دانشگاه شیخ بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

مدل‌های ARCH و GARCH در اندازه‌گیری تلاطم

پژوهشگر

آمنه واعظ

استاد راهنما

دکترعلی زینل همدانی

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به :

مادر عزیزم

به پاس محبت‌های بی‌دریغش که هرگز فروکش نمی‌کند.

پدر گرامی‌ام

که در جاده زندگی سختی‌ها را هموار نمود.

سپاسگزاری

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمایمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگار بر خود لازم می دانم سپاسگزار زحمات و مساعدت‌های استاد فرهیخته جناب آقای دکتر علی زینل همدانی باشم که سهمی به سزا در روند انتخاب موضوع و انجام پژوهش داشته‌اند.

برای ایشان آرزوی توفیق روزافزون و سربلندی در تمام مراحل زندگی را از خداوند متعال خواهانم.

چکیده

این پایان‌نامه روش‌های مختلف اندازه‌گیری تلاطم متغیر را توضیح می دهد. تحلیل‌های مربوط به سری‌های زمـانی اغلب با فرض ثابت بودن واریانس صورت گرفته اند، اما در عمل با ناهمگنی در واریانس مواجه می شویم. از اینرو می‌بایست از مدل‌هایی استفاده شود که مشروط به ناهمگنی واریانس باشند.

یک دسته از این مدل‌ها، مدل‌های اتورگرسیو مشروط به ناهمگنی واریانس می‌باشند که نخستین بار توسط انگل در سال ۱۹۸۲ معرفی شده‌اند و پس از آن مدل‌های بیشمار دیگری از این مدل بدست آمده است. این مدل‌ها بسیاری از ویژگی‌های داده‌های سری زمانی مالی و اقتصادی از جمله تلاطم خوشه‌ای، اثر اهرمی و پایداری تلاطـم را شامل می‌شوند.

در این پایان نامه ابتدا به تجزیه و تحلیل مهم‌ترین مدل‌های مالی و آمـاری انـدازه‌گیـری تلاطـم پرداختـه می‌شود سپس در بخش کاربردی با استفاده از مدل‌های بیان شده داده‌های ۵۰۰ شاخص *S&P* برای سال‌هـای ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۰ مدل‌سازی می‌شوند. مدل‌سازی و پیش‌بینی داده‌ها توسط نرم‌افزار *Eviews6* صورت گرفتـه و پـیش‌بینـی انجام شده برای سال های ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۰ یک پیش بینی بلند مدت است.

کلید واژه ها: تلاطم، مدل *ARCH* ، مدل *GARCH*، تلاطم خوشه‌ای.

فهرست مطالب

فصل اول

فصل اول: مفاهیم و کلیات

تلاطم[1] از اهمیت بالایی برای کسانی که در بازارهای مالی شرکت می‌کنند بر خوردار است. در علـم مـالی تلاطم یا نوسان یک اندازه‌ی آماری برای بازده‌ی دارایی است. این اندازه‌ی آماری درطول زمان تغییر می‌کنـد و بـه صورت یک سری زمانی بیان می شود.

برای پیش‌بینی تلاطم بازده، روش‌های متعددی توسط محققان ارائه و در عمل بکار رفته است. این روش‌ها دامنه‌ی وسیعی از مدل‌های آسان با مفروضات ساده (فرایند گشتاور تصادفی)تا مدل‌های پیچیده‌تر از قبیل مدل‌های گروه $ARCH$ را شامل می شوند. در مورد اینکه کدام یک از این مدل‌ها منجر به پیش‌بینی بهتری از تلاطـم بـازده می شوند نظرقاطعی وجود ندارد.

تلاطم اساسا یک مفهوم مهم در علم مالی است. اینکه چرا تلاطم برای خود یک مسئله‌ی مهم است دلایل متعددی دارد. در بیست سال اخیر مدل‌های تلاطم و پیش بینی آنها مورد توجه محققین دانشگاهی و فعـالان بـازار قرار گرفته است. این توجه به خاطر این است که از تلاطم به عنوان معیاری برای محاسبه‌ی ریسک اسـتفاده شـده است. برای شرکتهای خصوصی، تلاطم می تواند یک عامل مهم در بررسی احتمال ورشکستگی به حساب آید، هر چقدر که تلاطم در یک شرکت بزرگ بیشتر باشد، احتمال پرداخت نکردن بدهی بیشتر است.

