بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
بخش ریاضی محض

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

مدول‌های FI ـ تزریقی و FI ـ تخت

مؤلف:

اشکان خورشیدی

استاد راهنما:

دکتر سید شاهین موسوی میرکلایی

بهمن ماه ۱۳۹۳

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی محض

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: اشکان خورشیدی	امضاء:
استاد راهنما: دکتر سید شاهین موسوی میرکلایی	امضاء:
داور اول: دکتر سید ناصر حسینی	امضاء:
داور دوم: دکتر سینا هدایت	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی:	امضاء:

تقدیم به:

ارواح به حق پیوسته عزیزانم
حاج مرتضی صیدالی و برادرم مهندس رسول صیدالی
و به وجود همیشه سلامت و پایدار خانواده ام
آستان آسمان دستان پر از ماه پدرم
به زلال چشمه چشمان چشم به راه مادرم
به قلب پر از عشق همسرم

تشکر و قدردانی

سپاس، بی نهایت هستی را که حکمتش جهان شمول و رحمتش بی پایان. سرآغاز فصل آموختنم، با نام و یاد تو بود، ای محبوب ترین معبود و پایانش را به امید شروعی دوباره، با نامت آغاز می کنم. حمد و سپاس بیکران از آن توست، که لحظه لحظه های زیستن و آموختنم، هر آنچه از علم و اراده و عمل که در وجودم ودیعه نهادی و یاری همراهانم، همه از لطف و مهربانی بي دریغ تو سرشار است. چه زیباست یاری جستن از تو در تمامی کارها، که بهترین یاری دهندگانی. چه با شکوه است توکل به تو، که کفایت می کنی بندگانت را. آرامشی ابدیست، آنگاه که با یاد تو دلهایمان آرام می گیرد.

از این جهت بر خود لازم می‌دانم از حمایت های بی‌دریغ خانواده‌ام به خصوص همسر مهربانم که همواره در طول دوران تحصیل حامی و مشوق من بوده‌اند تشکر و قدردانی نمایم. هم چنین از راهنمایی‌های استاد گرانقدر و فرهیخته‌ام جناب آقای دکتر سید شاهین موسوی به عنوان استاد راهنما و مشورت های دکتر محسن صیدالی (پسر عمه عزیزم) سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه مفهوم مدول های FIـ تزریقی(FIـ تخت) را به صورت تعمیمی غیربدیهی از مدول‌های FPـ تزریقی بیان می‌کنیم و خواص آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای مثال، فرض کنید R یک حلقه منسجم چپ باشد. نشان خواهیم داد Rـ مدول چپ M، FIـ تزریقی است اگر و فقط اگر M جمع مستقیمی از یک Rـ مدول چپ تزریقی و یک Rـ مدول چپ FIـ تزریقی کاهش یافته باشد . همچنین ارتباط این مدول ها با مدول‌های تزریقی (تخت) و پوشش (ناقص) FPـ تزریقی و پوش (ناقص) FPـ تزریقی از یک مدول را مورد بررسی قرار می دهیم. در انتها کاربردهایی از این مدول ها در نظریه حلقه ها و نظریه بعد بیان می‌کنیم. برای مثال ثابت می‌کنیم حلقه R، QF است اگر و فقط اگر هر Rـ مدول چپ، FIـ تزریقی باشد.

کلمات کلیدی: مدول FPـ تزریقی، بعد FPـ تزریقی، مدول FIـ تزریقی، مدول FIـ تخت، پوشش(ناقص)، پوش(ناقص).

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه R حلقه ای یکدار است و Rــ مدول ها یکانی هستند. اصطلاحات و تعاریف استاندارد، از مرجع [۱] می باشند.

در سال های اخیر تعمیم های گوناگونی از مدول های تزریقی و تخت ارائه شده و به وسیله‌ی نویسندگان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته‌است [۱۰،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹]. یکی از این تعمیم ها، مدول های مطلقا خالص [۱] یا FPــ تزریقی هستند [۲۲، ۲۳]. Rــ مدول چپ G را FPــ تزریقی یا مطلقا خالص گوییم، هرگاه برای هر Rــ مدول چپ متناهیاً نمایش پذیر مانند F ، $\mathrm{Ext}^1(F,G)=0$ باشد. این مفهوم ایده ای برای معرفی تعمیمی دیگر از مدول های تزریقی و تخت به دست می دهد که Rــ مدول های FIــ تزریقی و FIــ تخت نامیده می شوند [۱۹]. Rــ مدول چپ M (Rــ مدول راست N) را FIــ تزریقی (FIــ تخت) می‌نامیم، هر گاه برای هر Rــ مدول چپ FPــ تزریقی مانند G، $\mathrm{Ext}^1(G,M)=0$ ($\mathrm{Tor}_1(N,G)=0$) باشد.

