بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۷۹ /۹/ ۱۶

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرمان

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان پایان نامه:

اجتماع زیر مدولهای اول

Union of Prime Submoduls

مولف:

محمود علیزاده

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

بهمن ماه ۱۳۷۸

موضوع:

اجتماع زیر مدولهای اول

توسط:

محمود علیزاده

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۷۸/۱۱/۱۷ در مقابل هیئت داوران دفاع بعمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران:

استاد راهنما: دکتر رضا نکویی

داور ۱: دکتر اسفندیار اسلامی

داور ۲: دکتر محمد حسن دوگانی

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد:
دکتر اسفندیار اسلامی

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی:
دکتر محمد حسین متقی

معاون آموزشی دانشگاه:
دکتر مجید غلامحسین پور

رئیس دانشگاه
دکتر محمد حسین متقی

تقدیم به:

پدر فداکار

و مادر مهربانم

تشکر و قدردانی

اکنون که در پرتو عنایات خداوند بزرگ نگارش این پایان‌نامه به انجام رسیده، این حقیر برخود واجب می‌دانم که با سپاس از عزیزانی که بی‌یاریشان انجام این کار ممکن نمی‌شد، بقدر بضاعت خویش ادای دین نمایم.

در وهلهٔ اول از اساتید بزرگوار و جلیل‌القدر بخش ریاضی که طی دو سال گذشته از محضر شریفشان کسب فیض نموده‌ام، خاضعانه قدردانی می‌کنم که اندک دانش این حقیر نتیجهٔ تلاش و همت بلند بزرگواران است. بویژه از جناب آقای دکتر رضا نکویی که در سراسر ترم گذشته در تمامی مراحل کار از راهنمائیهای ارزشمندشان بهره برده‌ام صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم و از خداوند متعال سلامتی و طول عمر ایشان را مسئلت دارم. همچنین از اساتید معظم آقایان دکتر اسفندیار اسلامی و دکتر محمدحسن دوگانی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند، سپاسگزاری می‌نمایم.

از پدر و مادر عزیزم که همواره مشوق من بوده و با کوششهای بیدریغ خود محیطی امن و آرام برای این حقیر را فراهم آورده‌اند تا در کمال آسایش به امور مطالعه بپردازم، صمیمانه قدردانی می‌کنم.

محمود علیزاده

بهمن‌ماه ۷۸

چکیده

در این رساله ابتدا به بیان قضیهٔ اجتناب از ایده‌الهای اول پرداخته و سپس حالت کلی این قضیه که بجای ایده‌الهای اول، ایده‌الهای دلخواهی قرار می‌گیرند، را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ادامه با تعریف زیرمدول اول، این قضیه را به زیرمدولهای اول تعمیم می‌دهیم.

در پایان زیرمجموعه‌های ضربی اشباع شده از حلقهٔ R و زیرمجموعه‌های S-بسته اشباع شده از R-مدول M را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

قضیه اجتناب از ایده‌آلهای اول بطور ساده بشکل زیر بیان می‌شود.

گیریم $P_۱$و...وP_n ایده‌آلهای اول و I ایده‌آلی از حلقهٔ R باشند بطوریکه $I \not\subseteq P_i$، برای هر $۱ \leq i \leq n$، آنگاه $I \not\subseteq P_۱ \cup \ldots \cup P_n$.

حال اگر ایده‌آلهای دلخواه بجای ایده‌آلهای اول جایگزین شوند آنگاه وضعیت پیچیده‌تر خواهد شد.

«مک‌کوی» در ([۱۰] قضیهٔ ۱) ثابت کرد که اگر ایده‌ال I بوسیلهٔ یک اجتماع متناهی، $I_۱ \cup I_۲ \cup \ldots \cup I_n$، از ایده‌الها پوشیده شود بطوریکه هیچکدام از I_k ها، $۱ \leq k \leq n$، قابل حذف شدن نباشند. آنگاه برای بعضی مقادیر N، $I^N \subseteq I_۱ \cap \ldots \cap I_n$.