تلاطم در قیمت‌گذاری بسیاری از دارایی‌ها از جمله بیمه نقش بسزایی دارد. وقتی قیمت دارایی‌ها بـا تغییـر زمان به شدت دچار تلاطم می‌شوند، مدل‌سازی تلاطم و پیش‌بینی آن از بی‌اعتمادی سرمایه‌گذاران نسبت به بـازار سرمایه جلوگیری می‌کند.

در این رساله ابتدا تلاطم و مفـاهیم وابسـته بـه آن را تعریـف مـی‌کنـیم و بـه تجزیـه و تحلیـل دو مـدل اصلی $ARCH$ و $GARCH$ که در تشخیص تغییرات تلاطم بکار می روند می‌پردازیم، سپس مدل‌های مختلفی که از این دو مدل اصلی گرفته شده‌اند را معرفی می‌کنیم و در پایان تلاطم داده‌های $S\&P500$ را با استفاده از این دو مدل، مدل‌سازی و پیش‌بینی می‌کنیم.

[1] Volatility

از آنجایی که بررسی تلاطم و مدل‌سازی آن نیاز به برخی از روش‌ها و مفاهیم آماری و اقتصادی دارد، ابتدا به تعریف مفاهیم پایه‌ای مرتبط می‌پردازیم. تعاریف و مفاهیم این قسمت با استفاده از کتاب مقدمه‌ای بر تحلیل سری‌های زمانی، نوشته‌ی سی–چتفیلد[1]، آمده است[۲۷].

۱–۱ تعاریف و مفاهیم آماری

با توجه به اینکه در علم مالی از مفاهیم و مدل‌های آماری استفاده زیادی می شود، لذا ابتدا به تعریف برخی از مفاهیم آماری مورد نیاز در این پژوهش می پردازیم.

۱–۱–۱ تعریف سری زمانی

هر سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات x_t است. هر عضو این مجموعه مشاهده‌ای است که در زمان مشخص $t \in T$ به ثبت رسیده است. اگر T مجموعه‌ای گسسته باشد، سری زمانی را گسسته و در غیر این صورت پیوسته می‌نامند. مثال‌های سری‌های زمانی، بسیار فراوان و متنوع هستند. تعدادی از این مثال‌ها عبارتند از:

۱- نتایج برد وباخت یک نوع بازی برای تیمی مشهور در طول یک دوره

۲- تعداد تصادفات منجر به مرگ در یک کشور در طول یک دوره

۳- جمعیت یک کشور در طول سال‌های مختلف

٤- ارزش سهام در طول یک دوره

۵- تعداد فروش کالایی مشهور مربوط به یک کشور، مثلا برنج آمل، در طول یک دوره

٦- میزان بازدهی یک سرمایه گذاری در طول یک دوره

۱–۱–۲ تابع میانگین و تابع کوواریانس

اگر $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ سری زمانی باشد که برای آن $E(X^2_t) < \infty$ تابع، μ_x با تعریف

[1] Chris Chatfield

$$\mu_x(t)=E(X_t) \qquad t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$$

را تابع میانگین $\{X_t\}$ و تابع γ_x با تعریف

$$\gamma_x(r,s)=\operatorname{cov}(X_r,X_s)=E[(X_r-\mu_x(r))(X_s-\mu_x(s))] \qquad r,s\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$$

را تابع کوواریانس $\{X_t\}$ می‌نامند.

۱-۱-۳ ایستایی[۱]

سری زمانی $\{X_t: t=0,\pm1,\pm2,\dots\}$ را ایستا می نامند، هرگاه خواص آماری آن برای هرعدد صحیح k مشابه با خواص آماری سری $\{X_{t+k}: t=0,\pm1,\pm2,\dots\}$ باشد.