نشان خواهیم داد که اگر R یک حلقه منسجم باشد، Rــ مدول چپ M، FIــ تزریقی است اگر و فقط اگر M جمع مستقیمی از یک Rــ مدول چپ تزریقی و یک Rــ مدول چپ FIــ تزریقی کاهش یافته باشد . همچنین Rــ مدول راست متناهیاً نمایش پذیر M، FIــ تخت است اگر و تنها اگر M هم هسته ی یک پوش ناقص تخت از یک Rــ مدول راست باشد. این مدول ها به همراه تابعگون های چپ مشتق شده Hom برای مطالعه بُعدهای FPــ تزریقی مدول ها و حلقه ها مورد استفاده قرار می گیرند.

این پایان‌نامه در سه فصل و به صورت زیر سازماندهی شده است.

در فصل اول مقدمات و پیش‌نیازهای فصول بعدی را بیان می کنیم. یشتر قضایا و احکام این فصل بدون اثبات بیان شده‌اند. خوانندگان محترم جهت کسب اطلاعات بیشتر می‌توانند به مراجع معرفی شده در هر تعریف، لم، حکم یا قضیه مراجعه کنند.

[۱] absolutely pure

در فصل دوم مفاهیم مدول های FIـ تزریقی و FIـ تخت بیان می گردد. همچنین تعدادی از خواص مدول های FIـ تزریقی و FIـ تخت ذکر می شود. برای مثال نشان داده می شود که Rـ مدول چپ M ، FIـ تزریقی است اگر و تنها اگر M هسته یک پوش ناقص FPـ تزریقی مانند $B \longrightarrow A$ باشد، که در آن A تزریقی است. علاوه بر آن ارتباط بین Rـ مدول‌های FIـ تزریقی و (FIـ تخت) و تزریقی (تخت) را بیان می کنیم. ثابت می کنیم Rـ مدول چپ M، تزریقی است اگر و فقط اگر M ، FIـ تزریقی باشد و $FP-id(M) \leqslant ۱$. همچنین نشان می دهیم Rـ مدول راست N تخت است اگر و فقط اگر N ، FIـ تخت باشد و $fd(N) \leqslant ۱$.

در فصل سوم رده همه Rـ مدول های FP ـ تزریقی را با نماد $\mathcal{FI}$ نشان داده و ثابت می کنیم هر Rـ مدول چپ M، دارای $\mathcal{FI}$ـ تفکیک‌پذیری است. سپس تابعگون چپ مشتق شده $\mathrm{Ext}_n(-,-)$ را نسبت به این تفکیک‌پذیری تعریف می کنیم. همچنین نگاشت متعارف $\sigma : \mathrm{Ext}_۰(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,M)$ تعریف می گردد. اگر R یک حلقه منسجم باشد، نشان می‌دهیم M، FPـ تزریقی است اگر و فقط اگر برای هر Rـ مدول چپ N، نگاشت متعارف σ بروریختی باشد. همچنین $\mathcal{FI}$ـ بعد مدول ها را تعریف کرده و برخی از خواص و کاربرد های آن را مورد بررسی قرار می دهیم. در انتها برخی از کاربرد های مدول های FIـ تزریقی و FIـ تخت را در نظریه حلقه ها مشاهده خواهیم کرد. برای مثال ثابت می کنیم حلقه R، QF است اگر و فقط اگر هر Rـ مدول چپ، FIـ تزریقی باشد. همچنین حلقه R، IF چپ است اگر و فقط اگر هر Rـ مدول راست FIـ تخت باشد.

لازم به ذکر است که برای دسترسی آسان‌تر به تعاریف استفاده شده در پایان‌نامه، تمامی آن‌ها را با ذکر شماره‌ی صفحه، در پیوست قرار داده‌ایم.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل به بیان تعاریف، گزاره، قضایا و لم‌هایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، می‌پردازیم.