در فصل اول با معرفی پوششهای کارآمد از ایده‌الها نشان می‌دهیم که می‌توان N را برابر $۲^{n-۲}$ انتخاب کرد. در ادامه بدنبال یافتن مقادیر کمتری برای N می‌باشیم.

در فصل دوم با تعمیم پوششهای کارآمد از ایده‌الها به زیر مدولها، قضیهٔ اجتناب از ایده‌آلهای اول را به مدولها تعمیم می‌دهیم. همچنین در این فصل نشان می‌دهیم که مجموعهٔ عناصر تابی از مدول نوتری M (که با $T(M)$ نمایش داده می‌شود) با اجتماعی متناهی از زیرمدولهای اول M برابر می‌باشد.

در فصل سوم زیرمجموعه‌های Sـبسته از مدولها (که تعمیمی از زیرمجموعه‌های ضربی در حلقه‌ها می‌باشند) را تعریف کرده و به بررسی خواص گوناگون زیرمجموعه‌های sـبسته، به خصوص زیرمجموعه‌های sـبستهٔ اشباع شده، می‌پردازیم. در پایان این فصل ثابت می‌کنیم که

گیریم s^* یک زیرمجموعهٔ sـبسته از Rـمدول با تولید متناهی M باشد. اگر یک زیرمدول P در میان زیرمدولهای مجزا از s^*، ماکسیمال باشد آنگاه P یک زیرمدول اول است.

لازم به ذکر است که این رساله حاصل بررسی دو مرجع [۳] و [۷] می‌باشد.

فصل ۱

اجتماع متناهی از ایده‌الها و همدسته‌ها

۱. اجتماع متناهی از ایده‌الها

لم ۱ـ۱ـ۱. گیریم I، I_1 و I_2 ایده‌الهایی از حلقهٔ R باشند بطوریکه $I \subseteq I_1 \cup I_2$. آنگاه

$$I \subseteq I_1 \quad \text{یا} \quad I \subseteq I_2 \cdot$$

اثبات: گیریم $I \nsubseteq I_1$ و $I \nsubseteq I_2$. پس

$$\exists x \in I \backslash I_1, \exists y \in I \backslash I_2$$

نشان می‌دهیم $x + y \notin I$.

اگر $x + y \in I$ آنگاه

$$x + y \in I_1 \quad \text{یا} \quad x + y \in I_2$$

می‌پذیریم $x + y \in I_1$. داریم

$$x \notin I_1 \Rightarrow y \notin I_1 \Rightarrow y \in I_2$$

بطور مشابه اگر $x + y \in I_2$ آنگاه $x \in I_1$. لذا $x \in I_1$ یا $y \in I_2$ که متناقض با انتخاب x و y می‌باشد.

پس $x + y \notin I$. اما بوضوح این نیز با ایده‌ال بودن I تناقض دارد. بنابراین $I \subseteq I_1$ یا $I \subseteq I_2$. ∎

لم (۱ـ۱ـ۱) برای پوششهای متشکل از سه ایده‌ال همواره درست نیست. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۱ـ۱ـ۲. گیریم $R = \dfrac{z_2[x, y]}{(x^2, xy, y^2)}$. فرض کنیم $I_1 = \{\bar{0}, \bar{x}\}$ ، $I_2 = \{\bar{0}, \bar{y}\}$ و $I_3 = \{\bar{0}, \overline{x + y}\}$. (توجه کنید بعنوان مثال $\bar{x} = x + (x^2, xy, y^2)$). آنگاه

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{\bar{0}, \bar{x}, \bar{y}, \overline{x + y}\}$$

یک ایده‌ال ماکسیمال از R است. زیرا اگر قرار دهیم $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ و $A = (x^2, xy, y^2)$ آنگاه

$$\frac{R}{I} = \{(1 + A) + I, I\} \simeq z_2$$

پس $\frac{R}{I}$ یک میدان و بنابراین I ایده‌الی ماکسیمال است. حال داریم $I \subseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3$ در حالیکه برای هر، $1 \leq t \leq 3$، $I \not\subseteq I_t$.