۱-۱-٤ ایستایی اکید[۲]

فرآیندی اکیداً ایستا است که توزیع توأم $X_1,\dots,X_k$ همان توزیع توأم $X_{t+1},\dots,X_{t+k}$ بـر روی مجموعـه نقاط $x_1,\dots,x_k$ باشد یعنی:

$$F_{X_1,\dots,X_k}(x_1,\dots,x_k)=F_{X_{t+1},\dots X_{t+k}}(x_1,\dots,x_k) \quad \forall k,t$$

۱-۱-۵ ایستایی ضعیف[۳]

فرایندی ایستای ضعیف است که

$$\begin{cases} E(X_t)=M \\ & \forall k,t \\ \operatorname{var}(X_t)=\sigma^2 \end{cases}$$

مستقل از t باشند و

[1] Stationary
[2] Strict stationary
[3] Weak stationary

$$\text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \text{cov}(X_{t+1}, X_{t+k+1}) = \text{cov}(X_{t+2}, X_{t+k+2}) = y_k$$

یعنی به اختلاف زمانی t بستگی ندارد.

۱-۱-۶ تابع خودهمبستگی(ACF)[1]

در سری‌های زمانی یک ویژگی مهم این است که معمولا مشاهدات متوالی مستقل نیستند و دقیقا این وابستگی هدف مدل‌سازی سری‌های زمانی است که برای بررسی این وابستگی از تابع خود همبستگی استفاده می شود.تعریف خود همبستگی با تاخیر k، عبارت است از همبستگی بین مشاهداتی که k واحد زمانی با یکدیگر فاصله دارند. تابع خود همبستگی را با ρ_k نشان داده و به شکل زیر تعریف می شود:

$$\rho_{\mathrm{k}} = \frac{\text{cov}\left(X_{\mathrm{t}}, X_{\mathrm{t+k}}\right)}{\text{var}\left(X_{\mathrm{t}}\right)}$$

۱-۱-۷ اغتشاش خالص (نوفه سفید)[2]

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t\}$ که دو بدو مستقل و هم‌توزیع هستند، یک فرایند اغتشاش خالص نامیده می‌شود هرگاه میانگین آن صفر و واریانس آن مقدار ثابت σ^2 باشد.

۱-۱-۸ مدل‌های استاندارد سری زمانی

به طور کلی، سه مدل اساسی سری زمانی برای توصیف داده‌ها بکار می‌روند:مدل‌های اتورگرسیو، میانگین متحرک، میانگین متحرک اتورگرسیو.

۱-۱-۹ مدل‌های اتورگرسیو کلی[3]

در مدل سری زمانی اتورگرسیو (AR) مشاهده X_t مستقیماً به P مشاهده گذشته به صورت زیر بستگی دارد:

---

[1] Autocorrelation function
[2] White noise
[3] General Autoregressive Models

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۱-۱)$$

که آن را سری اتورگرسیو مرتبه p نامیده و به صورت $AR(p)$ نشان داده می‌شود. در این مدل، ε_t خطای مدل است، و آنرا نوفه سفید می نامند. مدل (۱-۱) به صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$\varphi_p(B) X_t = \varepsilon_t$$

که در آن

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

و B عملگر پسرو می‌باشد. به‌طور مثال،

$$BX_t = X_{t-۱} \ , \ B^۲ X_t = X_{t-۲} \ , \ \cdots \ B^q X_t = X_{t-q}$$

برای اینکه فرآیند $AR(p)$ (۱-۱) ایستا باشد ریشه‌های معادله $\phi(B) = ۰$ باید خارج دایره واحد باشند. برای توضیح بیشتر، فرآیند $AR(1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (۲-۱)$$

با جایگذاری رابطه (۱-۲) داریم:

$$(1 - \phi_1 B) X_t = \varepsilon_t$$

بنابراین، $(1 - \phi_1 B) = ۰$ که نتیجه می‌شود:

$$B = \frac{1}{\phi_1}$$

اگر $|\phi_1| < 1$ آنگاه ریشه معادله $\phi_1(B) = ۰$ بزرگتر از یک است یا خارج از دایره واحد می‌باشد. بنابراین فرایند $AR(1)$ از رابطه (۱-۲) ایستاست. توجه کنید که از (۱-۲)، X_t بطور بازگشتی از مشاهدات قبلی تعریف می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}X_t &= \varepsilon_t + \phi_1 X_{t-1}\\ &= \varepsilon_t + \phi_1(\varepsilon_{t-1} + \phi_1 X_{t-2})\\ &= \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2(\varepsilon_{t-2} + \phi_1 X_{t-3})\\ &= \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 X_{t-3}\\ &= \sum_{j=0}^{k}\phi_1^j\varepsilon_{t-j} + \phi_1^{k+1}X_{t-k-1}\end{aligned}$$