۱.۱ معرفی تابعگون‌های Tor و Ext

در این بخش تابعگون‌های Tor و Ext را معرفی می‌کنیم و ارتباط آن‌ها را با مدول‌های تصویری و تزریقی بیان می‌نماییم.

تعریف ۱.۱.۱ ([۲۵]). *یک کامپلکس در رسته R ـ مدول‌ها، دنباله‌ای از همریختی‌ها به صورت زیر است:*

$$(C_\bullet, d_\bullet) = \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

با این شرط که

$$d_n d_{n+1} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

تعریف ۲.۱.۱ ([۲۵]). *مجموعه جزئاً مرتب $(I, \leqslant)$ را یک مجموعه مستقیم‌شده می‌نامیم، هرگاه برای هر $i, j \in I$، عضوی مانند $k \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $i, j \leqslant k$.*

تعریف ۳.۱.۱ ([۲۵]). *فرض کنید I یک مجموعه جزئاً مرتب و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌ها باشد. همچنین فرض کنید برای هر $i, j \in I$ با شرط $i \leqslant j$، همریختی $f_{ji} : M_i \longrightarrow M_j$ با شرایط زیر وجود داشته باشد.*

(۱) برای هر $i \in I$، $f_{ii} = id_{M_i}$؛

(۲) اگر $i \leqslant j \leqslant k$، آنگاه $f_{kj} f_{ji} = f_{ki}$. در این صورت به زوج $((M_i)_{i\in I}, (f_{ji})_{i,j\in I})$، یک دستگاه مستقیم‌شده می‌گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ ([۲۵]). *زوج $(M, (g_i)_{i\in I})$ را حدمستقیم از دستگاه مستقیم‌شده $((M_i)_{i\in I}, (f_{ji}))$*

می‌نامیم، هرگاه همریختی‌های $g_i : M_i \longrightarrow M$ ، وجود داشته باشند به قسمی که برای هر $i \leqslant j$ ، $g_i = g_j f_{ji}$ و برای هر خانواده‌ای از همریختی‌های $h_i : M_i \longrightarrow A$ ، که در آن برای هر $i \leqslant j$ ، $h_i = h_j f_{ji}$ ، همریختی منحصربه‌فرد $h : M \longrightarrow A$ وجود داشته باشد که برای هر $i \in I$ در شرط $hg_i = h_i$ صدق نماید. در این صورت M را با $\underrightarrow{\lim} M_i$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنید $\{C^i : i \in I\}$ خانواده‌ای از کامپلکس‌ها باشد به طوریکه $((C^i), (f^{ji}))$ دستگاه مستقیم‌شده باشد. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ،

$$H_n(\underrightarrow{\lim} C^i) \cong \underrightarrow{\lim} H_n(C^i).$$

برهان. [۲۵، تمرین ۶. ۹] $\square$

تعریف ۶.۱.۱ ([۲۵]). *(i)* یک تفکیک پذیری تصویری از Rـ مدول A دنباله‌ای دقیق به صورت زیر است.

$$\mathbf{P} = \cdots \longrightarrow P_۲ \xrightarrow{d_۲} P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow ۰$$

به قسمی که برای هر n ، P_n یک Rـ مدول تصویری است. حال اگر $\mathbf{P}$ یک تفکیک پذیری تصویری از A باشد، آنگاه تفکیک پذیری تصویری حذف شده A کامپلکسی به صورت زیر است.

$$\mathbf{P}_A = \cdots \longrightarrow P_۲ \xrightarrow{d_۲} P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \longrightarrow ۰$$

(ii) یک تفکیک پذیری تزریقی از Rـ مدول A دنباله‌ای دقیق به صورت زیر است.

$$\mathbf{E} = ۰ \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} E^۰ \xrightarrow{d^۰} E^۱ \xrightarrow{d^۱} E^۲ \longrightarrow \cdots$$

به قسمی که برای هر n، E^n یک Rـ مدول تزریقی است. حال اگر $\mathbf{E}$ تفکیک‌پذیری تزریقی از A باشد، آنگاه تفکیک پذیری تزریقی حذف‌شده A کامپلکسی به صورت زیر است.

$$\mathbf{E}^A = 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \longrightarrow \cdots$$

تعریف ۷.۱.۱ ([۲۵]). (i) فرض کنید B یک Rـ مدول چپ بوده و تفکیک پذیری تصویری از A به صورت زیر موجود باشد.