توجه می‌کنیم که I_1 و I_2 و I_3 هیچکدام اول نیستند. بعنوان مثال، اول نبودن I_1 را بررسی می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که $\frac{R}{I_1} = \{I_1, \bar{1} + I_1, \bar{y} + I_1, \overline{1+y} + I_1\}$. اما $\bar{y} + I_1$ یک مقسوم‌علیه صفر است زیرا $(\bar{y} + I_1)(\bar{y} + I_1) = I_1$، اما $\bar{y} + I_1 \neq I_1$ و لذا $\frac{R}{I_1}$ حوزهٔ صحیح نیست.

تعریف ۱-۱-۳. گیریم I و I_1و...وI_n ایده‌الهایی از حلقهٔ جابجایی R باشند به قسمی که $I \subseteq I_1 \cup \ldots \cup I_n$. آنگاه $I_1 \cup \ldots \cup I_n$ را یک پوشش کارآمد برای I نامیم اگر I مشمول در اجتماعی از $n - 1$ تا، از این ایده‌الها نباشد. به عبارت دیگر هیچکدام از، I_k ها، در این پوشش قابل حذف شدن نباشند.

به طور مشابه هرگاه $I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ آنگاه $I_1 \cup \ldots \cup I_n$ را یک اجتماع کارآمد برای I نامیم اگر هیچکدام از I_k ها قابل حذف شدن نباشند.

توجه ۱-۱-۴. اگر $I \subseteq I_1 \cup \ldots \cup I_n$ آنگاه بوضوح $I = (I \cap I_1) \cup \ldots \cup (I \cap I_n)$. همچنین هر پوشش و یا اجتماعی از ایده‌الها بسادگی با حذف عناصر اضافی به یک پوشش و یا اجتماع کارآمد تبدیل می‌شود.

نتیجه ۱-۱-۵. با توجه به لم (۱-۱-۱) واضح است که هر پوشش از دو ایده‌ال هرگز نمی‌تواند کارآمد باشد.

لم ۱-۱-۶ (مک‌کوی). گیریم $I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ یک اجتماع کارآمد از ایده‌الها باشد ($n > 1$). آنگاه برای هر، $1 \leq k \leq n$، داریم $\bigcap_{j=1}^{n} I_j = \bigcap_{j \neq k, j=1}^{n} I_j$.

اثبات: بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می‌پذیریم $k = ۱$ باشد. گیریم $a \in \bigcap_{j=۲}^{n} I_j$. چون پوشش کارآمد است لذا $b \in I$ به قسمی موجود است که $b \notin \bigcup_{j=۲}^{n} I_j$. بنابراین خواهیم داشت

$$a + b \in I \setminus \bigcup_{j=۲}^{n} I_j \cdot$$

زیرا در غیر اینصورت

$$a + b \in \bigcup_{j=۲}^{n} I_j \Rightarrow \exists\, t, ۲ \leq t \leq n \quad , \quad a + b \in I_t$$

اما چون $a \in \bigcap_{j=۲}^{n} I_j$ پس $a \in I_t$. از اینرو

$$b \in I_t \Rightarrow b \in \bigcup_{j=۲}^{n} I_j$$

که تناقض است.

پس $a + b \in I \setminus \bigcup_{j=۲}^{n} I_j$ بنابراین $a + b \in I_۱$. چون $b \in I_۱$ لذا $a \in I_۱$. از طرفی $a \in \bigcap_{j=۲}^{n} I_j$ پس $a \in \bigcap_{j=۱}^{n} I_j$ و لذا $\bigcap_{j=۲}^{n} I_j \subseteq \bigcap_{j=۱}^{n} I_j$. اما بوضوح $\bigcap_{j=۱}^{n} I_j \subseteq \bigcap_{j=۲}^{n} I_j$. پس $\bigcap_{j=۲}^{n} I_j = \bigcap_{j=۱}^{n} I_j$. ■

گزارهٔ ۱ـ۱ـ۷. گیریم $I \subseteq I_۱ \cup \ldots \cup I_n$ یک پوشش کارآمد باشد $(n > ۱)$ آنگاه برای هر k، $۱ \leq k \leq n$، I_k اول نیست.