که در آن $|\phi_1|<1$ و اگر k به سمت بی‌نهایت میل کند، داریم:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varepsilon_{t-j}$$

می‌توان نشان داد که اگر فرآیند $\{X_t\}$ از طریق این فرمول بیان شود آنگاه X_t در رابطه (۱-۲) صدق می‌کند، مشروط بر اینکه $|\phi_1|<1$ که در این صورت، $\{X_t\}$ ایستاست. واریانس X_t را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}V(X_t) &= \sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^{2j}V(\varepsilon_{t-j})\\ &= \sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^{2j}\\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}\end{aligned}$$

که متناهی و مثبت است اگر $|\phi_1|<1$.

حال بررسی می‌کنیم که چطور پارامترهای ϕ_1 و σ_ε^2 برای مدل $AR(1)$ برآورد می‌شوند. تابع چگالی توأم مشاهدات $X_1,\ldots,X_T$ را می‌توان به صورت حاصلضرب چگالی‌های شرطی آن‌ها نوشت:

$$\begin{aligned}f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1,\ldots,x_T) = {}& f_{X_T|X_1,\ldots,X_{T-1}}(x_T \mid x_1,\ldots,x_{T-1})\times f_{X_{T-1}|X_1,\ldots,X_{T-2}}(x_{T-1}\mid x_1,\ldots,x_{T-2})\\ &\times\cdots\times f_{X_2|X_1}(x_2\mid x_1)\times f_{X_1}(x_1)\end{aligned}$$

برای هر $k=2,\ldots,T$ چگالی شرطی، X_k به شرط $X_1,\ldots,X_{k-1}$، به صورت زیر می‌باشد:

$$f_{X_k|X_1,\ldots,X_{k-1}}(x_k\mid x_1,\ldots,x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon}\exp\left(\frac{-(x_k-\phi_1 x_{k-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

و چگالی حاشیه‌ای X_1 به صورت زیر است:

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon \Big/ \sqrt{1-\phi_1^2}}\exp\left(\frac{-x_1^2}{\frac{2\sigma^2{}_\varepsilon}{1-\phi_1^2}}\right)$$

برای سادگی چگالی حاشیه‌ای، از تابع درستنمایی کنار گذاشته می‌شود. زیرا زمانی که تعداد مشاهدات زیاد باشد، اثر آن بر روی تابع درستنمایی قابل چشم‌پوشی است.

$$f_{X_۲|X_۱(x_۲|x_۱)}=\frac{f(x_۱,x_۲)}{f_{X_۱}(x_۱)}$$

$$f(x_1,x_2)=f_{X_2|X_1}(x_2\,|\,x_1)\times f_{X_1}(x_1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon}\exp\left\{\frac{-(x_2-\phi_1x_1)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon\Big/\sqrt{1-\phi_1^2}}\exp\left\{\frac{-x_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2\Big/1-\phi_1^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{1-\phi_1^2}}}\exp\left\{\frac{-(x_1^2+x_2^2-2\phi_1x_1x_2)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon\frac{1}{\sqrt{1-\phi_1^2}}}\exp\left[\frac{-1}{2}\left\{\left(\frac{x_1-\circ}{\sigma_\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{x_2-\circ}{\sigma_\varepsilon}\right)^2-2\frac{\phi_1x_1x_2}{\sigma_\varepsilon^2}\right\}\right]$$

$$X_1,X_2\sim N(\circ,\circ,\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\varepsilon^2,\rho)$$

$$(X_1,X_2)\sim N_2\begin{pmatrix}\circ\\\circ\end{pmatrix},\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2 & \phi_1\sigma_\varepsilon^2\\ \phi_1\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Sigma = \operatorname{var}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X_1) & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \operatorname{var}(X_2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \phi_1\sigma_\varepsilon^2 \\ \phi_1\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix} \\ \rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}.\sigma_{X_2}} \Rightarrow \operatorname{cov}(X_1, X_2) = \rho\sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{X_3|X_1,X_2} \times f_{X_2|X_1} \times f_{X_1}(x_1)$$