$$\mathbf{P} = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

در این صورت $Tor_n^R(A,B)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tor_n^R(A,B) = H_n(\mathbf{P}_A \otimes B) = \frac{ker(d_n \otimes 1_B)}{im(d_{n+1} \otimes 1_B)}.$$

(ii) فرض کنید A یک Rـ مدول وتفکیک پذیری تزریقی از B به صورت زیر موجود باشد

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots .$$

در این صورت $Ext_R^n(A,B)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Ext_R^n(A,B) = H^n(Hom_R(A,\mathbf{E}^B) = \frac{ker(d_*^n)}{im(d_*^{n-1})}.$$

که در آن $d_*^n = Hom_R(A,d^n)$ همریختی القا شده توسط d^n است.

(iii) فرض کنید B یک R ـ مدول باشد وتفکیک پذیری تصویری از R ـ مدول A به

صورت زیر موجود باشد.

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_۲ \xrightarrow{d_۲} P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \xrightarrow{\varepsilon} A \to ۰$$

در این صورت $ext^n_R(A,B)$ *را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$ext^n_R(A,B) = H^n(Hom_R(\mathbf{P_A},B)) = \frac{ker(d^{n,*})}{im(d^{n-۱,*})}.$$

حکم ۸.۱.۱. *اگر* R*ـ مدول* P *تصویری باشد، آنگاه برای هر* $n \geqslant ۱$ *و برای هر* R*ـ مدول* B، $Tor^R_n(P,B) = ۰$.

برهان. [۲۵، نتیجه ۶. ۲۲] □

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنید* A *و* B *دو* R *ـ مدول چپ باشند.در این صورت*

$$Ext^n_R(A,B) \cong ext^n_R(A,B).$$

برهان. [۲۵، قضیه ۶. ۶۷] □

قضیه ۱۰.۱.۱. (۱) R*ـ مدول چپ* P *تصویری است اگر وتنها اگر به ازای هر* R*ـ مدول چپ* B، $Ext^۱_R(P,B) = ۰$.

(۲) R*ـ مدول چپ* E *تزریقی است اگر وتنها اگر به ازای هر* R*ـ مدول چپ* A، $Ext^۱_R(A,E) = ۰$.

برهان. قسمت (۱) مستقیماً از قضیه (۹.۱.۱) و قسمت (۲) مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۱۱.۱.۱. (i) *اگر* $۰ \to A' \to A \to A'' \to ۰$ *دنباله‌ای دقیق از* R*ـ مدول‌های راست باشد، آنگاه به ازای هر* R*ـ مدول چپ* B *دنباله‌ی دقیق بلند زیر وجود دارد*

$$\cdots \to \boldsymbol{Tor}_{۲}^{R}(A', B) \to \boldsymbol{Tor}_{۲}^{R}(A, B) \to \boldsymbol{Tor}_{۲}^{R}(A'', B) \to \boldsymbol{Tor}_{۱}^{R}(A', B) \to$$

$$\boldsymbol{Tor}_{۱}^{R}(A, B) \to \boldsymbol{Tor}_{۱}^{R}(A'', B) \to A' \otimes_R B \to A \otimes_R B \to A'' \otimes_R B \to ۰.$$

(ii) اگر $۰ \to B' \to B \to B'' \to ۰$ دنباله‌ای دقیق از Rـ مدول‌های چپ باشد، آنگاه به ازای هر Rـ مدول چپ A دنباله‌ی دقیق بلند زیر وجود دارد

$$۰ \to \boldsymbol{Hom}_R(A, B') \to \boldsymbol{Hom}_R(A, B) \to \boldsymbol{Hom}_R(A, B'') \to \boldsymbol{Ext}_R^{۱}(A, B') \to$$

$$\boldsymbol{Ext}_R^{۱}(A, B) \to \boldsymbol{Ext}_R^{۱}(A, B'') \to \boldsymbol{Ext}_R^{۲}(A, B') \to \cdots.$$

برهان. [۲۵، نتیجه ۶. ۳۰] $\square$

قضیه ۱۲.۱.۱. *(Baer) Rـ مدول چپ N تزریقی است اگر وتنها اگر به ازای هر ایده‌آل I از R، $\boldsymbol{Ext}_R^{۱}(\frac{R}{I}, N) = ۰$.*