اثبات: بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می‌پذیریم $k = ۱$. چون $I \subseteq I_۱ \cup \ldots \cup I_n$ یک پوشش کارآمد است پس $I = (I \cap I_۱) \cup \ldots \cup (I \cap I_n)$ یک اجتماع کارآمد از ایده‌الها می‌باشد. حال طبق لم (۱ـ۱ـ۶) داریم:

$$I \cap I_۲ \cap \ldots \cap I_n = I \cap I_۱ \cap I_۲ \cap \ldots \cap I_n \subseteq I_۱ \cdot$$

اما $I \not\subseteq I_1$ و برای هر t، $t \geq 2$، داریم $I_t \not\subseteq I_1$ (زیرا $I \subseteq I_1 \cup \ldots \cup I_n$ یک پوشش کارآمد است). اکنون گیریم $a \in I \backslash I_1$ و برای هر، $2 \leq t \leq n$، $a_t \in I_t \backslash I_1$. آنگاه

$$a \cdot a_2 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n \in I \cap (\bigcap_{j=2}^{n} I_j) \subseteq I_1 \Rightarrow a \cdot a_2 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n \in I_1 \cdot$$

اما $a \not\in I_1$ و همچنین برای هر، $2 \leq t \leq n$، $a_t \not\in I_1$ پس I_1 اول نیست. ■

قضیه ۱ـ۱ـ۸. گیریم $I \subseteq I_1 \cup \ldots \cup I_n$ یک پوشش از ایده‌الها باشد، بطوریکه حداقل $n - 2$ تا از ایده‌الهای I_1و...وI_n اول باشند. آنگاه برای بعضی مقادیر k، $1 \leq k \leq n$، $I \subseteq I_k$.

اثبات: گیریم $I \subseteq I_{i_1} \cup \ldots \cup I_{i_t}$ یک پوشش کارآمد باشد جائیکه $\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. اگر $t \geq 3$، آنگاه حداقل یک ایده‌ال اول I_k در اجتماع کارآمد فوق وجود دارد و این متناقض با گزاره (۱ـ۱ـ۷) است. لذا $1 \leq t \leq 2$. از طرفی طبق نتیجه (۱ـ۱ـ۵) داریم $t \neq 2$. پس $t = 1$ یعنی $I \subseteq I_{i_1}$. بدین ترتیب اثبات قضیه تمام است. ■

توجه ۱ـ۱ـ۹. گیریم S زیرمجموعه‌ای ضربی از حلقهٔ تعویض‌پذیر و یکدار R باشد. رابطهٔ تعریف شده بر مجموعهٔ $R \times S$ بوسیلهٔ

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow s_1(rs' - r's) = 0 \quad , \quad s_1 \in S \text{ به ازای }$$

یک رابطهٔ هم‌ارزی است. مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی روی $R \times S$ تحت رابطهٔ هم‌ارزی فوق را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم، اگر جمع و ضرب در $S^{-1}R$ را با روابط زیر تعریف کنیم،

$$(\frac{r}{s})(\frac{r'}{s'}) = \frac{rr'}{ss'} \quad , \quad \frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'}$$

آنگاه $S^{-1}R$ تشکیل یک حلقهٔ جابجایی و یکدار می‌دهد. اگر R یک حوزهٔ صحیح و S مجموعه تمام عناصر

ناصفر R باشد در این صورت به سادگی دیده می‌شود که $S^{-1}R$ یک میدان است و آن را میدان کسرهای حوزهٔ صحیح R می‌نامند.

تعریف ۱_۱_۱۰. فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح با میدان کسرهای K باشد. ایده‌ال کسری R یک R_زیرمدول ناصفر I از K است به طوریکه، به ازای عنصر ناصفری چون $a \in R$، $aI \subset R$.

تعریف ۱_۱_۱۱. ایده‌ال کسری I از حوزهٔ صحیح R را معکوس‌پذیر نامیم هرگاه به ازای ایده‌ال کسری چون J از R، $IJ = R$.

بعنوان مثال هر ایده‌ال اصلی ناصفر از حوزهٔ صحیح R معکوس‌پذیر است.

