \phi_1} = \frac{-2 \sum_{j=2}^T x_{j-1} (x_j - \phi_1 x_{j-1})}{2\sigma_\varepsilon^2} = 0$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum x_{j-1} x_j}{\sum x_{j-1}^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \sigma_\varepsilon^2} &= \frac{-(T-1)}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{\sum (x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^3} \\ &= \frac{-(T-1)\sigma_\varepsilon^2 + \sum (x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^3} = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum (x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{T-1}$$

تابع خود همبستگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

تابع خود همبستگی نمونه نیز عبارتست از:

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad \text{اگر } \bar{x} = 0$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} x_t x_{t+k}}{\sum_{t=1}^n x_t^2}$$

## ۱-۱-۱۰ مدل‌های میانگین متحرک کلی<sup>۱</sup>

مدل معمول دیگر، میانگین متحرک مرتبه  $q$  می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود و با نماد  $MA(q)$

نشان داده می‌شود.

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (3-1)$$

که در آن  $\varepsilon_t$  ها نوفه سفید هستند. با بکارگیری عملگر پسرو  $B$ ، مدل (۳-۱) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t$$

که در آن

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

اگر قدر مطلق ریشه‌های معادله  $\theta_q(B) = 0$  خارج دایره واحد باشند، آنگاه فرآیند  $MA(q)$  وارون‌پذیر

می‌باشد به این معنی که می‌توان  $X_t$  را به صورت فرآیند  $AR$  با مرتبه نامتناهی برحسب  $\theta_j$  نوشت که

داریم:  $j = 1, \dots, q$  برای حالت  $MA(1)$

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (4-1)$$

که  $|\theta_1| < 1$  شرط کافی برای وارون‌پذیری می‌باشد. با جایگذاری، فرمول (۳-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= X_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\ &= X_t + \theta_1 (X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}) \\ &= X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-2} \\ &\vdots \\ &= X_t + \sum_{j=1}^k \theta_1^j X_{t-j} + \theta_1^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} \end{aligned}$$

از آنجا که  $|\theta_1| < 1$ ، اگر  $k$  را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، داریم:

<sup>1</sup> General Moving Average Models