قضیه ۱۳.۱.۱. *برای Rـ مدول E شرایط زیر معدل اند:*

(۱) Rـ مدول E تزریقی است؛

(۲) $\boldsymbol{Hom}(-, E)$ دقیق راست است؛

(۳) به ازای Rـ مدول M وهر $i \geq ۱$، $\boldsymbol{Ext}_R^{i}(M, E) = ۰$؛

(۴) به ازای Rـ مدول M، $\boldsymbol{Ext}_R^{i}(M, E) = ۰$؛

(۵) به ازای هر ایده‌آل I وهر $i \geq ۱$، $\boldsymbol{Ext}_R^{i}(\frac{R}{I}, E) = ۰$؛

(۶) به ازای هر ایده‌آل I، $\boldsymbol{Ext}_R^{۱}(\frac{R}{I}, E) = ۰$.

برهان. [۱۳، قضیه ۳. ۱. ۹] $\square$

حکم ۱۴.۱.۱. *فرض کنید $\{B_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـ مدول‌های چپ باشد. برای هر Rـ مدول A و $n \geqslant ۰$، یکریختی طبیعی زیر موجود است*

$$\boldsymbol{Tor}_n^R(A, \bigoplus_{i\in I} B_i) \cong \bigoplus_{i\in I} \boldsymbol{Tor}_n^R(A, B_i).$$

همچنین اگر جمع مستقیم روی مولفه اول باشد، بازهم یکریختی برقرار است.

برهان. [۲۵، حکم ۶. ۷]

□

حکم ۱.۱.۱۵. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از R ـ مدول‌ها باشد. برای هر R ـ مدول B و $n \geqslant 0$، یکریختی طبیعی زیر موجود است

$$\boldsymbol{Ext}_R^n(\bigoplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} \boldsymbol{Ext}_R^n(A_i, B).$$

برهان. [۲۵، حکم ۷. ۲۱]

□

حکم ۱.۱.۱۶. فرض کنید $\{B_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از R ـ مدول‌ها باشد. برای هر R ـ مدول A و $n \geqslant 0$، یکریختی طبیعی زیر موجود است

$$\boldsymbol{Ext}_R^n(A, \prod_{i\in I} B_i) \cong \prod_{i\in I} \boldsymbol{Ext}_R^n(A, B_i).$$

برهان. [۲۵، حکم ۷. ۲۲]

□

تعریف ۱.۱.۱۷ ([۲۵]). R ـ مدول M متناهیاً نمایش‌پذیر نامیده می شود، هرگاه دنباله ای دقیق به صورت $F' \to F \to M \to 0$ وجود داشته باشد که F و F'، R ـ مدول‌های آزاد متناهی مولد هستند.

تعریف ۱.۱.۱۸ ([۹]). M یک R ـ مدول FP ـ تزریقی است، هر گاه به ازای هر R ـ مدول چپ متناهیاً نمایش‌پذیر N، $\boldsymbol{Ext}_R^1(N, M) = 0$.

۲.۱ مدول‌های تخت و مشخصه

در این بخش مدول های تخت و مشخصه را معرفی کرده، رابطه بین این مدول ها را بیان می کنیم. همچنین در پایان تعریفی از حلقه منسجم ارائه داده، ارتباط آن را با مفاهیم فوق متذکر می‌شویم.

تعریف ۱.۲.۱ ([۲۵]). *فرض کنید R یک حلقه باشد. Rـ مدول راست A تخت نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دنباله دقیق $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ از Rـ مدول‌های چپ، دنباله $0 \to A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0$ نیز دقیق باشد.*

قضیه ۲.۲.۱. *گزاره‌های زیر برای Rـ مدول راست A معادل‌اند:*

(۱) *A تخت است؛*

(۲) *دنباله‌ی $0 \to A \otimes I \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes R$ به ازای هر ایده‌آل چپ I از R دقیق است که در آن $i : I \to R$ تابع شمول می‌باشد؛*

(۳) *دنباله $0 \to A \otimes J \xrightarrow{1_A \otimes j} A \otimes R$ به ازای هر ایده‌آل چپ متناهی مولد J از R دقیق است که در آن $j : J \to R$ تابع شمول می‌باشد.*

برهان. [۲۵، حکم ۷. ۲۱] $\square$

حکم ۳.۲.۱. *برای حلقه‌ی دلخواه R و خانواده $\{M_j\}_{j \in I}$ از Rـ مدول‌ها، شرایط زیر برقرار است:*