تعریف ۱_۱_۱۲. هر حوزهٔ ددکیند یک حوزه صحیح مانند R است که در آن هر ایده‌ال $(\neq R)$ حاصلضرب تعدادی متناهی ایده‌ال اول می‌باشد.

بعنوان مثال هر حوزه ایده‌ال اصلی (PID) یک حوزهٔ ددکیند است.

قضیه ۱_۱_۱۳. گیریم R یک حوزهٔ ددکیند باشد. آنگاه هر ایده‌ال I از R معکوس‌پذیر است.

اثبات: ([۴]، قضیه (۸_۶_۱۰)). ■

تعریف ۱_۱_۱۴. گیریم I ایده‌الی از حلقهٔ R باشد و برای هر پوشش کارآمد $I \subseteq I_1 \cup \ldots \cup I_n$ داشته باشیم، $n = 1$. در اینصورت ایده‌ال I را u_ایده‌ال می‌نامیم. (این نامگذاری بوسیلهٔ «کیوآرترارو» و «بوتس» انجام گرفته است).

از اینرو، هرگاه برای یک u_ایده‌ال I داشته باشیم، $I \subseteq I_1 \cup \ldots \cup I_n$، آنگاه برای بعضی مقادیر k، $I \subseteq I_k$.

گزارهٔ ۱_۱_۱۵ (کیوآرترارو و بوتس). گیریم R یک حوزه صحیح باشد. هر ایده‌ال معکوس‌پذیر از R یک u_ایده‌ال است. ([۹] و قضیهٔ ۵_۱).

اثبات: گیریم I ایده‌الی معکوس‌پذیر در R و I یک پوشش کارآمد با بیش از یک ایده‌ال داشته باشد. فرض کنیم $I = I_۱ \cup \ldots \cup I_n$ چنان اجتماعی باشد که در میان اجتماعهای دیگر با شرایط مذکور دارای طول مینیمال باشد. یعنی n کوچکترین عددی است که $I = I_۱ \cup \ldots \cup I_n$ یک اجتماع کارآمد می‌باشد (در حقیقت $n > ۲$).

حال بوضوح $I = (I_۱ + I_۲) \cup I_۳ \cup \ldots \cup I_n$. از طرفی با تحدید $I = (I_۱ + I_۲) \cup I_۳ \cup \ldots \cup I_n$ به یک اجتماع کارآمد، ایده‌ال $I_۱ + I_۲$ حذف نشدنی است. (زیرا $I = I_۱ \cup \ldots \cup I_n$ یک اجتماع کارآمد است). بنابراین با توجه به مینیمال بودن n نتیجه می‌گیریم $I = I_۱ + I_۲$.

بطور مشابه می‌توان نشان داد که برای هر k، $۲ \leq k \leq n$، $I = I_۱ + I_k$. حال گیریم $J_k = I_k \cdot I^{-۱}$. آنگاه برای هر k، $۲ \leq k \leq n$، $R = J_۱ + J_k$ و با توجه به یکدار بودن R خواهیم داشت

$$R = J_۱ + J_۲ J_۳ \cdot \ \ldots \ \cdot J_n \cdot$$

بنابراین

$$I = I_۱ + I J_۲ J_۳ \cdot \ \ldots \ \cdot J_n \cdot$$

اما برای هر t، $۲ \leq t \leq n$، $I J_۲ J_۳ \cdot \ \ldots \ \cdot J_n \subseteq I_t$، لذا بنابر لم (۱-۱-۶) داریم:

$$I J_۲ J_۳ \cdot \ \ldots \ \cdot J_n \subseteq I_۲ \cap \ldots \cap I_n = I_۱ \cap I_۲ \cap \ldots \cap I_n \subseteq I_۱ \cdot$$

از اینرو $I = I_۱$. اما این متناقض با کارآمد بودن $I = I_۱ \cup \ldots \cup I_n$ است. پس I یک u-ایده‌ال و اثبات تمام است. ■

نتیجه اینکه در یک حوزهٔ ددکیند تمام ایده‌الها u-ایده‌الند. «کیوآرترارو» و «بوتس» چنین حلقه‌هایی را u-حلقه نامیدند و توصیف کاملی از آنها را در [۹] ارائه کرده‌اند.