$$f_{X_3|X_2,X_1}(x_3 \mid x_2, x_1) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f_{X_2|X_1(x_2|x_1)} \times f_{X_1}(x_1)}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{\frac{-(x_3 - \phi_1 x_2)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{\frac{-(x_2 - \phi_1 x_1)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \\ &\times \frac{1}{\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon}{\sqrt{1-\phi_1^2}}} \exp\left\{\frac{-x_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2 / 1-\phi_1^2}\right\} \\ &\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{1-\phi_1^2}}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \phi_1^2 x_1^2 + \phi_1^2 x_2^2 - 2\phi_1 x_2 x_3 - 2\phi_1 x_1 x_2)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{X_k|X_۱,\ldots,X_{k-۱}}(x_k \mid x_۱, \ldots, x_{k-۱}) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left\{\frac{-(x_k - \varphi_۱ x_{k-۱})^۲}{۲\sigma_\varepsilon^۲}\right\}$$

تابع درستنمایی شرطی با شرط روی X_1 بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} L(\phi_1, \sigma^2{}_\varepsilon) &= \prod_{j=2}^{T} f_{X_j|X_1,\ldots,X_{j-1}}(x_j \mid x_1, \ldots, x_{j-1}) \\ &= \prod_{j=2}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left(\frac{-(x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \end{aligned}$$

و لگاریتم تابع درستنمایی بدون در نظر گرفتن جمله ثابت به‌صورت زیر است:

$$l(\phi_1, \sigma^2{}_\varepsilon) = -(T-1)\log\sigma_\varepsilon - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{j=2}^{T}(x_j - \phi_1 x_{j-1})^2$$

می‌توان این لگاریتم تابع درستنمایی ماکزیمم را برای محاسبه برآوردهای $\hat{\phi}_1$ و $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ با حل معادلات زیر بکار برد:

$$\frac{\partial l}{\partial \phi_1} = \frac{-2\sum_{j=2}^{T} x_{j-1}(x_j - \phi_1 x_{j-1})}{2\sigma_\varepsilon^2} = \circ$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\Sigma x_{j-1} x_j}{\Sigma x_{j-1}^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{-(T-1)}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{\sum (x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^3}$$
$$= \frac{-(T-1)\sigma_\varepsilon^2 + \sum (x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^3} = \circ$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum (x_j - \phi_1 x_{j-1})^2}{T-1}$$

تابع خود همبستگی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_\circ}$$

تابع خودهمبستگی نمونه نیز عبارتست از:

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \overline{x})(x_{t+k} - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n} (x_t - \overline{x})^2}$$

اگر $\overline{x} = \circ$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} x_k x_{t+k}}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

۱-۱-۱۰ مدل‌های میانگین متحرک کلی[1]

مدل معمول دیگر، میانگین متحرک مرتبه q می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود و با نماد $MA(q)$ نشان داده می‌شود.

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{۱-۳}$$

که در آن ε_tها نوفه سفید هستند. با بکارگیری عملگر پسرو B، مدل (۱-۳) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t$$

که در آن

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$$

اگر قدر مطلق ریشه‌های معادله $\theta_q(B) = ۰$ خارج دایره واحد باشند، آنگاه فرآیند $MA(q)$ وارون‌پذیر می‌باشد به این معنی که می‌توان X_t را به‌صورت فرآیند AR با مرتبه نامتناهی برحسب θ_j نوشت که $j = 1,\dots,q$ برای حالت $MA(1)$ داریم:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{۱-۴}$$

که $|\theta_1| < 1$ شرط کافی برای وارون‌پذیری می‌باشد. با جایگذاری، فرمول (۱-۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= X_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \\
&= X_t + \theta_1 (X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}) \\
&= X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-2} \\
&\ \vdots \\
&= X_t + \sum_{j=1}^{k} \theta_1^j X_{t-j} + \theta_1^{k+1} \varepsilon_{t-k-1}
\end{aligned}$$

از آنجا که $|\theta_1| < 1$، اگر k را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، داریم:

[1] General Moving Average Models