(۱) *R یک Rـ مدول راست تخت است.*

(۲) *$\bigoplus_{j \in I} M_j$، Rـ مدول راست تخت است اگر وتنها اگر هر M_j تخت باشد.*

(۳) *هر Rـ مدول راست تصویری، تخت است.*

برهان. [۲۵، حکم ۳. ۴۶] $\square$

قضیه ۴.۲.۱. *هرگاه F یک R مدول راست تخت باشد، آنگاه به‌ازای هر Rـ مدول چپ M و هر $n \geq 1$ داریم*

$$Tor_n^R(F,M)=0.$$

بر عکس اگر به ازای هر Rـ مدول M، $Tor_1^R(F,M)=0$، آنگاه F تخت است.

برهان. [۲۵، حکم ۷. ۲] □

قضیه ۵.۲.۱. *Rـ مدول چپ M تخت است اگر وتنها اگر به‌ازای‌هر ایده‌آل متناهی مولد I از R، $Tor_1^R(\frac{R}{I},M)=0$.*

برهان. فرض کنید Rـ مدول چپ M تخت باشد. نشان می‌دهیم به‌ازای‌هر ایده‌آل متناهی مولد I، $\mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{I},M)=0$. طبق تعریف (۱.۲.۱) به‌ازای‌هر ایده‌آل متناهی مولد I دنباله دقیق زیر را داریم

$$0 \to I\otimes M \to R\otimes M \to \frac{R}{I}\otimes M \to 0 \tag{۱.۱}$$

همچنین با توجه به دنباله دقیق $0 \to I \to R \to \frac{R}{I} \to 0$ و Rـ مدول M، دنباله دقیق زیر را به دست می‌آوریم

$$0=\mathrm{Tor}_1^R(R,M)\to \mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{I},M)\to I\otimes M \to R\otimes M \to \frac{R}{I}\otimes M \to 0 \tag{۲.۱}$$

در نتیجه با توجه به (۱.۱) و (۲.۱) داریم

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^R(R,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{I},M) \arrow[r] & I\otimes M \arrow[r] \arrow[d, equal] & R\otimes M \arrow[r] \arrow[d, equal] & \frac{R}{I}\otimes M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I\otimes M \arrow[r] & M\otimes R \arrow[r] & \frac{R}{I}\otimes M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

در نتیجه $\mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{I}, M) = 0$. بر عکس فرض کنید به‌ازای‌هر ایده‌آل متناهی مولد I، داشته باشیم $\mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{I}, M) = 0$. دنباله دقیق $0 \to I \to R \to \frac{R}{I} \to 0$ را در نظر بگیرید. بنابراین به‌ازای Rـ مدول M، دنباله دقیق زیر را به دست می‌آوریم

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{I}, M) \to I \otimes M \to R \otimes M \to \frac{R}{I} \otimes M \to 0.$$

در نتیجه داریم

$$0 \to I \otimes M \to R \otimes M \to \frac{R}{I} \otimes M \to 0.$$

بنابراین با توجه به قضیه (۱.۲.۲)، M تخت است. □

قضیه ۱.۲.۶. *برای Rـ مدول چپ F شرایط زیر معادل‌اند:*

(۱) Rـ *مدول F تخت است؛*

(۲) $F \otimes_R -$ *دقیق چپ است؛*

(۳) *به‌ازای‌هر Rـ مدول راست M و هر $i \geq 1$، $Tor_i^R(M, F) = 0$؛*

(۴) *به‌ازای‌هر Rـ مدول راست M، $Tor_1^R(M, F) = 0$؛*

(۵) *به‌ازای‌هر Rـ مدول راست متناهی مولد M، $Tor_1^R(M, F) = 0$.*

برهان. [۱۳، قضیه ۲. ۱. ۸] □

حکم ۱.۲.۷. *فرض کنید $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ دنباله‌ای دقیق از Rـ مدول‌های راست باشد که درآن M'' تخت است. در این صورت M' تخت است اگر و تنها اگر M تخت باشد.*

برهان. [۲۵، نتیجه ۷. ۴] □

قضیه ۱.۲.۸. Rـ *مدول چپ متناهیاً نمایش‌پذیر A، تخت است اگر وتنها اگر تصویری باشد.*